The Čech-Dolbeault representation of action of microdifferential operators to microfunctions

By

Naofumi Honda*and Daichi Komori**

Abstract

本稿では，超局所化された Čech-Dolbeault コホモロジーを用いることによって，microfunction に対する microdifferential operator の作用の具体的な記述を明らかにする．本稿は筆者らにより投稿予定の論文 [6] のサマリーである．

§ 1. Introduction

超局所解析において，多くの対象が層の導来圏を用いて記述されており，その切断を考える上では局所コホモロジー群として記述されることが知られている．例えば，最もよく知られる例として $\mathbb{R}^n$ 上の佐藤超関数は $\mathbb{C}^n$ 上の正則関数の層を係数とする $\mathbb{R}^n$ に台を持つ n 次コホモロジーとして実現される．また，microfunction や無限階擬微分作用素についても同様に，正則関数を基礎とする層係数局所コホモロジーの帰納極限の形で記述されることが知られている．通常，これらのコホモロジー表示は入射層による分解を用いて計算を行うが，理論的な意味では入射分解の存在は知られていても，正則関数の層ですら，意味のある入射分解の存在はほとんど知られていない．そのため，局所的な場合については局所コホモロジーの具体的計算手法として Čech コホモロジーがしばしば利用される．

しかし，Čech コホモロジーの理論は，超局所解析において大域的な切断の記述に活用する上では十分ではないことが知られている．Čech コホモロジーの理論では考えている Čech 被覆の各開集合上で高次コホモロジーの消滅を要求するが，岡-Cartan の定理から，一般には Stein 領域においてそれらが保証される．一方で大域的な場合には，一般の領域に対して Stein 被覆の存在が保証できないため，正則関数の層を Čech コホモロジーの理

2010 Mathematics Subject Classification(s): Primary 32A45; Secondary 35A27.
Key Words: microlocalization, Čech-Dolbeault cohomology, microdifferential operator, hyperfunctions
Supported by JSPS KAKENHI Grant Number 21K03284 and 21K13802
*Department of Mathematics, Faculty of Science, Hokkaido University, Sapporo, 060-0810, Japan.
**Department of Mathematics, Kindai University, Higashi-Osaka, 577-8502, Japan.

論を用いて高次局所コホモロジーの大域的な切断の表示を得ることは難しい．このような問題を起因として，青木-片岡によって導入された無限階擬微分作用素の研究などでは，いくつかの課題を抱えていた．

著者は，青木らの理論における諸問題に対して本多-伊澤-諏訪によって導入されたČech-Dolbeault コホモロジーの理論が効果的であると考えた．この新たな理論では，正則関数の層が Dolbeault 分解，すなわち C^∞ 級関数を係数とする微分形式からなる分解を持つことを利用し，Dolbeault 分解と，最も基本的である 2 枚の被覆からなる相対 Čech 被覆から構成される二重複体の n 次コホモロジーが元となる正則関数の層を係数とする局所コホモロジーと同型となることを明らかにした．これにより，例えば，佐藤超関数 $u \in H^n_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{C}^n\,;\,\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n})$ は $u_1 = \bar{\partial} u_{01}$ を満たす $(0,n)$ 形式の C^∞ 級関数係数の微分形式 u_1 と $(0,n-1)$ 形式の C^∞ 級関数係数の微分形式 u_{01} の組として表すことができる．また，ここで利用される Čech 被覆は最小限の 2 枚から構成され，それらの開集合に Stein 性は要求されない．これにより，大域的な場合にも正則関数の層などを係数に持つ局所コホモロジーの具体的な記述が可能となった．

これらのアイデアを応用すべく，筆者らは本多，伊澤，諏訪のアイデアを導来圏の言葉で記述し直し，microlocalized Čech-Dolbeault コホモロジーを導入した．これにより，microfunction や無限階擬微分作用素といった超局所化が必要な対象に対しても Čech-Dolbeault コホモロジーを用いて簡潔に記述することができるようになる．また，これまでの理論では触れることの難しかった大域的な場合にも，正則関数の層などを係数とする局所コホモロジーを計算することで，青木の理論における作用素の合成や作用を具体的に記述することが可能になると考えられる．これらの枠組みは，局所的，大域的の二つの場合を区別せずに理論を構成できるため，基礎理論として優れており，また層の理論とも相性が良い．本稿では，以上の枠組みを構成し，microlocal operator の holomorphic microfunction への積分による作用を具体的に記述する．

本稿の出版にあたり，筆者は京都大学数理解析研究所の国際共同利用・共同研究拠点の援助を受けている．この場をお借りしてお礼を申し上げる．

Preliminary

自然数 n に対して M を n 次元実多様体，X をその複素化とする．はじめに，本稿で用いる記号をまとめて紹介する．

- X 上の正則関数のなす層を $\mathscr{O}_X$ とする．
- $T^*_M X$ 上の microfuntions のなす層を $\mathscr{C}_M$ とかく．
- X 上の C^∞ 級関数を係数とする $(0,k)$-形式のなす層を $C_X^{\infty,(0,k)}$ とかく．
- $X \times X$ 上の C^∞ 級関数を係数とする $(p,q;r)$-形式の層を $C_{X\times X}^{\infty,(p,q;r)}$ とかく．記号としての $(p,q;r)$-形式の意味は，第 1 変数 z_1 に関する p-形式，第 2 変数 z_2 に関する q-形式，$\bar{z}$ に関する r-形式である．
- T^*X 上の無限階擬微分作用素の層を $\mathscr{E}_X^{\mathbb{R}}$ とかく．

§ 2. 局所化された Čech-Dolbeault コホモロジー

この章では，局所化された Čech-Dolbeault コホモロジーを紹介する．この章と次の章における議論の流れは同じであることをあらかじめ述べておく．

n 次元複素多様体 X の閉部分集合を K とおく．このとき，関手 $\Gamma_{X\setminus K} : \mathrm{Mod}(\mathbb{Z}_X) \to \mathrm{Mod}(\mathbb{Z}_X)$ を以下で定義する．

Definition 2.1. $\mathscr{F} \in \mathrm{Mod}(\mathbb{Z}_X)$ とする．X の開集合 U に対して，層 $\Gamma_{X\setminus K}(\mathscr{F})$ は以下の対応によって与えられる．

$$\Gamma_{X\setminus K}(\mathscr{F})(U) = \mathscr{F}(U \setminus K).$$

このとき，関手 $\Gamma_{X\setminus K}$ は以下の性質を持つ．

Lemma 2.2. 関手 $\Gamma_{X\setminus K}$ は軟層であるという性質を保つ．すなわち，$\mathscr{F}$ を軟層とすると，$\Gamma_{X\setminus K}(\mathscr{F})$ もまた軟層となる．したがって，以下の高次コホモロジーの消滅が成立する．

$$H^k(U\,; \Gamma_{X\setminus K}(\mathscr{F})) = 0 \quad (k \neq 0).$$

X 上の層からなる複体 $\mathscr{F}^\bullet$ として以下のようなものを考える．

$$\mathscr{F}^\bullet : 0 \longrightarrow \mathscr{F}^0 \xrightarrow{d} \mathscr{F}^1 \xrightarrow{d} \cdots \longrightarrow \mathscr{F}^p \longrightarrow \cdots .$$

上の複体から新たな複体 $\mathcal{C}_{X,X\setminus K}(\mathscr{F}^\bullet)$ を以下で構成する．

Definition 2.3. 複体 $\mathcal{C}_{X,X\setminus K}(\mathscr{F}^\bullet)$ を以下で定義する．

$$\mathcal{C}_{X,X\setminus K}(\mathscr{F}^\bullet)^k = \mathscr{F}^k \oplus \Gamma_{X\setminus K}(\mathscr{F}^{k-1}) \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

ただし，複体間の射 $\bar{\vartheta} : \mathcal{C}_{X,X\setminus K}(\mathscr{F}^\bullet)^k \to \mathcal{C}_{X,X\setminus K}(\mathscr{F}^\bullet)^{k+1}$ は以下で与えられる．

$$\bar{\vartheta}(f^k \oplus f^{k-1}) = d\,f^k \oplus (f^k - d\,f^{k-1}).$$

すると，この関手 $\mathcal{C}_{X,X\setminus K}$ は 0 とホモトピー同値であるという性質を保つので，三角圏の間の関手と見做すことができる．

Lemma 2.4. 関手 $\mathcal{C}_{X,X\setminus K}$ に関して，以下の性質が成り立つ．

1. 関手 $\mathcal{C}_{X,X\setminus K}$ は三角圏の間の関手 $\mathcal{C}_{X,X\setminus K} : \mathrm{K}^+(\mathrm{Mod}(\mathbb{Z}_X)) \longrightarrow \mathrm{K}^+(\mathrm{Mod}(\mathbb{Z}_X))$ である．

2. $\mathscr{F}^\bullet \in \mathrm{K}^+(\mathrm{Mod}(\mathbb{Z}_X))$ が軟層からなる完全列とすると，$\mathcal{C}_{X,X\setminus K}(\mathscr{F}^\bullet)$ は 0 と擬同型である．

Proof. 証明は Lemma 2.2 から直ちに従う. □

Lemma 2.4 と [9] の Remark 1.8.10 から関手 $\mathcal{C}_{X,X\setminus K}$ が右導来化可能である．その右導来化を $\mathbf{R}\mathcal{C}_{X,X\setminus K}$ と書く．すると $\mathscr{F}^\bullet \in \mathrm{D}^+(\mathrm{Mod}(\mathbb{Z}_X))$ に対して次が成り立つ．

$$\mathbf{R}\mathcal{C}_{X,X\setminus K}(\mathscr{F}^\bullet) = \mathcal{C}_{X,X\setminus K}(\mathscr{I}^\bullet).$$

ただし，$\mathscr{I}^\bullet$ は $\mathscr{F}^\bullet$ の軟層による分解である．すなわち，右導来関手 $\mathbf{R}\mathcal{C}_{X,X\setminus K}(\mathscr{F}^\bullet)$ は具体的に $\mathscr{F}^\bullet$ の軟層分解を用いて計算可能であることが言える．

局所化された Čech-Dolbeault 複体の大域切断 $C(X, X\setminus K)(\mathscr{F}^\bullet)$ についても触れておく．

$\mathscr{F}^\bullet$ を X 上の層からなる下に有界な複体，K を X の閉部分集合とする．

Definition 2.5. X 上の層の大域切断からなる複体 $C(X, X\setminus K)(\mathscr{F}^\bullet)$ を以下で定義する．

$$C(X, X\setminus K)(\mathscr{F}^\bullet)^k = \mathscr{F}^k(X) \oplus \mathscr{F}^{k-1}(X\setminus K) \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

また，複体の射 $\bar{\vartheta}$ を以下で与えられる．

$$\bar{\vartheta}(f^k \oplus f^{k-1}) = d\,f^k \oplus (f^k - d\,f^{k-1}).$$

ただし，d は $\mathscr{F}^\bullet$ の複体の射である．

$C(X, X\setminus K)$ を $\mathrm{K}^+(\mathrm{Mod}(\mathbb{Z}_X))$ から $\mathrm{K}^+(\mathrm{Mod}(\mathbb{Z}))$ への関手と見做すと，以下の補題が成り立つ．

Lemma 2.6. 関手 $C(X, X\setminus K)$ に関して，以下の性質が成り立つ．

1. 関手 $C(X, X\setminus K)$ は三角圏 $\mathrm{K}^+(\mathrm{Mod}(\mathbb{Z}_X))$ から三角圏 $\mathrm{K}^+(\mathrm{Mod}(\mathbb{Z}))$ への関手である．
2. $\mathscr{F}^\bullet \in \mathrm{K}^+(\mathrm{Mod}(\mathbb{Z}_X))$ を軟層からなる完全列とすると，$C(X, X\setminus K)(\mathscr{F}^\bullet)$ は 0 と擬同型である．

上の補題により，関手 $C(X, X\setminus K)$ の右導来関手が得られる．それを $\mathbf{R}C(X, X\setminus K)$ と書く．すると，$\mathscr{F}^\bullet \in \mathrm{D}^+(\mathrm{Mod}(\mathbb{Z}_X))$ に対して，$\mathbf{R}C(X, X\setminus K)(\mathscr{F}^\bullet)$ は次の式を満たすことがわかる．

$$\mathbf{R}C(X, X\setminus K)(\mathscr{F}^\bullet) = C(X, X\setminus K)(\mathscr{I}^\bullet).$$

ただし，$\mathscr{I}^\bullet$ は $\mathscr{F}^\bullet$ の軟層分解である．すなわち，これは右導来関手 $\mathbf{R}C(X, X\setminus K)(\mathscr{F}^\bullet)$ が軟層分解を用いて具体的に計算できることを意味する．

Lemma 2.2 により，$\mathscr{F}^\bullet$ が軟層からなる複体であれば，$\mathcal{C}_{X,X\setminus K}(\mathscr{F}^\bullet)$ は軟層からなる複体である．故に，関手 $\mathbf{R}\Gamma(X\,;\,\bullet)$ を局所化された Čech-Dolbeault 複体 $\mathbf{R}\mathcal{C}_{X,X\setminus K}(\mathscr{F}^\bullet)$ に施すことで次が得られる．

Proposition 2.7. $\mathscr{F}^\bullet \in \mathrm{D}^+(\mathrm{Mod}(\mathbb{Z}_X))$ を軟層からなる複体とする．この時，以下が成り立つ．

$$\begin{aligned}\mathbf{R}\Gamma(X\,;\mathbf{R}\mathcal{C}_{X,X\setminus K}(\mathscr{F}^\bullet) &\simeq \Gamma(X\,;\mathcal{C}_{X,X\setminus K}(\mathscr{F}^\bullet))\\ &\simeq C(X,X\setminus K)(\mathscr{F}^\bullet) \simeq \mathbf{R}C(X,X\setminus K)(\mathscr{F}^\bullet).\end{aligned}$$

佐藤超関数や microfunction と Čech-Dolbeault コホモロジーの関係を見るために，$\Gamma_K(\bullet)$ の作用についても考察する．規準的な射 $\Gamma_K(\mathscr{F}^\bullet) \to \mathcal{C}_{X,X\setminus K}(\mathscr{F}^\bullet)$ を以下の対応で与える．

$$\Gamma_K(\mathscr{F}^\bullet)^k \ni f^k \mapsto f^k \oplus 0 \in \mathscr{F}^k \oplus \Gamma_{X\setminus K}(\mathscr{F}^{k-1}) = \mathcal{C}_{X,X\setminus K}(\mathscr{F}^\bullet)^k \quad (k\in\mathbb{Z}).$$

これは入射層からなる複体 $\mathscr{F}^\bullet$ の間の擬同型を与える．したがって，次の命題が成り立つ．

Proposition 2.8. 以下の同型が成り立つ．

$$\mathbf{R}\Gamma_K(\bullet) \simeq \mathbf{R}\mathcal{C}_{X,X\setminus K}(\bullet), \quad \mathbf{R}\Gamma_K(X\,;\bullet) \simeq \mathbf{R}C(X,X\setminus K)(\bullet).$$

さらに $\mathscr{F}^\bullet \in \mathrm{K}^+(\mathrm{Mod}(\mathbb{Z}_X))$ が軟層からなる複体であれば以下が成り立つ．

$$\mathbf{R}\Gamma_K(\mathscr{F}^\bullet) \simeq \mathcal{C}_{X,X\setminus K}(\mathscr{F}^\bullet), \quad \mathbf{R}\Gamma_K(X\,;\mathscr{F}^\bullet) \simeq C(X,X\setminus K)(\mathscr{F}^\bullet).$$

層からなる複体 $\mathscr{F}^\bullet$ として正則関数の層 $\mathscr{O}_X$ を取ることを考える．よく知られるように，$\mathscr{O}_X$ は軟層分解として Dolbeaullt 複体

$$0 \to \mathscr{O}_X \to C_X^\infty \to C_X^{\infty,(0,1)} \to \cdots,$$

を持つので，以下の系が得られる．

Corollary 2.9. 以下の同型が成り立つ．

$$\mathbf{R}\Gamma_K(X\,;\mathscr{O}_X) \simeq \Gamma(X\,;\mathcal{C}_{X,X\setminus K}(C_X^{\infty,(0,\bullet)})) \simeq C(X,X\setminus K)(C_X^{\infty,(0,\bullet)}).$$

両辺の n 次コホモロジーをとれば，これは佐藤超関数 $\mathscr{B}_M(M)$ が *Dolbeault* 分解を用いて具体的に記述できることを意味する．

§3. 超局所化された Čech-Dolbeault 複体

ここでは Čech-Dolbeault 複体の超局所化について触れる．繰り返しになるが，ここでの議論の流れは前の章と同じである．

X を無限遠点において可算な複素多様体，M を X の閉部分多様体とする．法束，余法束をそれぞれ $\tau : T_MX \to M$, $\pi : T_M^*X \to M$ で記述する．以下，管状近傍定理により T_MX と X を M の近傍で同一視する．超局所化を行う前に，いくつか言葉の定義を行う．

Definition 3.1. V を $\mathbb{R}^+$-conic な T^*_MX の部分集合とする．双対錐 $V^\circ \subset T_MX$ を以下で定義する．

$$V^\circ = \bigsqcup_{x\in\pi(V)} \{\nu \in (T_MX)_x \mid \langle \xi, \nu\rangle \geq 0 \text{ for any } \xi \in V_x\}.$$

ただし，$V_x = V \cap \pi^{-1}(x) \subset (T^*_MX)_x$ である．

Remark. T_MX の $\mathbb{R}^+$-conic な部分集合 V に対しても，その双対錐 $V^\circ \subset T^*_MX$ を同様の記法で表すこととする．

Definition 3.2. Ω を M の開部分集合とする．$\tau^{-1}(\Omega)$ の $\mathbb{R}^+$-conic な 2 つの部分集合 L_1 と L_2 に対してある種の包含関係 $L_1 \subset\subset L_2$ を

$$L_1 \subset\subset L_2 \iff L_1 \subset L_2 \text{ かつ } \overline{L_1} \setminus M \subset \mathrm{int}(L_2) \quad \text{in } \tau^{-1}(\Omega)$$

により定義し，このとき，L_1 は L_2 に真に含まれているという．

Ω を M の開部分集合とし，$L \subset \tau^{-1}(\Omega)$ を $\mathbb{R}^+$-conic な閉部分集合とする．

Definition 3.3. $\tau^{-1}(\Omega)$ の閉集合 G が Ω に沿って L に漸近するとは，L を真に含む任意の $\mathbb{R}^+$-conic な閉部分集合 $L' \subset \tau^{-1}(\Omega)$ に対して，ある Ω の開近傍 $W \subset X$ が存在して $G \cap W \subset L'$ を満たすことをいう．

V を T_MX の $\mathbb{R}^+$-conic な開部分集合とする．

Definition 3.4. X の開集合 U が M に沿った開き V の楔であるとは，T_MX の $\mathbb{R}^+$-conic な任意の開集合 $V' \subset\subset V$ に対して，ある $\tau(V)$ の開近傍 $W \subset X$ が存在し，$V' \cap W \subset U$ を満たすことをいう．

以上の定義から，以下の条件が同値であることがわかる．

1. 集合 G が Ω に沿って L に漸近する．
2. 集合 $\tau^{-1}(\Omega) \setminus G$ は M に沿った開きが $\tau^{-1}(\Omega) \setminus L$ の楔である．

次に，X 上の層 $\mathscr{F}$ に対して T^*_MX 上の層 $\mathscr{F}^\#$ を導入する．層 $\mathscr{F}^\#$ は Čech-Dolbeault コホモロジー論における $\Gamma_{X\setminus K}(\mathscr{F})$ に対応するものである．

Definition 3.5. $\mathscr{F} \in \mathrm{Mod}(\mathbb{Z}_X)$ とし，V を $\mathbb{R}^+$-conic な T^*_MX の開部分集合とする．T^*_MX 上の conic な前層 $\mathscr{F}^{\#P}$ を以下で定義する．

$$\mathscr{F}^{\#P}(V) = \varinjlim_{W,G} \mathscr{F}(W \setminus G).$$

ただし，W は $\pi(V)$ の開近傍を動き，G は V° に漸近するような $\tau^{-1}(\pi(V))$ の閉集合を動く．

前層 $\mathscr{F}^{\#P}$ は層ではない．そこで，その層化を $\mathscr{F}^{\#}$ と書くことにする．前層とその層化の開集合 V における切断は一般には一致しないが，V の各 fiber が凸である場合には一致することが，次の命題からわかる．

Proposition 3.6. V を $T^*_M X$ の $\mathbb{R}^+$-*conic* な開部分集合とし，V の各 *fiber* は凸集合であるとする．このとき，次が成り立つ．

$$\mathscr{F}^{\#}(V) = \mathscr{F}^{\#P}(V).$$

さらに，$\Omega \subset M$ に対して次が成り立つ．

$$\mathscr{F}^{\#}(\pi^{-1}(\Omega)) = \mathscr{F}^{\#}(\pi^{-1}(\Omega) \setminus M) = \varinjlim_{W} \mathscr{F}(W \setminus M).$$

ただし，W は Ω の開近傍を動く．

Remark. これ以降の議論において，$T^*_M X$ の $\mathbb{R}^+$-conic な開部分集合 V に対して，各 fiber が凸であるという仮定を課す．実際，conic な層を考える上で，$T^*_M X$ の $\mathbb{R}^+$-conic な開部分集合の族のうち，各 fiber が全て凸であるようなものだけを考えれば十分である．

前の章において，関手 $\Gamma_{X\setminus K}$ は層の軟性を保った．一方で，$\mathscr{F}$ が軟層であるからといって $\mathscr{F}^{\#}$ もそうであるとは限らない．すなわち，$(\bullet)^{\#}$ は層の軟性を保つとは限らない．しかし，以下の命題のように，各 fiber が凸である集合上ではコホモロジー的に良い振る舞いをする．

Proposition 3.7. V を $T^*_M X$ の $\mathbb{R}^+$-*conic* な開部分集合，$\mathscr{F}$ を X 上の軟層とする．さらに V の各 *fiber* は凸であるとする．このとき，V における $\mathscr{F}^{\#}$ の高次コホモロジーが消滅する．すなわち，次が成り立つ．

$$H^k(V\,;\,\mathscr{F}^{\#}) = 0 \quad (k \neq 0).$$

ここで超局所化された Čech-Dolbeault 複体 $\mu\mathcal{C}_M(\mathscr{F}^\bullet)$ を定義する．

Definition 3.8. $\mathscr{F}^\bullet$ を層の複体とする．

$$\mathscr{F}^\bullet : 0 \longrightarrow \mathscr{F}^0 \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \mathscr{F}^k \xrightarrow{d} \mathscr{F}^{k+1} \xrightarrow{d} \cdots .$$

このとき，新たな複体 $(\mu\mathcal{C}_M(\mathscr{F}^\bullet), \bar{\vartheta})$ を以下で定義する．

$$\mu\mathcal{C}_M(\mathscr{F}^\bullet)^k = \pi^{-1}(\mathscr{F}^k|_M) \oplus (\mathscr{F}^{k-1})^{\#}.$$

ただし，射 $\bar{\vartheta} : \mu\mathcal{C}_M(\mathscr{F}^\bullet)^k \to \mu\mathcal{C}_M(\mathscr{F}^\bullet)^{k+1}$ は以下で与えられる．

$$\bar{\vartheta}(f^k \oplus f^{k-1}) = d\,f^k \oplus (f^k - d\,f^{k-1}).$$

上の定義で与えられた関手 $\mu\mathcal{C}_M$ は 0 とホモトピックであるという性質を保つ．したがって関手 $\mu\mathcal{C}_M$ を三角圏の間の関手とみなせる．

Lemma 3.9. 関手 $\mu\mathcal{C}_M$ について以下の性質が成り立つ．

1. 関手 $\mu\mathcal{C}_M$ は $\mathbf{K}^+(\mathrm{Mod}(\mathbb{Z}_X))$ から $\mathbf{K}^+(\mathrm{Mod}(\mathbb{Z}_{T^*_M X}))$ への三角圏の間の関手となる．
2. $\mathscr{F}^\bullet$ が軟層からなる完全列であれば，$\mu\mathcal{C}_M(\mathscr{F}^\bullet)$ は 0 と擬同型である．

上の補題と [9] の Remark 1.8.10 から，関手 $\mu\mathcal{C}_M$ は右導来化可能である．$\mu\mathcal{C}_M$ の右導来関手を $\mathbf{R}\mu\mathcal{C}_M$ と書くこととする．すると，$\mathscr{F}^\bullet \in \mathrm{D}^+(\mathrm{Mod}(\mathbb{Z}_X))$ に対して，その軟層からなる分解列 $\mathscr{I}^\bullet$ を構成できれば，$\mathbf{R}\mu\mathcal{C}_M(\mathscr{F}^\bullet)$ を以下のように計算できることがわかる．

$$\mathbf{R}\mu\mathcal{C}_M(\mathscr{F}^\bullet) = \mu\mathcal{C}_M(\mathscr{I}^\bullet).$$

そのため，特に $\mathscr{F}^\bullet$ 自身が軟層からなる複体であれば以下が成り立つ．

$$\mathbf{R}\mu\mathcal{C}_M(\mathscr{F}^\bullet) = \mu\mathcal{C}_M(\mathscr{F}^\bullet).$$

超局所化された Čech-Dolbeault 複体の大域切断についても触れておく．

$\mathscr{F}^\bullet$ を層のなす複体とする:

$$\mathscr{F}^\bullet : 0 \longrightarrow \mathscr{F}^0 \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \mathscr{F}^k \xrightarrow{d} \mathscr{F}^{k+1} \xrightarrow{d} \cdots .$$

また，V を $T^*_M X$ の $\mathbb{R}^+$-conic な開部分集合とする．

Definition 3.10. $T^*_M X$ 上の層のなす複体 $\mu C_M(V\,;\mathscr{F}^\bullet)$ を以下で定義する．

$$\mu C_M(V\,;\mathscr{F}^\bullet)^k = \mathscr{F}^k(\pi(V)) \oplus (\mathscr{F}^{k-1})^\#(V).$$

また，複体間の射 $\bar\vartheta$ は以下で与えられる．

$$\bar\vartheta(f^k \oplus f^{k-1}) = d\,f^k \oplus (f^k - d\,f^{k-1}).$$

ただし，d は $\mathscr{F}^\bullet$ における複体間の射とする．

さらに，関手 $\mu C_M(V\,;\bullet)$ は $\mathrm{K}^+(\mathrm{Mod}(\mathbb{Z}_X))$ から $\mathrm{K}^+(\mathrm{Mod}(\mathbb{Z}))$ への関手であり，以下の補題が成り立つ．

Lemma 3.11.

1. 関手 $\mu C_M(V\,;\bullet)$ は $\mathrm{K}^+(\mathrm{Mod}(\mathbb{Z}_X))$ から $\mathrm{K}^+(\mathrm{Mod}(\mathbb{Z}))$ への三角圏の間の関手である．
2. $\mathscr{F}^\bullet \in \mathrm{K}^+(\mathrm{Mod}(\mathbb{Z}_X))$ が軟層からなる完全列であると仮定すると，$\mu C_M(V\,;\mathscr{F}^\bullet)$ は 0 と擬同型である．

上の補題により，関手 $\mu C_M(V\,;\,\bullet)$ は右導来化可能であり，それを $\mathbf{R}\mu C_M(V\,;\,\bullet)$ と書く．ゆえに，$\mathscr{F}^\bullet \in \mathrm{D}^+(\mathrm{Mod}(\mathbb{Z}_X))$ に対して，その軟層からなる分解列 $\mathscr{I}^\bullet$ を構成できれば，$\mathbf{R}\mu C_M(\mathscr{F}^\bullet)$ を以下のように計算できることがわかる．

$$\mathbf{R}\mu C_M(V\,;\,\mathscr{F}^\bullet) = \mu C_M(V\,;\,\mathscr{I}^\bullet).$$

そのため，特に $\mathscr{F}^\bullet$ 自身が軟層からなる複体であれば以下が成り立つ．

$$\mathbf{R}\mu C_M(V\,;\,\mathscr{F}^\bullet) = \mu C_M(V\,;\,\mathscr{F}^\bullet).$$

Proposition 2.7 と Proposition 2.8 の超局所化版を考える．

Proposition 3.12. $\mathscr{F}^\bullet \in \mathrm{D}^+(\mathrm{Mod}(\mathbb{Z}_X))$ を軟層からなる複体とし，V を T^*_MX の $\mathbb{R}^+$-*conic* な開部分集合とする．さらに V の各 *fiber* は凸であるとする．このとき以下が成り立つ．

$$\begin{aligned}\mathbf{R}\Gamma(V\,;\,\mathbf{R}\mu\mathcal{C}_M(\mathscr{F}^\bullet)) &\simeq \Gamma(V\,;\,\mu\mathcal{C}_M(\mathscr{F}^\bullet))\\ &\simeq \mu C_M(V\,;\,\mathscr{F}^\bullet) \simeq \mathbf{R}\mu C_M(V\,;\,\mathscr{F}^\bullet).\end{aligned}$$

$\mu_M(\bullet)$ を M に沿った超局所化関手，$\mathscr{G} \in \mathrm{Mod}(\mathbb{Z}_{T_MX})$ とする．$V \subset T^*_MX$ の各 fiber が凸であるとすると

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{C}_{V^\circ}, \mathscr{G}) \simeq \mathrm{Hom}((\mathbb{C}_V)^\vee, \mathscr{G}) \simeq \mathrm{Hom}(\mathbb{C}_V, \mathscr{G}^\wedge)$$

が得られ，以下の定理が成り立つ．

Theorem 3.13. 関手の間の規準的な同型射

$$\mu_M(\bullet) \xleftarrow{\sim} \mathbf{R}\mu\mathcal{C}_M(\bullet)$$

が存在する．さらに，V の各 *fiber* が凸であれば，$\mathrm{D}^+(\mathrm{Mod}(\mathbb{Z}))$ における以下の同型が存在する．

$$\mathbf{R}\Gamma(V; \mu_M(\mathscr{F}^\bullet)) \simeq \mathbf{R}\mu\mathcal{C}_M(V\,;\,\mathscr{F}^\bullet).$$

この定理から以下の系が従う．

Corollary 3.14. X を無限遠において可算な複素多様体とし，$C_X^{\infty,(0,\bullet)}$ を $\mathscr{O}_X$ の *Dolbeault* 分解とする．このとき，以下の擬同型が存在する．

$$\mu_M(\mathscr{O}_X) \simeq \mu\mathcal{C}_M(C_X^{\infty,(0,\bullet)}).$$

さらに，V を T^*_MX の $\mathbb{R}^+$-*conic* な開部分集合で V の各 *fiber* が凸であるとすると，以下が成り立つ．

$$\mathbf{R}\Gamma(V\,;\,\mu_M(\mathscr{O}_X)) \simeq \mu C_M(V\,;\,C_X^{\infty,(0,\bullet)}).$$

Example 3.15. 最も重要かつ基本的な例は佐藤の microfuntion の層 $\mathscr{C}_M$ である．M を n 次元実解析的多様体とし，X をその複素化とする．法束，余法束をそれぞれ $\tau_M : T_M X \to M$，$\pi_M : T_M^* X \to M$ で記述する．佐藤の microfunction の層 $\mathscr{C}_M$ は

$$\mathscr{C}_M = \mathscr{H}^n(\mu_M(\mathscr{O}_X)),$$

により定義されるため，$T_M^* X$ の $\mathbb{R}$-conic な開部分集合 V で，かつ V の各 fiber が凸であるようなときは以下の同型が従う．

$$\mathscr{C}_M(V) \simeq H^n(\mu C_M(V; C_X^{\infty,(0,\bullet)})).$$

ゆえに microfunction $u \in \mathscr{C}_M(V)$ は以下のような表示を持つ．

$$(u_1, u_{01}) \in C_X^{\infty,(0,n)}(U) \oplus C_X^{\infty,(0,n-1)}(U \setminus G),$$

ただし U は $\pi(V)$ の開近傍を動き，G は $\tau^{-1} \circ \pi(V)$ において V° に漸近するように動く．

§ 4. Čech-Dolbeault を用いた無限階擬微分作用素の holomorphic microfunction への作用

ここでは，前章で導入した超局所化された Čech-Dolbeault コホモロジーを用いて，無限階擬微分作用素の holomorphic microfunction への作用を具体的に記述する．

§ 4.1. 無限階擬微分作用素と holomorphic microfunction の Čech-Dolbeault 表示

X を n 次元 $\mathbb{C}$ ベクトル空間とし，その局所座標を $z = (z_1, z_2, \cdots, z_n)$ とする．また，Y は X の閉部分多様体であり，$z' = (z_1, \cdots, z_d)$ と $z'' = (z_{d+1}, \cdots, z_n)$ という記法を用いて局所的には $\{(z = (z', z'') \mid z' = 0\}$ で与えられているとする．このとき holomorphic microfunction の層 $\mathscr{C}_{Y|X}^{\mathbb{R}}$ は以下で与えられる．

$$\mathscr{C}_{Y|X}^{\mathbb{R}} = \mathscr{H}^d(\mu_Y(\mathscr{O}_X)).$$

また，無限階擬微分作用の層 $\mathscr{E}_X^{\mathbb{R}}$ は以下で与えられる．

$$\mathscr{E}_X^{\mathbb{R}} = \mathscr{H}^n(\mu_\Delta(\mathscr{O}_{X\times X}^{(0,n)})).$$

ただし，Δ は $X \times X$ の対角集合を表す．

$V, \tilde{V}$ をそれぞれ $T_Y^* X, T^* X$ における $\mathbb{R}$-conic な開部分集合とし，$\tilde{V}$ を $T_Y^* X$ に制限した時，V を含むとする．また，V および $\tilde{V}$ の各 fiber は凸であることを仮定する．層 $\mathscr{C}_{Y|X}^{\mathbb{R}}(V)$ に対して Theorem 3.13 を用いれば

$$\mathscr{C}_{Y|X}^{\mathbb{R}}(V) \simeq H^d(\mu C_Y(V; C_X^{\infty,(0,\bullet)}))$$

が得られる．従って，holomorphic microfunction u は組 (u_1, u_{01}) によって表現可能である．ただし，u_1 と u_{01} は以下の条件を満たす微分形式である．

1. ある $\pi_Y(V)$ の開近傍 U が存在し $u_1 \in C_X^{\infty,(0,d)}(U)$ である．
2. V° に漸近する $\tau_Y^{-1} \circ \pi_Y(V)$ のある閉集合 G が存在し，$u_{01} \in C^{\infty,(0,d-1)}(U \setminus G)$ である．
3. $u_1|_{U\setminus G} = \bar{\partial} u_{01}$ を満たす．

ここで，$\tau_Y : T_Y X \to Y$，$\pi_Y : T_Y^* X \to Y$ はそれぞれ X における Y への法束，余法束である．

無限階擬微分作用素の層 $\mathscr{E}_X^{\mathbb{R}}$ に対しても同様の議論がしたがう．

Remark. これ以降の議論では $T_\Delta^*(X \times X)$ と T^*X を第 1 射影 $p_1 : X \times X \ni (z_1, z_2) \mapsto z_1 \in X_1$ により同一視する．

Theorem 3.13 を層 $\mathscr{E}_X^{\mathbb{R}}(\tilde{V})$ に用いれば

$$\mathscr{E}_X^{\mathbb{R}}(\tilde{V}) \simeq H^n(\mu C_\Delta(\tilde{V}; C_{X\times X}^{\infty,(0,n;\bullet)}))$$

が得られる．ゆえに，無限階擬微分作用素 P は組 (ρ_1, ρ_{01}) によって表現可能である．ただし，ρ_1 と ρ_{01} は以下の条件を満たす微分形式である．

1. ある $\pi(\tilde{V})$ の開近傍 $\tilde{U}$ が存在し，$\rho_1 \in C_{X\times X}^{\infty,(0,n;n)}(\tilde{U})$ である．
2. $\tilde{V}^\circ$ に漸近する $\tau^{-1} \circ \pi(\tilde{V})$ のある閉集合 $\tilde{G}$ が存在し，$\rho_{01} \in C_{X\times X}^{\infty,(0,n;n-1)}(\tilde{U} \setminus \tilde{G})$ である．
3. $\rho_1|_{\tilde{U}\setminus\tilde{G}} = \bar{\partial}\rho_{01}$ を満たす．

ただし，$\tau : TX \to X$ と $\pi : T^*X \to X$ はそれぞれ接束，余接束である．

§ 4.2. 無限階擬微分作用素の holomorphic microfunction への作用の積分による表示

ここでは，無限階擬微分作用素の holomorphic microfunction への作用を，P と u のカップ積 $P \cup u$ と積分によって記述する．

前の章の結果より，無限階擬微分作用素 $P \in \mathscr{E}_X^{\mathbb{R}}(\tilde{V})$ と holomorphic microfunction $u \in \mathscr{C}_{Y|X}^{\mathbb{R}}(V)$ はそれぞれ C^∞ 級の関数を係数とする微分形式を用いて $(\rho_1, \rho_{01}), (u_1, u_{01})$ と表すことができる．これに対して，P と u のカップ積

$$P \cup u = \delta = (\delta_1, \delta_{01})$$

を以下のように定義する．

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= \rho_1(z,w) \wedge u_1(w), \\
\delta_{01} &= \varphi\, \rho_{01}(z,w) \wedge u_1(w) + (1-\varphi)\rho_1(z,w) \wedge u_{01}(w) + \bar{\partial}\varphi \wedge \rho_{01}(z,w) \wedge u_{01}(w).
\end{aligned}$$

ここで，φ は $(p_2^{-1}(U) \cap \tilde{U}) \setminus (p_2^{-1}(G) \cap \tilde{G})$ 上の C^∞ 級関数で以下を満たすものである．

1. $0 \le \varphi \le 1$.
2. φ は $p_2^{-1}(G)$ 上で 0 と等しい.
3. φ は $\tilde{G}$ 上で 1 と等しい.

さらに，D を $p_2^{-1}(G) \cap \tilde{G}$ を含む境界が滑らかな $X \times X$ の開部分集合で，$p_1 : \overline{D} \to X$ が固有写像となるようなものとする．$p_1 : p_2^{-1}(G) \cap \tilde{G} \to X$ が固有写像となるので，このような D はかならず取れることに注意する．このとき，カップ積 $P \cup u$ の D における積分は無限階擬微分作用素の holomorphic microfunction への作用を記述するものである．

Theorem 4.1. $u = (u_1, u_{01})$ および $P = (\rho_1, \rho_{01})$ をそれぞれ *holomorphic microfunction*，無限階擬微分作用素の *Čech-Dolbeault* コホモロジーによる表示とする．δ, φ, D をそれぞれ，上で定義したものとすると，無限階擬微分作用素の *holomorphic microfunction* への作用 Pu は *Čech-Dolbeault* コホモロジーの枠組みで以下のように書ける．

$$(\int_{D_z} \delta_1 - \int_{\partial D_z} \delta_{01}, \int_{D_z} \delta_{01}).$$

ただし，$D_z = D \cap p_1^{-1}(z)$ であり，∂D_z は $p_1^{-1}(z)$ における D_z の境界である．

References

[1] Takashi Aoki, *Calcul Exponential des opérateurs Microdifférentiels d'ordre infini* I. Ann. Inst. Fourier. Grenoble. (1983).

[2] *Calcul Exponential des opérateurs Microdifférentiels d'ordre infini* II. Ann. Inst. Fourier. Grenoble. (1986).

[3] Takashi Aoki, Symbols and formal symbols of pseudodifferential operators, Group Representation and Systems of Differential Equations, Proceedings Tokyo, (1982) (ed. K. Okamoto), Adv. Stud. Pure Math., 4, Kinokuniya, Tokyo; North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford, (1984), 181-208.

[4] Takashi Aoki, Naofumi Honda and Susumu Yamazaki, Foundation of Symbol Theory for Analytic Pseudodifferential Operators. I. Journal of the Mathematical Society of Japan. Volume **69**. (2017).

[5] Naofumi Honda, Takeshi Izawa and Tatsuo Suwa, Sato hyperfunctions via relative Dolbeault cohomology. Journal of the Mathematical Society of Japan. Volume **75(1)**, (2023), 229-290.

[6] Naofumi Honda and Daichi Komori, The action of pseudodifferential operators to microfunctions via Čech-Dolbeault cohomology. (In preparation).

[7] Kiyoomi Kataoka, On the theory of Radon transformations of hyperfunctions and its applications, Master's Thesis, Univ. Tokyo, (1976) (in Japanese).

[8] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira, Micro-hyperbolic systems. Acta Math. **142**, (1979), 1-55.

[9] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira, Sheaves on Manifold. *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, **292**, Springer-Verlag, (1990).

[10] Mikio Sato, Takahiro Kawai and Masaki Kashiwara, Microfunctions and pseudo-differential equations. In *Hyperfunctions and Pseudo-Differential Equations (Proc. Conf., Katata, 1971; dedicated to the memory of Andre Martineau)*. Springer, Berlin, 265–529. Lecture Notes in Math., **287**, (1973).
[11] Tatsuo Suwa, Relative Dolbeault cohomology. arXiv:1903.04710.