SQ, WKB, and Fukaya

京都大学理学研究科数学教室 桑垣 樹

Tatsuki Kuwagaki

Department of Mathematics, Kyoto University

Abstract

本稿では、完全 WKB 解析、層量子化、そして深谷圏の関係についての概略を述べる。Folklore として知られているが証明が書かれたことはない事実や進行中の研究、実施予定の研究のアイデアの萌芽などの混ぜ合わせである。

1 完全 WKB 解析

これまでのところ完全 WKB 解析は Riemann 面上で発展してきているので、まずは Riemann 面上で始めよう。C を Riemann 面とする。完全 WKB 解析のターゲットは、C 上の有理型線形 $\hbar$ つき微分方程式 $P_\hbar\psi = 0$ である。正確には $\mathcal{D}_\hbar$-加群を考えるというのが、ここでの設定である。

$\mathcal{D}_\hbar$-加群 $\mathcal{M}$ に対して、その半古典極限として、スペクトル曲線 $L \subset T^*C$ が得られる。T^*C は正則シンプレクティック構造 ω を自然に持ち、それについて、L は自動的に（正則かつ実）Lagrangian 部分多様体である。

$\mathfrak{h} \in \mathbb{C}^\times$ を選ぶごとに、実シンプレクティック形式 $\mathfrak{Re}(\omega/\hbar)$ が T^*C 上に定まる。これらの実シンプレクティック構造についても、L はラグランジュ部分多様体である。また、$\mathfrak{Re}(\omega/\hbar)$ は $\mathfrak{Re}(\lambda/\hbar)$ を積分にもつ完全形式であることにも注意する。ここで λ は正則 Liouville 形式である。

完全 WKB 解析の手続きの概略は次のようなものである：まず、$x \in L$ と可縮近傍 U を、U 上 C への射影 p が同相になっているように選ぶ。すると、U 上 $\lambda/\hbar$ の原始関数 f_U が存在する。f_U を $p(U)$ 上の関数とみなして、

$$\psi_\hbar := e^{f_U/\hbar}\sum_i \psi_i \hbar^i \tag{1.1}$$

の形の $\mathcal{M}$ の形式解（WKB 解）を見つける。このようなものは定数倍を除いて一意的である。方程式 $\mathcal{M}$ が n 階である場合、ジェネリックには L は C 上 n 枚被覆である。よって、C の各点に n 個の WKB 解が付随して、形式的な解の基底を与える。

つぎに $\hbar$ について。Borel–Laplace 変換 $\mathfrak{L}$ を行う。$1/\hbar$ の Laplace 双対変数を τ と書くことにすると、τ の関数が得られる。適切な仮定のもとでは、変換後の級数は Ecalle の意味でエンドレスに解析接続可能な関数を与えると予想されている。以下では、その設定を仮定しよう。

さらに、$\mathfrak{h}$ 方向に逆 Laplace 変換可能であれば、それは $\mathcal{M}$ の解析解を与える。しかし、一般には $\mathfrak{L}(\psi_\hbar)$ はたくさんの特異点を持ち、Laplace 積分方向に特異点が現れるとその前後で解の壁越えが起きる。これはストークス幾何によって統制されていると考えられている。ストークス幾何に、Voros 同型を載せたものをスペクトルネットワークとよぶことにする。

$\mathfrak{h}$ について、ジェネリックに総和可能である場合、Voros 局所系という局所系が L 上にさだまる。これはいわゆる（サイクルに付随した）Voros シンボルをモノドロミーにするような局所系である。岩木–中西の理論では、Voros 局所系はクラスター多様体の点であると解釈される。

2 Floer 理論・深谷圏

Floer 理論および深谷圏についても概略を述べる。

まずは Novikov 環を定義しておく。$\mathbb{R}_{\geq 0}$ を非負実数のなす半群とする。すると、多項式環 $\mathbb{C}[\mathbb{R}_{\geq 0}]$ が定義できる。すると、

$$\Lambda_0 := \varprojlim_{c \to \infty} \mathbb{C}[\mathbb{R}_{\geq 0}]/T^c\mathbb{C}[\mathbb{R}_{\geq 0}] \tag{2.1}$$

で Novikov 環が定義される。

X をシンプレクティック多様体とする。X について Maslov データというものを選ぶ：これは X のラグランジアングラスマニアン束の $\mathbb{Z}$ 被覆で、各ファイバーごとには Maslov カバリングになっているようなものである。L が X のラグランジュ部分多様体であるとき、そのブレーン構造[1]とは次の 3 つのチョイスをいう。

1. L 上には、X のラグランジアングラスマニアン束の自然な切断（Gauss 写像）がある。その切断の $\mathbb{Z}$ 被覆へのリフトを次数とよぶ。次数を選ぶ。

2. L の相対 Pin 構造というものを選ぶ。

3. L 上の $\mathbb{C}$ ベクトル空間の階数 1 の局所系を選ぶ。

今からの定義には補助的な概複素構造や倉西摂動といった選択が伴うが、ここでは簡単のため、それを現にしないことにする。

Lagrangian ブレーン L_1, L_2 について、(簡単のため)$L_1 \cap L_2$ が横断的であると仮定する。すると、$CF(L_1, L_2)$（Floer 複体）という底ベクトル空間が $\Lambda_0^{L_1 \cap L_2}$ であるような、曲率付き複体が定まる（つまり、$d^2 = 0$ とは限らない、自己射をもつ）。本当の複体にするためには、バウンディングコチェインというデータを選ぶ必要がある。バウンディングコチェインは、$C^1(L, \Lambda_+)$ の元で、それを選ぶことにより d が変形され、複体が定義される。$H^1(L, \Lambda_+)$ が階数 1 の Λ_0 局所系を分類することから、バウンディングコチェインはすでに選んだ局所系の係数拡大のようなものと思うと良いかもしれない。

（曲率のない）深谷圏とは、バウンディングコチェインつきのラグランジアンブレーンのなす A_∞ 圏であり、その射の空間が Floer 複体で与えられる。シンプレクティック多様体が非コンパクトであるときには、無限遠での交差を定式化しておく必要があるが、ここでは無限小巻きというものを選んでいる。

X が余接束 T^*M の場合を考える。Lagrangian ブレーン L が一つ指定されている状況では、$x \in M$ に対して、Floer 複体の族 $CF(T_x^*M, L)$ を考えられる。この族は、x を動かしていくと非自明な同型が走るときがあり、底空間に M スペクトルネットワークが定まる、と期待される。これは Strominger–Yau–Zaslow ミラーの文脈でよく研究されていることと並行していると考えられる。

また、L 自体の族を考えると、L にバウンダリーを持つ円盤が現れるときには、スペクトルネットワークに壁越えを起こすと考えられる。

3 辞書

以下の辞書が予想されている。

$\mathcal{M}$ を C 上の $\mathcal{D}_\hbar$ 加群で、完全 WKB 解析が可能であるとする。すると、スペクトルネットワークおよび Voros 局所系が定まる。正則スペクトル曲線は自然な次数と相対 Pin 構造を持つことに注意する。

[1] もっと一般化した定義もありうるが、ここでは一般性を最小限にとどめている。

Conjecture 3.1. *Voros* 局所系の超越級数展開は、スペクトル曲線のバウンディングコチェインを与える。

つまり、各 $\natural$ について、$\mathcal{M}$ は T^*C の深谷圏の対象を与える。

$\natural$ を変動させることには色々な見方がありうるが、ここでは次のような見方を用いる：$\natural$ について、Lagrangian がファミリーを成しているとみる。$\natural$ が wall に乗ると、正則円盤があらわれバウンディングコチェインの空間に自己同型が走る。これが、岩木–中西のクラスター変換の Floer 側での見え方であると期待される。

L が（ジェネリックに）n 枚被覆になっているとする。つまり、$T_x^*C \cap L$ は (ジェネリックには)n 点である。よって、$CF(T_x^*C, L)$ は $\Lambda_0^{\oplus n}$ である。これは、$\mathcal{M}$ の x 上での解空間であると解釈される。なぜなのかは次の節で説明のようなものを与える。すると、Voros 壁越え（=Voros 接続公式）のスペクトルネットワークは、Floer 側のスペクトルネットワークと一致すると自然に期待できる。

上の辞書の一部は、Kontsevich–Soibelman や Neitzke によっても予想されている。辞書を正当化するために Floer 側で必要なことは、今後の共同研究で一部実現される予定である。

4 層量子化

では、なぜそのような辞書があるのか、ということについて説明のようなものを与える。そのためには層量子化の概念が必要である。

まずは設定となる圏を定義する。M を微分可能多様体とする、$\mathbb{R}_t$ を t で座標が入った実直線とする。$M \times \mathbb{R}_t$ の左辺に、離散群 $\mathbb{R}$ の並行移動作用を並行移動でいれる。$\mathbb{R}$ 同変層の導来圏を $\mathrm{Sh}^{\mathbb{R}}(M \times \mathbb{R}_t)$ と書く。t の標準余接座標を τ と書く。超局所台が $\tau \leq 0$ に入る対象からなる $\mathrm{Sh}^{\mathbb{R}}(M \times \mathbb{R}_t)$ の部分圏を $\mathrm{Sh}^{\mathbb{R}}_{\tau \leq 0}(M \times \mathbb{R}_t)$ と書く。

$$\mathrm{Sh}^{\mathbb{R}}_{\tau>0}(M \times \mathbb{R}_t) := \mathrm{Sh}^{\mathbb{R}}(M \times \mathbb{R}_t)/\mathrm{Sh}^{\mathbb{R}}_{\tau\leq 0}(M \times \mathbb{R}_t) \tag{4.1}$$

と定義する。$\rho\colon \{\tau > 0\} \to T^*M; (x \in M, \xi \in T_x^*M, t \in \mathbb{R}_t, \tau \in T_t^*\mathbb{R}_t) \mapsto (x \in M, \xi/\tau \in T_x^*M)$ と定義すると、$\mu\mathrm{supp}(\mathcal{E}) := \rho(\mathrm{SS}(\mathcal{E}) \cap \{\tau > 0\})$ は $\mathcal{E} \in \mathrm{Sh}^{\mathbb{R}}_{\tau>0}(M \times \mathbb{R}_t)$ に対して well-defined である。

ラグランジアンブレーン $L \subset T^*M$ の層量子化とは、 $\mathrm{Sh}^{\mathbb{R}}_{\tau>0}(M \times \mathbb{R}_t)$ の対象で、$\mu\mathrm{supp}(\mathcal{E}) = L$ かつ他にブレーンからさだまる条件を満たすものである（標語的に述べると、「超局所化がブレーンデータである」)。層量子化は、ラグランジアンブレーンからただ一つに決まるものではなく、層理論的なバウンディングコチェインと呼ばれるものから決定される。ここらへんは深谷圏側と話が並行していて、最終的には層量子化の圏と深谷圏は圏同値になると期待している（研究進行中)。

そのような圏同値（これを深谷-層対応、と呼ぶ）は、本質的には余接ファイバーの族フレアー理論で与えられる。つまり、与えられた Lagrangian ブレーン L について、$x \in M$ で茎 $\mathrm{Hom}(T_x^*M, L)$ をもつ層が層量子化である（変数 t が見えないが、これは Novikov 変数に隠されている）。特に、フレアースペクトルネットワークの壁は、その茎に非自明な張り合わせ同型が走る場所である。

他方、[Kuw20] で（本質的には）証明されていることは、スペクトルネットワークが与えられると、そこから層量子化が作られるということである。そこで次のようなことが期待される：フレアースペクトルネットワークから作られる層量子化は、深谷-層対応で得られる層量子化と同じである。

また、WKB スペクトルネットワークからも層量子化を作ることができる。つまり、$\hbar$ 微分方程式からスタートすると、二つのスペクトルネットワーク・層量子化が得られる：

1. WKB スペクトルネットワーク・そこから得られる層量子化。

2. WKB 解析をつうじて Lagrangian ブレーンを得る。その Floer スペクトルネットワーク・そこから得られ層量子化。

この二つのスペクトルネットワーク・層量子化が一致するというのがメインの予想である。

WKB スペクトルネットワークから得られる層量子化の $x \in M$ での茎は、その点での完全 WKB 解の解空間に同定される。他方、Floer の立場からは、これは $\mathrm{Hom}(T_x^*M, L)$ である。

5　高次元化、一般化

上で述べた話は、高次元でも一般化があると期待される。高次元の場合には、正則円盤は族で現れると期待されるので、スペクトルネットワークはやはり余次元 1 の対象として現れる。WKB 側でも、同様である。層量子化を通じて、二つの話が繋がるというのも同様に期待できる。

次に、一般の正則シンプレテクティック多様体でも、ある程度の話はそのまま行うことができると期待する。X を正則シンプレクティック多様体とする。コンパクトラグランジュブレーン L を一つ固定する。L の Weinstein 近傍に入るコンパクトラグランジュ部分多様体 L' が L の部分被覆になっていると仮定する。$\lambda|_{L'}$ の局所的な積分を f とかく。L と L' の変形量子化をそれぞれ、$\mathcal{O}, \mathcal{M}$ とする。$\mathrm{Hom}(\mathcal{M}, \mathcal{O})$ の元で、$e^{f/\hbar} \sum f_i \hbar^i$ と書かれる漸近挙動を持つ形式的元を、WKB 解と呼ぶ。この場合にも完全 WKB 解析の理論が展開可能であると予想される。完全 WKB 解析から出力されるのは、L' のブレーン構造とバウンディングコチェインである。

層量子化の話は、Weinstein 多様体までは一般化があるが（執筆中）、一般のシンプレクティック多様体上で存在するかは未だ不明である。

最後に、ブレーン量子化との関係を述べておく。ブレーン量子化の考え方では、変形量子化はカノニカルコイソトロピックブレーン $\mathcal{D}$ というブレーンのエンド環であると解釈される。$\mathcal{O}$ というレファレンスブレーンを選ぶと、$\mathrm{Hom}(\mathcal{D}, \mathcal{O})$ は（物理的な）Hilbert 空間を表す。$\mathcal{M}$ を $\mathcal{D}$ の商などで表すと、$\mathrm{Hom}(\mathcal{M}, \mathcal{O})$ は $\mathrm{Hom}(\mathcal{D}, \mathcal{O})$ の部分空間と思える。よって、（完全）WKB 解は $\mathrm{Hom}(\mathcal{D}, \mathcal{O})$ の元、つまり Hilbert 空間の元、つまり物理的状態であると解釈される。これは、Lagrangian が量子状態の半古典近似である、という半古典解析の哲学の実現で、よく知られたことがだが、ここではそれが Riemann–Hilbert 対応の解関手と見える。

Acknowledgment

本集会での講演機会を与えていただいた世話人の方々に感謝する。この研究は、RIMS 国際共同利用・共同研究拠点によって援助されている。また、JSPS 科研費 22K13912 によっても援助されている。

References

[Kuw20] Tatsuki Kuwagaki. Sheaf quantization from exact wkb analysis, 2020.