Embedding of C^n functions into the space of hyperfunctions and Čech-Dolbeault cohomology

By

北海道大学大学院理学院数学専攻　西田竜葵
Tatsuki NISHIDA*
Department of Mathematics, Graduate School of Science,
Hokkaido University

§1. 導入

佐藤超関数 (hyperfunction) は, 微分方程式の解空間として重要な対象であり, 正則関数の層を係数とする局所コホモロジーによって定義される. このコホモロジーの具体的な表示には, Čech コホモロジーが利用される. 本多-伊澤-諏訪 [1] は, 軟層分解での相対コホモロジーを定義した. この表示は Čech-Dolbeault コホモロジーと呼ばれ, これまでの表示とは異なった手法の実現が期待されている.

M を n 次元実解析的多様体とし, X を M の複素化としよう. 佐藤超関数の表示について, よく知られるように, Čech の表示では $n+1$ 個以上の正則関数の組を考える必要がある. 一方, Čech-Dolbeault 表示では C^∞ 級微分形式の組 $\mu = (\mu_1, \mu_{01})$ が代表元となる. ここで, μ_1 は X 上の $(0,n)$-形式, μ_{01} は $X \setminus M$ 上の $(0, n-1)$-形式である. このように, 常に 2 つの単純な被覆の上で定義される微分形式が代表元で, さらには, 軟層の性質として, 単位の分解や代表元の cutoff など, 解析的に有用な操作が利用できる.

本稿では, この Čech-Dolbeault 表示において, C^k 級関数の代表元を考える (ただし, $k = n, n+1, \cdots$ または $k = \infty$). 本多-伊澤-諏訪 [1] では, Čech-Dolbeault 表示での Schwartz 超関数 (distribution) の埋め込みが定義されている. これによって通常の関数を埋め込む事ができる. この埋め込みの逆写像になるような C^k 級関数への対応を構成する.

Čech 表示では, 通常の関数の代表元に対して, 実軸への極限を取れば元の関数を得ることができる. しかし, Čech-Dolbeault 表示では代表元の実軸への極限 $\lim_{r\to 0} \mu_{01}(x + \sqrt{-1}\, r\omega)$ は一般には収束しない. このため, 曲面 Radon 核を利用して Čech 表示と対応づけることで, 積分により局所的な逆写像を構成する (定理 4.1). これを利用して, 代表元に収束条件を仮定すれば, 実軸への極限で逆写像が記述できる (定理 4.5). C^k 級関数の代表元のうち, この収束条件を満たすものが常に存在することについては補題 4.8 で示す.

2010 Mathematics Subject Classification(s): Primary 32A45; Secondary 32C35, 32C36.
Key Words: hyperfunction, Čech-Dolbeault cohomology
Supported by JST SPRING, Grant Number JPMJSP2119.
*Department of Mathematics, Hokkaido University, Hokkaido 060-0810, Japan.

§2. 準備

§2.1. 記号

記号 2.1. X を位相空間としたとき, X の開集合の族を $\mathrm{Op}(X)$ と書く. また, $K \subset X$ の内部を $\mathrm{Int}(K)$ と書く.

記号 2.2. X を位相空間とする. X の部分集合 K と X 上の層 $\mathscr{F}$ に対し, K の近傍上の切断の全体の集合 $\mathscr{F}[K]$ を $\mathscr{F}[K] = \varinjlim_{K \subset U} \mathscr{F}(U)$ で定める.

注意. 本稿では, 層と言うとアーベル群の層を意味するものとする.

以降, この節では, M を n 次元実解析的多様体とし, X を M の複素化とする.

注意. 本稿では, 多様体として, 第二可算公理を満たすもののみを考える.

記号 2.3. $U \in \mathrm{Op}(M)$ に対し, U の複素近傍 $V \in \mathrm{Op}(X)$ とは, V 上で U が閉集合であることを言う.

記号 2.4. 層 $\mathbb{Z}_X$ (resp. $\mathbb{C}_X$) を $\mathbb{Z}$ (resp. $\mathbb{C}$) の値をとる X 上の局所定数関数とする.

記号 2.5. M 上の実解析関数の層を $\mathscr{A}_M$, X 上の正則関数の層を $\mathscr{O}_X$ と書く.

定義 2.6. M 上の Schwartz 超関数の層を $\mathscr{D}b$ と書く. また, K を M のコンパクト集合として, $\mathscr{D}b_K$ で台が K に含まれる M 上の Schwartz 超関数とする.

記号 2.7. 整数 p, q を $0 \le p \le n$, $0 \le q \le n$ とする. $\mathscr{A}_M^{(p)}$ を M 上の実解析的 p-形式, $\mathscr{O}_X^{(p)}$ を X 上の正則 p-形式, $\mathscr{E}_X^{(p,q)}$ を X 上の C^∞ 級 (p, q)-形式とする.
また, 記号の都合上, $p, q \in \mathbb{Z}$ が 0 から n の範囲に含まれない場合は, $\mathscr{A}_M^{(p)}$ や $\mathscr{O}_X^{(p)}$, $\mathscr{E}_X^{(p,q)}$ はすべて 0 と定める.
ここで, $\mathscr{A}_M^{(0)} = \mathscr{A}_M$, $\mathscr{O}_X^{(0)} = \mathscr{O}_X$ である. 考える空間が明らかな場合は, M や X を省略して $\mathscr{A}$ や $\mathscr{O}$ などと書く.

§2.2. 佐藤超関数と超形式

定義 2.8. $p \in \mathbb{Z}$ とし, $U \in \mathrm{Op}(M)$ 上の p-超形式 (佐藤超関数係数の p-形式) を,

$$\mathscr{B}^{(p)}(U) = H_U^n(V; \mathscr{O}^{(p)}) \otimes_{\mathbb{Z}_M(U)} or_{M/X}(U)$$

と定める. ただし, $V \in \mathrm{Op}(X)$ は U の複素近傍で, $or_{M/X}(U) = H_U^n(V; \mathbb{Z}_X)$ である.

定義 2.9 (佐藤超関数)**.** $U \in \mathrm{Op}(M)$ 上の佐藤超関数を $\mathscr{B}(U) = \mathscr{B}^{(0)}(U)$ と定める.

同様に, 台がある閉集合に含まれる超形式と超関数を次のように定める.

定義 2.10. $p \in \mathbb{Z}$, $U \in \mathrm{Op}(M)$ として, K を U 内の閉集合とする. U 上の K に台を持つ p-超形式を,

$$\mathscr{B}_K^{(p)}(U) = H_K^n(V; \mathscr{O}^{(p)}) \otimes_{\mathbb{Z}_M(U)} or_{M/X}(U)$$

と定める. また, $\mathscr{B}_K(U) = \mathscr{B}_K^{(0)}(U)$ と定める.

注意. $\mathscr{B}^{(p)}$, $\mathscr{B}_K^{(p)}$ は層となる. より詳細には KKK[2] や金子 [3] が参考になる.

§3. 佐藤超関数の具体的な表示

§3.1. Čech-Dolbeault コホモロジーと佐藤超関数

M は n 次元実解析的多様体, X は M の複素化とする. $U \in \mathrm{Op}(M)$ とその複素近傍 $V \in \mathrm{Op}(X)$ を取る. また, 簡単のため, M は向き付け可能とする.

定義 3.1. 複体 $(\mathscr{E}^{(p,\bullet)}(V, V \setminus U), \bar{\vartheta})$ を, 任意の $p, q \in \mathbb{Z}$ に対して,

$$\mathscr{E}^{(p,q)}(V, V \setminus U) = \mathscr{E}^{(p,q)}(V) \oplus \mathscr{E}^{(p,q-1)}(V \setminus U),$$

$$\begin{array}{cccc} \bar{\vartheta} & : & \mathscr{E}^{(p,q)}(V, V \setminus U) & \longrightarrow & \mathscr{E}^{(p,q+1)}(V, V \setminus U) \\ & & \cup & & \cup \\ & & (\mu_1, \mu_{01}) & \longmapsto & (\bar{\partial}\mu_1, \mu_1 - \bar{\partial}\mu_{01}) \end{array}$$

として定める. この複体の q 次コホモロジー群を $H_{\bar{\vartheta}}^{p,q}(V, V \setminus U)$ と書き, Čech-Dolbeault コホモロジーと呼ぶ.

ここで, U が V の中で閉集合であることが, 上のような定義ができるために重要であった. つまり, より一般に, K が V の閉集合であれば, 上と同様の定義により, 複体 $(\mathscr{E}^{(p,\bullet)}(V, V \setminus K), \bar{\vartheta})$ およびコホモロジー群 $H_{\bar{\vartheta}}^{p,q}(V, V \setminus K)$ を定めることができる.

定理 3.2 (相対 Dolbeault の定理)**.** 任意の $p, q \in \mathbb{Z}$ に対して, 次の同型が成り立つ.

$$H_{\bar{\vartheta}}^{p,q}(V, V \setminus U) \simeq H_U^q(V; \mathscr{O}^{(p)}).$$

この定理の証明は省略する. 本多-伊澤-諏訪 [1], Suwa[4] が参考になる.

系 3.3. $p \in \mathbb{Z}$, $U \in \mathrm{Op}(M)$ とし, K を U 内の閉集合とする. このとき, 次が成り立つ.

$$\mathscr{B}^{(p)}(U) \simeq H_{\bar{\vartheta}}^{p,n}(V, V \setminus U) \otimes_{\mathbb{Z}_M(U)} or_{M/X}(U),$$
$$\mathscr{B}_K^{(p)}(U) \simeq H_{\bar{\vartheta}}^{p,n}(V, V \setminus K) \otimes_{\mathbb{Z}_M(U)} or_{M/X}(U).$$

注意. U 上の佐藤超関数 $u \in \mathscr{B}(U)$ は, $\mu = (\mu_1, \mu_{01}) \in \mathrm{Ker}\bar{\vartheta}$ で代表される. コサイクル条件 $\bar{\vartheta}\mu = 0$ は $\mu_1 = \bar{\partial}\mu_{01}$ と同値である.

定義 3.4 (積分)**.** U を M の開集合, K を U 内のコンパクト集合とする. すべての向き付け層の生成元を固定して考える. このとき, 積分

$$\int_U : \mathscr{B}_K(U) \otimes_{\mathbb{Z}_M(U)} or_M(U) \to \mathbb{C}$$

を次のように定義する: 任意の $u \in \mathscr{B}_K(U)$ に対し, その代表元を $(\mu_1, \mu_{01}) \in \mathscr{E}^{(0,n)}(V) \oplus \mathscr{E}^{(0,n-1)}(V \setminus K)$ とする. D が K を含む V 内の開集合で C^∞ 境界 ∂D を持つとする. このとき,

$$\int_U u\, dx = \int_D \mu_1 \wedge dz - \int_{\partial D} \mu_{01} \wedge dz$$

と定める. ただし, $dz = dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$ である.

注意. ここで, 向き付け層の生成元を固定することは, 正の向きを決めることに対応している. 本稿では, X の正の局所座標系を $(y_1, \cdots, y_n, x_1, \cdots, x_n)$ としている. 通常の向き $(x_1, y_1, \cdots, \cdots, x_n, y_n)$ とは異なることに注意しておく. また, 境界付き多様体 $\overline{D}$ に対し, 境界 ∂D の向きは次のように定める: 任意の $p \in \partial D$ と $\overline{D}$ 内の p を含む局所座標系 U に対して, 局所座標 $(p_1, \cdots, p_{2n})$ を $\overline{D} \cap U = \{p \in U \mid p_1 \leq 0\}$ となるように取る. このとき, $\overline{D}$ の座標 $(p_1, \cdots, p_{2n})$ が正なら ∂D の座標 $(p_2, \cdots, p_{2n})$ も正となるように ∂D の向きを定める.

定理 3.5 ([1, Corollary 6.12])**.** K を U のコンパクト集合を取る. このとき, $\mathscr{B}_K^{(p)}(U)$ と $\mathscr{A}^{(n-p)}[K]$ はそれぞれ FS, DFS 空間の構造を持ち,

$$\mathscr{B}_K^{(p)}(U) \times (\mathscr{A}^{(n-p)}[K] \otimes or_M(U)) \longrightarrow H^{n,n}_{\bar{\vartheta}}(V, V \setminus K) \otimes i^{-1} or_X(U) \xrightarrow{\int} \mathbb{C}$$

は非退化である. ただし, $i : M \hookrightarrow X$ は自然な埋め込みである. つまり, $\mathscr{B}_K^{(p)}(U) \simeq (\mathscr{A}^{(n-p)}[K] \otimes or_M(U))'$ となる. $(\bullet)'$ は位相ベクトル空間の強双対を意味する.

最後に, 実解析関数の埋め込みも定義しよう. まず, 1 の代表元について考察する. M を向き付け可能と仮定しているので, 生成元 $e_{M/X} \in or_{M/X}(U)$ が取れる. これに対し, $\mathbb{Z}$ に値をとる局所定数関数を正則関数とみなす射 $\mathbb{Z}_X \to \mathscr{O}_X$ から誘導される $or_{M/X}(U) = H^n_U(V; \mathbb{Z}_X) \to H^n_U(V; \mathscr{O}_X)$ を考え, $e_{M/X}$ に対応する $H^n_M(X; \mathscr{O}_X)$ の元を取る. この元の Čech-Dolbeault 表示での代表元を ν と書こう. すると, 定数関数 $1 \in \mathscr{B}(U)$ は $[\nu] \otimes e_{M/X}$ と定まる. この代表元 ν を使って, 実解析関数の埋め込み定めることができる.

定義 3.6 (Čech-Dolbeault 表示における $\mathscr{A}$ の埋め込み)**.** アーベル群の準同型 $\iota_{\mathscr{A}(U)}$ を次のように定める.

$$\iota_{\mathscr{A}(U)} : \mathscr{A}(U) \ni f \mapsto [\tilde{f}\nu] \otimes e_{M/X} \in \mathscr{B}(U).$$

ただし, $\tilde{f}$ は $\tilde{f}|_U = f$ となる V 上の正則関数である. このように定めた $\iota_{\mathscr{A}} = \{\iota_{\mathscr{A}(U)}\}_{U \in \mathrm{Op}(M)}$ は層の準同型となる.

注意. 向き付け層の生成元と対応した代表元を持ってくることが重要である.

§3.2. Čech コホモロジーと Čech-Dolbeault コホモロジー

この 3.2 節では, 金子 [3] 及び KKK[2] を参考に Čech の理論のざっくりとした説明と Čech-Dolbeault コホモロジーとの関係について述べる.

簡単のため, この節を通して, $M = \mathbb{R}^n$ 及び $X = \mathbb{C}^n$ と定める. また, $U \in \mathrm{Op}(M)$ とその複素近傍を $V = U + \sqrt{-1}\mathbb{R}^n$ として説明する.

まず, $v_0, \cdots, v_{n-1}$ を $\mathbb{R}^n$ のベクトル空間としての基底として取ってきて, さらに, $v_n = -(v_0 + \cdots + v_{n-1})$ と定める. 任意の $k = 0, 1, \cdots, n$ に対し, 半平面 $H_k = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, v_k \rangle > 0\}$ を取り, $\mathbb{C}^n$ 内の開集合 $V_k = U + \sqrt{-1}\,H_k$ 及び $V_{n+1} = V$ を定める. 以降, 添字の集合を $\Lambda' = \{0, 1, \cdots, n\}$, $\Lambda = \{0, 1, \cdots, n+1\}$ として書く. この設定のもと, $V \setminus U$ の被覆 $\mathcal{V}' = \{V_k\}_{k \in \Lambda'}$ と, V の被覆 $\mathcal{V} = \{V_k\}_{k \in \Lambda} = \mathcal{V}' \cup \{V\}$ を取り, 次のように Cech コホモロジーを定める.

定義 3.7 (Čech コホモロジー)**.** X 上の層 $\mathscr{F}$ に対して, $C^k(\mathcal{V}, \mathcal{V}'; \mathscr{F})$ を

$$C^k(\mathcal{V}, \mathcal{V}'; \mathscr{F}) = \left\{ \{F_{\lambda_0, \cdots, \lambda_k}\}_{(\lambda_0, \cdots, \lambda_k) \in \Lambda^{k+1}} \;\middle|\; \begin{array}{l} F_{\lambda_0, \cdots, \lambda_k} \in \mathscr{F}(V_{\lambda_0} \cap \cdots \cap V_{\lambda_k}), \\ F_{\lambda_0, \cdots, \lambda_k} = -F_{\lambda_0, \cdots, \lambda_{j+1}, \lambda_j, \cdots, \lambda_k}, \\ (\lambda_0, \cdots, \lambda_k) \in (\Lambda')^{k+1} \Rightarrow F_{\lambda_0, \cdots, \lambda_k} = 0 \end{array} \right\}$$

と定義して, 準同型 $\delta : C^k(\mathcal{V}, \mathcal{V}'; \mathscr{F}) \to C^{k+1}(\mathcal{V}, \mathcal{V}'; \mathscr{F})$ を次のように定める.

$$\delta\left(\{F_{\lambda_0, \cdots, \lambda_k}\}_{(\lambda_0, \cdots, \lambda_k) \in \Lambda^{k+1}}\right) = \left\{ \sum_{j=0}^{k} (-1)^j F_{\lambda_0, \cdots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \cdots, \lambda_k} \right\}_{(\lambda_0, \cdots, \lambda_k) \in \Lambda^{k+1}}.$$

$(C^k(\mathcal{V}, \mathcal{V}'; \mathscr{F}), \delta)$ は複体となり, k 次コホモロジー群を $H^k(\mathcal{V}, \mathcal{V}'; \mathscr{F})$ と書く.

定理 3.8 (Leray)**.** 次の同型が成り立つ.

$$H^k(\mathcal{V}, \mathcal{V}'; \mathscr{O}) \simeq H^k_U(V; \mathscr{O}).$$

証明は, 金子 [3] の定理 5.5.6, または, KKK[2] の定理 1.2.1 を参照せよ. この定理 3.8 は U 上の佐藤超関数は正則関数の形式的な直和として, 次のように書けることを意味する:

$$\sum_{0 \le j \le n} F_{\widehat{j}} \in \bigoplus_{0 \le j \le n} \mathscr{O}(V_{\widehat{j}}). \tag{3.1}$$

ただし, $V_{\widehat{j}} = V_0 \cap \cdots \cap V_{j-1} \cap V_{j+1} \cap \cdots \cap V_{n+1}$ 及び $F_{\widehat{j}} = F_{0, \cdots, j-1, j+1, \cdots, n+1}$ である. この被覆の共通部分及びそこで定義される関数の記法は今後も用いる.

ここで, 実解析関数の佐藤超関数への埋め込みに関して, Čech 表示での定義を与える.

定義 3.9 (Čech 表示における $\mathscr{A}$ の埋め込み)**.** 任意の $f \in \mathscr{A}(U)$ と $k = 0, 1, \cdots, n$ に対して,

$$\iota_{\mathscr{A}(U)}(f) = \tilde{f}|_{V_{\widehat{k}}} \otimes e_k$$

と定める．ただし, $\tilde{f}$ は $\tilde{f}|_U = f$ となる V 上の正則関数であり, e_k は, $H^n_U(V; \mathbb{Z}_X) \simeq H^n(\mathcal{V}, \mathcal{V}'; \mathbb{Z}_X)$ のように $\mathscr{O}$ と同様の被覆で Čech 表示をしたときに,

$$0 \oplus \cdots \oplus 0 \oplus \overset{\overset{k}{\vee}}{1} \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0 \in \bigoplus_{0 \leq j \leq n} \mathbb{Z}_X(V_{\widehat{j}})$$

で代表される元である．このように定めた $\iota_{\mathscr{A}} = \{\iota_{\mathscr{A}(U)}\}_{U \in \mathrm{Op}(M)}$ は層の準同型となり, k の選び方に依らず定まる.

最後に, Čech-Dolbeault 表示における境界値写像を定義し, Čech 表示との対応関係について述べておく．X の開集合 Ω が次の 2 つの条件を持っていれば, Ω 上の正則関数を Čech-Dolbeault 表示における佐藤超関数とみなすことができる.

(B_1) $\overline{\Omega} \supset M$.

(B_2) 包含写像 $(V \setminus \Omega) \setminus M \hookrightarrow V \setminus \Omega$ はホモトピー同値を与える.

ここで, $M = \mathbb{R}^n$ は向き付け可能なので, 生成元 $e_{M/X} \in or_{M/X}(U)$ を取っておく.

命題 3.10 ([1, Corollary 7.10])**.** $[\nu] \otimes e_{M/X} \in \mathscr{B}(U)$ が定数関数 1 となるような佐藤超関数の Čech-Dolbeault 表示における代表元 $\nu = (\nu_1, \nu_{01}) \in \mathscr{E}^{(0,n)}(V, V \setminus U)$ を, $\mathrm{Supp}_V(\nu_1) \subset \Omega$ 及び $\mathrm{Supp}_{V \setminus U}(\nu_{01}) \subset \Omega$ を満たすように取れる.

この命題は, 定義 3.6 で定めた, 1 の代表元の台を cutoff できることを述べている．非常に重要な命題であるが, 説明は省略する.

定義 3.11 (境界値写像)**.** ν を命題 3.10 の条件をみたすように取る．このとき,

$$b_\Omega : \mathscr{O}(\Omega) \to \mathscr{B}(U) = H^{0,n}_{\bar{\vartheta}}(V, V \setminus U) \otimes_{\mathbb{Z}_M(M)} or_{M/X}(M)$$

を $b_\Omega(f) = [f\nu] \otimes e_{M/X}$ で定める.

ここで, U, V, $V_{\widehat{k}}$ は, この 3.2 節の初めの設定を引き続き用いることを思い出しておく.

例 3.12 ([1, 例 7.14])**.** 任意の $k = 0, 1, 2, \cdots, n$ に対して, $\varphi_k \in C^\infty(V \setminus U)$ を次を満たすように取る.

(1) 任意の $k = 0, \cdots, n$ に対して, $\mathrm{Supp}_{V \setminus U}(\varphi_k) \subset V_{\widehat{k}}$.

(2) $V \setminus U$ 上で $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \varphi_k = 1$ である.

この $\{\varphi_k\}_{k=0,\cdots,n}$ を利用して, 次のような微分形式を構成する．任意の $j = 0, 1, 2, \cdots, n$ に対して, $\chi_{V_{\widehat{j}}}(z)$ は, $V_{\widehat{j}}$ の定義関数, つまり, $V_{\widehat{j}}$ 上で 1, それ以外では 0 となるような関数として,

$$\nu_{j,01} = (-1)^n (n-1)!\, \chi_{V_{\widehat{j}}} \bar{\partial}\varphi_0 \wedge \cdots \wedge \bar{\partial}\varphi_{j-1} \wedge \bar{\partial}\varphi_{j+1} \wedge \cdots \wedge \bar{\partial}\varphi_{n-1}$$

と定める. $\nu_j = (0, \nu_{j,01})$ は定数関数 1 の代表元となり, $\mathrm{Supp}_{V\setminus U}(\nu_{01}) \subset V_{\widehat{k}}$ を満たす.

定義 3.13. U 上の佐藤超関数の Čech 表示と Čech-Dolbeault 表示の間の準同型 b_U : $H^n(\mathcal{V}, \mathcal{V}'; \mathscr{O}) \otimes or_{M/X}(U) \to H^n_{\bar{\vartheta}}(V, V \setminus U) \otimes or_{M/X}(U)$ を次のように定める.

$$b_U([\sum_{j=0}^{n} F_{\widehat{j}}\,] \otimes e_{M/X}) = \sum_{j=0}^{n} b_{V_{\widehat{j}}}(F_{\widehat{j}}).$$

定理 3.14. b_U は同型を与える.

この定理 3.14 の証明は, 例 3.12 の φ_k を用いながら, 相対 Dolbeault の定理 (定理 3.2) の証明と同様の操作を図式を辿りながら行う必要がある. 本多-伊澤-諏訪 [1] の Lemma A.5 や Suwa[4] が参考になる. 少々長くなるので本稿では省略する.

§ 3.3. 曲面 Radon 核

この 3.3 節の内容については, 金子 [3] 及び AKY[5] が参考になる. 3.2 節に引き続き, $M = \mathbb{R}^n$, $X = \mathbb{C}^n$ とし, また, $U \in \mathrm{Op}(M)$ に対する複素近傍を $V = U + \sqrt{-1}\mathbb{R}^n$ として説明する. 被覆 $\mathcal{V}$ 及び $\mathcal{V}'$ に加えて, 便利な記法 $V_{\widehat{j}}$, $F_{\widehat{j}}$ も引き続き用いる. さらに, ここで, 任意の $0 \le j \le n$ に対して, $\Gamma_j = H_0 \cap \cdots \cap H_{j-1} \cap H_{j+1} \cap \cdots \cap H_n$ と定める. ただし, H_j は 3.2 節で定めた半平面である. $V_{\widehat{j}} = U + \sqrt{-1}\Gamma_j$ であることに注意しておく.

定義 3.15 ([3, 定義 3.1.6])**.** 原点を頂点とする錐 $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ に対して, 双対錐 Γ° を $\Gamma^\circ = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid \langle \xi, y \rangle \ge 0\ (\forall y \in \Gamma)\}$ と定める.

以降, 錐というと, 原点を頂点に持つ錐のこととする.

定義 3.16. 錐 $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ に対して, 錐 $\Gamma' \subset \mathbb{R}^n$ が固有部分錐であるとは, $\overline{\Gamma}' \cap \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y| = 1\} \subset \mathrm{Int}(\Gamma)$ であることをいい, $\Gamma' \subset\subset \Gamma$ と書く.

定義 3.17 (無限小楔, [3, 定義 2.2.9])**.** $U \subset \mathbb{R}^n$ を開集合, $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ を開錐とする. 開集合 $V \subset \mathbb{C}^n$ は次の 2 条件を満たす時, $U + \sqrt{-1}\,\Gamma\, 0$ 型の無限小楔であるという.

(a) $V \subset U + \sqrt{-1}\,\Gamma$ となる.

(b) 任意の固有部分錐 $\Gamma' \subset\subset \Gamma$ と任意のコンパクト集合 $K \subset U$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, $K + \sqrt{-1}\ (\Gamma' \cap \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y| < \delta\}) \subset V$ となる.

U を無限小楔の刃といい, Γ を無限小楔の開きという. $F(z) \in \mathscr{O}(U + \sqrt{-1}\,\Gamma\, 0)$ と書くと, $F(z)$ が $\Omega + \sqrt{-1}\,\Gamma\, 0$ 型のある領域での正則関数であることを意味する.

以降, $z, \zeta \in \mathbb{C}^n$ に対し $z\zeta = z_1\zeta_1 + \cdots + z_n\zeta_n$ 及び $\zeta^2 = \zeta_1^2 + \cdots + \zeta_n^2$ と略記する.

定義 3.18. $(z,\zeta)\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n$ に対して, 曲面 Radon 核 $W(z,\zeta)$ を次のように定める.

$$W(z,\zeta)=\frac{(n-1)!}{(-2\pi\sqrt{-1})^n}\frac{(1-\sqrt{-1}z\zeta/\sqrt{\zeta^2})^{n-1}-(1-\sqrt{-1}z\zeta/\sqrt{\zeta^2})^{n-2}(z^2-(z\zeta)^2/\zeta^2)}{\{z\zeta+\sqrt{-1}(z^2\sqrt{\zeta^2}-(z\zeta)^2/\sqrt{\zeta^2})\}^n}.$$

補題 3.19 ([3, 補題 2.3.4])**.** $z=x+\sqrt{-1}y$, $\zeta=\xi+\sqrt{-1}\eta$ と書く. $\Gamma\subset\mathbb{R}^n$ を任意の開錐とする. $\xi\in\mathrm{Int}(\Gamma^\circ)$ であれば, $2n$ 次元の開凸錐 $\Delta\subset\mathbb{R}^n_y\times\mathbb{R}^n_\eta$ であって, $\Delta\cap\{\eta=0\}\supset\Gamma$ を満たすものが存在し, $W(z,\zeta)\in\mathscr{O}\left(\mathbb{R}^n\times\mathrm{Int}(\Gamma^\circ)+\sqrt{-1}\Delta 0\right)$ となる. さらに, $W(z,\zeta)$ は実開集合 $(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})\times\mathrm{Int}(\Gamma^\circ)$ の近傍まで解析接続できる. 特に, $\zeta=\xi\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ を固定すると, $W(z,\zeta)$ は z の関数として半空間 $\{y\in\mathbb{R}^n\mid y\xi>0\}$ の開きを持つ無限小楔

$$\mathbb{R}^n+\sqrt{-1}\,\{y\in\mathbb{R}^n\mid y\xi>y^2|\xi|-(y\xi)^2/|\xi|\}$$

で正則であり, さらに, $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ の複素近傍

$$\left\{x+\sqrt{-1}\,y\in\mathbb{C}^n\;\middle|\;|y\xi|+(y^2|\xi|-(y\xi)^2/|\xi|)<\frac{1}{4}\left(|x\xi|+2(x^2|\xi|-(x\xi)/|\xi|)\right)\right\}$$

まで解析接続できる.

補題 3.20 ([3, 補題 2.3.5])**.** $f(x)$ は $\mathbb{R}^n$ 上の C^n 級関数で, 台がコンパクト集合 $K\subset\mathbb{R}^n$ に含まれるとし,

$$F(z,\zeta)=\int_{\mathbb{R}^n}f(w)W(z-w,\zeta)\,dw$$

とおく. $F(z,\zeta)$ は補題 3.19 における開き Δ の無限小楔で正則で, $(\mathbb{R}^n\setminus K)\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ の近傍に解析接続される. また, $F(z,\zeta)$ は $\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ まで連続に延び, この延長された $F(x,\xi)$ について,

$$\int_{S^{n-1}}F(x,\xi)\,d\xi=f(x)$$

が成り立つ.

補題 3.21 ([3, 系 2.3.6])**.** $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ の近傍において,

$$\int_{S^{n-1}}W(z,\xi)\,d\xi=0$$

が成り立つ. この積分は z について広義一様収束する.

定義 3.22 (Čech 表示における $\mathscr{D}b_K$ の埋め込み)**.** K を U 内のコンパクト集合とする. 任意の $u\in\mathscr{D}b_K(U)$ に対して,

$$F_{\hat{j}}(z)=\langle u(w),W(z-w,\Gamma_j^\circ)\,dw\rangle\ (j=0,1,\cdots,n)\,,$$

として, $\iota_{\mathscr{D}b_K(U)}:\mathscr{D}b_K(U)\to\mathscr{B}_K(U)$ を $u\mapsto\sum_j F_{\hat{j}}$ で定める. このとき, $\mathrm{Supp}(\iota(u))\subset\mathrm{Supp}(u)$ が成立する.

定義 3.23 (Čech 表示における $\mathscr{D}b$ の埋め込み)**.** 任意の $u \in \mathscr{D}b(U)$ に対して, u を局所有限和で $u = \sum_\lambda u_\lambda$ と分解する．ここで, K_λ は U 内でコンパクトで, $u_\lambda \in \mathscr{D}b_{K_\lambda}(U)$ である．この分解により, $\iota_{\mathscr{D}b(U)}(u) = \sum_\lambda \iota_{\mathscr{D}b_{K_\lambda}(U_\lambda)}(u_\lambda)$ として u を佐藤超関数の Čech 表示の代表元に対応付ける．すると, $\iota_{\mathscr{D}b(U)}$ は well-defined であり, $\iota_{\mathscr{D}b} = \{\iota_{\mathscr{D}b(U)}\}_{U \in \mathrm{Op}(X)}$ は層の準同型となる.

命題 3.24 ([3, 定理 3.5.5])**.** Čech 表示における埋め込み $\iota_{\mathscr{A}} : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ 及び $\iota_{\mathscr{D}b} : \mathscr{D}b \to \mathscr{B}$ は, 通常の埋め込み $\mathscr{A} \hookrightarrow \mathscr{D}b$ と両立する.

§3.4. Čech-Dolbeault コホモロジーによる Schwartz 超関数の埋め込み

本多-伊澤-諏訪 [1] では, Čech-Dolbeault コホモロジーの枠組みにおいて, Schwartz 超関数の埋め込みを定義している．局所座標による定義は次のようになる.

定義 3.25 ([1, Theorem 8.1])**.** $\tau = (\tau_1, \tau_{01}) \in \mathscr{E}^{(0,n)}(V, V \setminus U)$ を Čech-Dolbeault 表示での Dirac のデルタ関数の代表元とする．このとき, 任意の $u \in \mathscr{D}b(U)$ に対して,

$$\iota_{\mathscr{D}b(U)}(u) = \left(\int_U (\theta\tau_1 + \bar{\partial}_z \theta \wedge \tau_{01})(z - t, t) u(t) dt, \int_U (\theta\tau_{01})(z - t, t) u(t) dt \right)$$

と定める．ここで, $\theta(z, t) \in C^\infty(X \times U)$ は, 次の 2 条件を満たすように定める.

(1) $\theta(z, t)$ は $\{0\} \times U$ の近傍上で恒等的に 1.

(2) $\mathrm{Supp}(\theta) \subset T$ が成り立つ.

ただし, $T \in \mathrm{Op}(X \times U)$ を

$$\{0\} \times U \subset T \subset \left\{ (z, t) \in X \times U \;\middle|\; |z| < 3^{-1} \min\{1\,,\, \mathrm{dist}(t, M \setminus U)\} \right\}$$

を満たすように取る.

命題 3.26 ([1, Lemma 8.19])**.** $\iota_{\mathscr{D}b} = \{\iota_{\mathscr{D}b(U)}\}_{U \in \mathrm{Op}(M)}$ は層の射をなす.

この命題を示すには, 拡張された空間 $X \times M$ 上の層について考える必要がある．詳細については, 本多-伊澤-諏訪 [1] の Section 8 で解説されている.

§4. 微分可能関数の埋め込みとその逆写像

この節では, M を n 次元実解析的多様体, X を M の複素化とする．$U \in \mathrm{Op}(M)$ 及び $V \in \mathrm{Op}(X)$ を V が U の複素近傍であるように取る．また, 3.4 節で定めた Čech-Dolbeault 表示での Schwartz 超関数の埋め込み $\iota_{\mathscr{D}b}$ 及び $\iota_{\mathscr{D}b(U)}$ を ι と略記する.

定理 4.1. K を U のコンパクト集合とし, $f(x) \in C^n(U)$ を台が K に含まれるように取る．$\mu = (\mu_1, \mu_{01}) \in \mathscr{E}^{(0,n)}(V, V \setminus K)$ を $\iota(f)$ の代表元として, 次のような関数を考える:

$$F(z, \zeta) = \int_D W(z - w, \zeta)\, \mu_1(w) \wedge dw - \int_{\partial D} W(z - w, \zeta)\, \mu_{01}(w) \wedge dw\,.$$

ただし, W は定義 3.18 で定めた曲面 Radon 核で, D は K を含む V の滑らかな境界を持つ相対コンパクトな開集合であり, $z \notin \overline{D}$ であると仮定する．このとき, F は $\iota(f)$ の代表元 μ 及び積分領域 D の取り方に依らず, 次の条件を満たす:

(1) F は開き Δ を持つ無限小楔内の (z, ζ) について正則関数となる．Δ については, 補題 3.19 を参照せよ.

(2) F は $(U \setminus K) \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ の近傍まで解析接続できる.

(3) F は $U \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ まで連続に延長可能で, 拡張された連続関数 $F(x, \xi)$ は, $f(x) = \displaystyle\int_{S^{n-1}} F(x, \xi)\, d\xi$ を満たす.

証明. まず, F が代表元 μ 及び領域 D に依らないことは, Stokes の定理と Čech-Dolbeault 表示の代表元の取り方から簡単に示せるので, $F(z, \zeta) = \displaystyle\int_U W(z - t, \zeta) f(t) dt$ が成り立つことを示す．$\theta(z, t) \in C^\infty(V \times U)$ を定義 3.25 の条件を満たすように取る．さらに, Dirac のデルタ関数の代表元を Bochner-Martinelli 型 $(0, -(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \beta)$ として取る．ここで β は, 局所座標系を用いると, $\overset{\overset{i}{\vee}}{d\bar{z}} = d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{i-1} \wedge d\bar{z}_{i+1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_n$ として,

$$\beta(z) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{(n-1)!}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \frac{1}{\|z\|^{2n}} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \bar{z}_i \overset{\overset{i}{\vee}}{d\bar{z}}$$

と表示される $(0, n-1)$ 形式である (詳しくは本多-伊澤-諏訪 [1] を参照)．定義 3.25 から, $\iota(f)$ の代表元 μ は,

$$\mu = -(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \left(\int_U f(t) (\bar{\partial}_z \theta(z - t, t) \wedge \beta(z - t)\, dt\, ,\ \int_U f(t) \theta(z - t, t) \beta(z - t)\, dt \right)$$

と書ける．補題 A.2(Bochner-Martinelli の公式) より,

$$\begin{aligned} F(z, \zeta) = \int_U f(t)\, dt \Bigg(& (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \int_{\partial D} W(z - w, \zeta) \theta(w - t, t) \beta(w - t) \wedge dw \\ & -(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \int_D W(z - w, \zeta) \bar{\partial}_w \theta(w - t, t) \wedge \beta(w - t) \wedge dw \Bigg) \\ = \int_U f(t) W(z - t, \zeta) \theta(0, t)\, dt \quad & = \int_U f(t) W(z - t, \zeta)\, dt \end{aligned}$$

と式変形できる．以上より, 補題 3.20 に帰着し, $f(x) = \displaystyle\int_{S^{n-1}} F(x, \xi)\, d\xi$ が示せる． □

ここで, $F(z, \zeta)$ について, 代表元 μ を明示する場合は, $F[\mu](z, \zeta)$ と書くこととする.

補題 4.2. $M = \mathbb{R}^n$, $X = \mathbb{C}^n$, $U \in \mathrm{Op}(M)$ とし, 3.3 節の設定と同様に, Γ_j, $V_{\hat{j}}$ を取る．u を U 上のコンパクト台を持つ佐藤超関数とし, μ を u の Čech-Dolbeault 表示による代表元とする．$F[\mu](z, \Gamma_j^\circ) \in \mathscr{O}(V_{\hat{j}})$ を次のように定める:

$$F[\mu](z, \Gamma_j^\circ) = \int_{\Gamma_j^\circ \cap S^{n-1}} F[\mu](z, \xi)\, d\xi.$$

このとき, $\sum_j F[\mu](z,\Gamma_j^\circ)$ は u の Čech 表示による代表元となり, $\sum_j F[\bullet](z,\Gamma_j^\circ)$ は $b_U|_{\mathscr{B}_K}(\bullet)$ の逆写像となる．ただし, 写像 b_U は定義 3.13 で定めた写像である．

証明の概略. K を U 内のコンパクト集合とし, $u\in\mathscr{B}_K(U)$ を取る．$\sum_j F_{\widehat{j}}$ は佐藤超関数 u の Čech 表示における代表元とする．$\mathscr{B}_K(U)\simeq(\mathscr{A}^{(n)}[K]\otimes or_U(U))'$ が成り立つので, 任意の $\psi\in\mathscr{A}[K]$ に対して次を示せば良い:

(1) $\langle\mu,\psi dx\rangle=\langle\sum_j F[\mu](z,\Gamma_j^\circ),\psi dx\rangle$.　(2) $\langle\sum_j b_{V_{\widehat{j}}}(F_{\widehat{j}}),\psi dx\rangle=\langle\sum_j F_{\widehat{j}},\psi dx\rangle$.

ただし, 上の記号 $\langle\bullet,\bullet\rangle$ は, 左辺と右辺で意味が異なっている．左辺が Čech-Dolbeault 表示でのペアリングで, 右辺が Čech 表示でのペアリングである．

残りの証明は, Čech 表示の積分と n 枚被覆の Čech-Dolbeault 表示の積分の対応を見る必要がある．長くなるので省略する．Čech 表示の積分は金子 [3] の 3.4 節, n 枚被覆の Čech-Dolbeault 表示における積分は, Suwa[6] の Subsection 6.2 で説明されている．□

以降, $k=n,n+1,\cdots$ または ∞ とする．$\iota|_{C^k}$ の逆写像について, 極限による簡明な表示を得るため代表元の収束を定義する．

定義 4.3. $\mu_{01}\in\mathscr{E}^{(0,n-1)}(V\setminus U)$ が $\mathscr{E}^{k\text{-qw},(0,n-1)}(V\setminus U)$ に属するとは, 次の条件を満たすことを言う．

(1) 任意の $x\in U$ 及び $\omega\in S^{n-1}$ に対して, 極限

$$\lim_{r\to+0}(\sqrt{-1}\,r)^{n-1}\sum_{i=1}^n(-1)^{i+1}\omega_i f_i(x+\sqrt{-1}r\omega)$$

が存在して, $U+\sqrt{-1}S^{n-1}$ 上の連続関数に広義一様収束する．ただし, $f_1,\cdots,f_n$ は μ_{01} の係数, つまり, $\mu_{01}=\sum_{i=1}^n f_i\,d\bar z_1\wedge\cdots\wedge d\bar z_{i-1}\wedge d\bar z_{i+1}\wedge\cdots\wedge d\bar z_n$ であり, $z=x+\sqrt{-1}y$ 及び $y=r\omega$ として虚軸方向 y を半径 r と $\omega\in S^{n-1}$ で書いている．

(2) $k<\infty$ ならば, $\int_{S^{n-1}}L(\mu_{01})$ は U 上の C^k 級関数であり,
$k=\infty$ ならば, $L(\mu_{01})$ は $U+\sqrt{-1}S^{n-1}$ 上の C^∞ 級の微分形式である．

ここで, $L(\mu_{01})(x,\omega)=\lim_{r\to+0}(\sqrt{-1}\,r)^{n-1}\sum_{i=1}^n(-1)^{i+1}\,\omega_i\,f_i(x+\sqrt{-1}r\omega)\,ds$ と定める．ただし, $ds=\sum_{i=0}^n(-1)^{i+1}\omega_i d\omega_1\wedge\cdots\wedge d\omega_{i-1}\wedge d\omega_{i+1}\wedge\cdots\wedge d\omega_n$ である．

定義 4.4. $\mathscr{E}^{k\text{-qw},(0,n-1)}(V,V\setminus U)$ を次で定める．

$$\mathscr{E}^{k\text{-qw},(0,n-1)}(V,V\backslash U)=\left\{\mu=(\mu_1,\mu_{01})\in\mathscr{E}^{(0,n)}(V,V\setminus U)\;\middle|\;\mu_{01}\in\mathscr{E}^{k\text{-qw},(0,n-1)}(V\setminus U)\right\}.$$

以降, $k=\infty$ の場合は特別に, $\mathscr{E}^{\text{qw},(0,n-1)}(V\setminus U)$ や $\mathscr{E}^{\text{qw},(0,n-1)}(V,V\setminus U)$ と書いて, ∞ を省略する．さて, 次の定理が主結果である．

定理 4.5. $u \in \mathscr{B}(U)$ を取る．$u = \iota(f)$ を満たす $f \in C^k(U)$ が存在することと $\iota(f)$ の代表元 $\mu = (\mu_1, \mu_{01})$ で $\mu \in \mathscr{E}^{k\text{-qw},(0,n-1)}(V, V \setminus U)$ となるものが存在することは同値である．さらに,

$$I(\mu)(x) = -\int_{S^{n-1}} L(\mu_{01})(x, \omega) \in C^k(U)$$

と定めた I は well-defined であり, $I(\mu) = f$ を満たす.

証明は見通しをよくするため, 3 つの補題 (補題 4.6, 補題 4.7, 補題 4.8) に分ける.

補題 4.6. $u \in \mathscr{B}(U)$ として, μ 及び μ' を u の代表元とする． このとき, $\mu, \mu' \in \mathscr{E}^{k\text{-qw},(0,n-1)}(V, V \setminus U)$ であれば $I(\mu) = I(\mu')$ となる.

証明. 任意の $x \in U$ に対して, $I(\mu)(x) = I(\mu')(x)$ となることを示す．$x \in V'' \subset\subset V' \subset\subset V$, $U'' = V'' \cap U$, $U' = V' \cap U$ となるように V', V'' 及び U', U'' を取る．u の代表元 $\tilde{\mu}$ と $\tilde{\mu}'$ を次の条件をみたすように取れる (補題 A.1):

(1) $\tilde{\mu}$ と $\tilde{\mu}'$ は V 上で同じコホモロジー類を定める.

(2) V'' 上で $\tilde{\mu} = \mu$ かつ $\tilde{\mu}' = \mu'$ となる.

(3) $\mathrm{Supp}\,\tilde{\mu} \subset V'$, $\mathrm{Supp}\,\tilde{\mu}' \subset V'$ を満たす.

取り方から, $\tilde{\mu}|_{V''}, \tilde{\mu}'|_{V''} \in \mathscr{E}^{k\text{-qw},(0,n-1)}(V'', V'' \setminus U'')$ である．このとき, 定理 4.1 で定めたように, $F[\tilde{\mu}](z, \zeta)$ 及び $F[\tilde{\mu}'](z, \zeta)$ を定める．定理 4.1 と同様にして, 条件 (1) から $F[\tilde{\mu}](z, \zeta) = F[\tilde{\mu}'](z, \zeta)$ とわかる．よって, あとは, $F[\tilde{\mu}](z, \zeta)$ が実軸まで連続に伸びることを U'' 上で示し, 任意の $x \in U''$ に対して $\int_{S^{n-1}} F[\tilde{\mu}](x, \xi) d\xi = I(\mu)(x)$ であることを確かめればよい.

$\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ と $x \in U''$ を固定して考える．D' を V の開集合で $U \setminus U'' \subset D'$ を満たすものとし, D'' を U'' の開集合で $D'' = \mathrm{Int}(U'' \setminus D')$ となるものとする．積分領域 D を変形することで積分は次のように書くことができる.

$$\begin{aligned} F[\tilde{\mu}](z, \zeta) = &\int_{D'} W(z - w, \zeta)\, \tilde{\mu}_1(w) \wedge dw - \int_{\partial D'} W(z - w, \zeta)\, \tilde{\mu}_{01}(w) \wedge dw \\ &- \int_{D''} W(z - t, \zeta) \left(\int_{S^{n-1}} L(\tilde{\mu}_{01})(t, \omega) \right) dt. \end{aligned}$$

x は D' の外にあるので, 補題 3.19 から, 1 番目と 2 番目の積分は x の近傍に解析接続できる．また, 補題 3.20 と同様にして, 3 番目の積分も D'' まで延長できる．よって, $z = x$, $\zeta = \xi$ として実軸上の点を考えてよく, $F[\tilde{\mu}](x, \xi)$ を ξ について S^{n-1} 上積分すると, 補題 3.21 より, 1 番目と 2 番目の積分は 0 となる．さらに, V'' 上 $\tilde{\mu} = \mu$ であることを考慮に入れ,

$$\int_{S^{n-1}} F[\tilde{\mu}](x, \xi)\, d\xi = \int_{S^{n-1}} \int_{D''} W(x - t, \xi)\, I(\mu)(t)\, dt\, d\xi$$

となる．補題 3.20 と 3.21 から, これは $I(\mu)(x)$ と等しい． □

補題 4.7. $f \in C^k(U)$ に対して, $\iota(f)$ の代表元で $\mu \in \mathscr{E}^{k\text{-qw},(0,n-1)}(V, V \setminus U)$ となるものが存在するならば, $I \circ \iota(f) = f$ となる.

証明. $x \in U'' \subset\subset U' \subset\subset U$ として $U', U'' \in \mathrm{Op}(M)$ をとり, $\psi \in C_0^\infty(U)$ を U'' 上では 1, $U \setminus U'$ 上では 0 となるように定める. また, $U'' \subset\subset U' \subset\subset U$ のある複素近傍をそれぞれ $V'' \subset\subset V' \subset\subset V$ とする. 補題 A.1 より, $\iota(\psi f)$ の代表元 $\tilde{\mu}$ を, V'' 上で $\tilde{\mu} = \mu$ かつ $V \setminus V'$ 上で $\tilde{\mu} = 0$ を満たすように取れる. $\iota(\psi f) \in \mathscr{B}_{\overline{U'}}(U)$ であることと定理 4.1 を利用すれば,

$$I(\tilde{\mu})(x) = \int_{S^{n-1}} F[\tilde{\mu}](x, \xi)\, d\xi = \psi(x) f(x)$$

が成り立つ. 補題 4.6 の証明と同様にすれば, $x \in U''$ に対し $I(\mu)(x) = f(x)$ とわかる. □

補題 4.8. $u \in \mathscr{B}(U)$ に対して次は同値である.

(i) ある $f \in C^k(U)$ で $u = \iota(f)$ となるものが存在する.

(ii) u の代表元 μ で $\mu \in \mathscr{E}^{k\text{-qw},(0,n-1)}(V, V \setminus U)$ となるものが存在する.

証明. まず, (i) $\Rightarrow$ (ii) を示す. $x \in U' \subset\subset U$ となるような U' を, ある局所座標系の中で開区間の積 $(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ と書けるように取る. 任意の $i = 1, \cdots, n$ に対し, (a_i, b_i) の複素近傍を V_i' と書くと, $V' = V_1' \times \cdots \times V_n'$ は Stein 開集合で, U' の複素近傍となる. ここで, ι は層の射なので, U' で示せばよい. よって, $\iota(f)|_{U'}$ の代表元 μ で, $\mu \in \mathscr{E}^{k\text{-qw},(0,n-1)}(V', V' \setminus U')$ となるものが存在することを示す.

本多-伊澤-諏訪 [1] の Example 7.26 から, Dirac のデルタ関数の代表元として, $(\tau_1, \tau_{01}) = \left(0, \dfrac{(n-1)!\,\bar{\partial}\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \bar{\partial}\varphi_{n-1}}{(2\pi\sqrt{-1})^n\, z_1 \cdots z_n}\right)$ が取れる. ただし, $\varphi_i \in C^\infty(V' \setminus U')$ $(i = 1, \ldots, n)$ は次のように構成する:

$\{\tilde{\varphi}_i\}_{i=1}^n$ を, S^{n-1} の単位の分解で, $i = 1, \cdots, n$ に対して, $(0, \cdots, \overset{\overset{i}{\vee}}{1}, \cdots, 0)$ の近傍で $\tilde{\varphi}_i = 0$ となるように取る. このような $\tilde{\varphi}_i$ により φ_i を, $\varphi_i(x + \sqrt{-1}r\omega) = \tilde{\varphi}_i(\omega)$ $(x \in U', r > 0, \omega \in S^{n-1})$ と定める.

ここで, φ_i は y の動径方向 r について定数であることに注意しておく. $\iota(f)$ の定義から, 代表元 $\mu = (\mu_1, \mu_{01})$ は, $\mu_1 = 0$ 及び

$$\mu_{01} = \frac{(n-1)!\,\bar{\partial}\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \bar{\partial}\varphi_{n-1}}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int_{U'} \frac{\theta(z-t, t) f(t)}{(z_1 - t_1) \cdots (z_n - t_n)} dt$$

で定められる ($\theta(z, t) \in C^\infty(X \times U')$ は定義 3.25 の条件を満たすもの).

$z = x + \sqrt{-1}r\omega \in V' \setminus U'$ として, $r \in (0, \infty)$, $\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_n) \in S^{n-1}$ をとってくる. ここで, 行列 $\widetilde{J}_i$ を, 行列 $(\partial\varphi_i / \partial\omega_j)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n-1}}$ から第 i 行目を除いた $(n-1) \times (n-1)$ の小行列とする. このとき, $L(\mu_{01})(x, \omega)$ の係数は,

$$\lim_{r \to +0} \frac{1}{(-2)^{n-1}} \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \omega_i \det \widetilde{J}_i \int_{U'} \frac{\theta(x + \sqrt{-1}r\omega - t, t) f(t)}{(x_1 + \sqrt{-1}r\omega_1 - t_1) \cdots (x_n + \sqrt{-1}r\omega_n - t_n)} dt$$

と書ける. 各 φ_i は r に依らないので, $\det \widetilde{J}_i$ も r に依らない. さらには, $\bar{\partial}\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \bar{\partial}\varphi_{n-1}$ は各 y_i 軸の近傍で恒等的に 0 となり, $\det \widetilde{J}_i$ もそこで消える.

以上の考察から, どの $i=1,\cdots,n$ に対しても $\omega_i \neq 0$ となるような $z=x+\sqrt{-1}r\omega \in V'\setminus U'$ に対して, 極限 $\displaystyle\lim_{r\to+0}\int_{U'}\frac{\theta(z-t,t)f(t)}{(z_1-t_1)\cdots(z_n-t_n)}dt$ が $U'+\sqrt{-1}S^{n-1}$ 上の連続関数に広義一様収束することを示す. この積分については, 部分積分

$$\int_{U'}\frac{\theta(z-t,t)f(t)}{(z_1-t_1)\cdots(z_n-t_n)}dt=\int_{U'}\frac{\partial^n(\theta(z-t,t)f(t))}{\partial t_1\cdots\partial t_n}\log(z_1-t_1)\cdots\log(z_n-t_n)dt$$

を考えると, $r\to+0$ とした時 $U'+\sqrt{-1}S^{n-1}$ 上連続になることが言える (これは金子 [3] の系 2.3.2 の証明と同様の手法である). 最後に, $k=\infty$ の場合は, f が C^∞ 級であることに注意して部分積分を繰り返せば, $L(\mu_{01})$ が $U'+\sqrt{-1}S^{n-1}$ 上の C^∞ 級の微分形式であると示せる. $n\le k<\infty$ の場合は, $L(\mu_{01})$ が連続, つまり, 積分可能であることがわかったので, 補題 4.6 の証明と同様の議論ができて, $I\circ\iota(f)=f$ となり結論を得る.

次に, (i) $\Leftarrow$ (ii) を示す. $U'\subset U$ を x の十分小さい開近傍, $V'\subset V$ を U' の複素近傍とする. $\chi_{U'}$ を U' の定義関数として取る. つまり, U' 上では 1, その外では 0 の関数である. ι は層の準同型であることに注意して, $I(\mu)$ の代わりに $\chi_{U'}I(\mu)$ を用いることで,

$$\iota\circ I(\mu)|_{U'}=\left[\left(\int_{U'}(\theta\tau_1+\bar\partial_z\theta\wedge\tau_{01})(z-t,t)I(\mu)(t)dt,\int_{U'}(\theta\tau_{01})(z-t,t)I(\mu)(t)dt\right)\right]$$

と, 積分領域を U' 上に制限して考えられる. さらに, Dirac のデルタ関数の代表元 (τ_1,τ_{01}) として, $b_U\left(\displaystyle\sum_j\int_{\Gamma_j^\circ\cap S^{n-1}}W(z,\xi)d\xi\right)$ を持ってくる. ここで, b_U は定義 3.13 で定められた写像で, $\displaystyle\sum_j\int_{\Gamma_j^\circ\cap S^{n-1}}W(z,\xi)d\xi$ は Čech 表示における Dirac のデルタ関数の代表元になっている. V' は十分小さく取って良いので, θ を $V'\times U'$ 上で $(\tau_1,\tau_{01})=(\theta\tau_1+\bar\partial_z\theta\wedge\tau_{01},\theta\tau_{01})$ となるように取っておく. 加えて, b_U を具体的に考察するため, 例 3.12 で構成されるような 1 の代表元を用いた b_U の記述を考える. 証明の前半部分でやったように, φ_j を y に依らないようにして, これを例 3.12 の φ_j とすると, 次のように書ける.

$$\iota\circ I(\mu)|_{U'}=\left[b_U\left(\sum_j\int_{\Gamma_j^\circ\cap S^{n-1}}\int_{U'}W(z-t,\xi)I(\mu)(t)\,dt\,d\xi\right)\right].$$

補題 4.2 により, $\sum_j b_{U+\sqrt{-1}\Gamma_j^\circ}(F[\bullet](z,\Gamma_j))=\mathrm{id}(\bullet)$ であるので, Čech 表示において,

$$\left[\sum_j F[\tilde\mu](z,\Gamma_j^\circ)\right]=\left[\sum_j\int_{\Gamma_j^\circ\cap S^{n-1}}\int_{U'}W(z-t,\xi)I(\mu)(t)\,dt\,d\xi\right]\ \text{on } U' \tag{4.1}$$

を示せば良いこととなる. ただし, $F[\tilde\mu](z,\Gamma_j^\circ)$ は次のように定義された:

$$F[\tilde\mu](z,\Gamma_j^\circ)=\int_{\Gamma_j^\circ\cap S^{n-1}}\left(\int_D W(z-w,\xi)\tilde\mu_1(w)\wedge dw-\int_{\partial D}W(z-w,\xi)\tilde\mu_{01}(w)\wedge dw\right)d\xi\,.$$

等式 (4.1) は, 補題 4.6 と同様にして, 領域 D を変形することで示すことができるので補題が示される. □

付録A.

補題 A.1 (台がコンパクトな代表元). M は n 次元実解析的多様体, X は M の複素化とする. また, 相対コンパクトな M の開集合 U とその複素近傍 $V \in \mathrm{Op}(X)$ を取る. 佐藤超関数の代表元 $\mu \in \mathscr{E}^{(0,n)}(V, V \setminus U)$ に対して, ある代表元 $\tilde{\mu} \in \mathscr{E}^{(0,n)}(X, X \setminus M)$ であって, V' 上で μ, $X \setminus V''$ 上で 0 となるものが存在する. ただし, $V' \subset\subset V \subset\subset V''$ である.

証明. $\mathscr{B}$ は脆弱なので, ある $\tilde{u} \in \mathscr{B}(M)$ で, $\tilde{u}|_U = [\mu]$, $\tilde{u}|_{M \setminus \overline{U}} = 0$ となるものが存在する. よって, $\mu_0 \in \mathscr{E}^{(0,n)}(X, X \setminus M)$ で, $\mu_0|_V + \bar{\vartheta}\tau' = \mu$ かつ $\mu_0|_{X \setminus \overline{V}} + \bar{\vartheta}\tau'' = 0$ を満たすものが取れる. ただし, $\tau' \in \mathscr{E}^{(0,n-1)}(V, V \setminus U)$, $\tau'' \in \mathscr{E}^{(0,n-1)}(X \setminus \overline{V}, (X \setminus \overline{V}) \setminus (M \setminus \overline{U}))$ である. V_0' 及び V_0'' を $V' \subset\subset V_0' \subset\subset V \subset\subset V_0'' \subset\subset V''$ となるような X の開集合として, X 上の台がコンパクトな C^∞ 級関数 φ', φ'' を, それぞれ, φ' は V' 上で 1 かつ $X \setminus \overline{V}_0'$ 上で 0 となり, φ'' は $X \setminus \overline{V}_0''$ 上で 1 かつ V'' 上で 0 となるように取る. 以上の準備の元で, $\tilde{\mu} = \mu_0 + \bar{\vartheta}(\varphi'\tau') + \bar{\vartheta}(\varphi''\tau'')$ と定めればよい. □

補題 A.2 (Bochner-Martinelli の公式). $D \subset \mathbb{C}^n$ を C^1 級の境界を持つ有界領域とする. 任意の $z \in D$ 及び $g \in C^1(\overline{D})$ に対して,

$$g(z) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \int_{\partial D} g(\zeta)\beta(\zeta - z) \wedge d\zeta - (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \int_D \bar{\partial} g(\zeta) \wedge \beta(\zeta - z) \wedge d\zeta$$

が成立する. ただし, β は次のような $(0, n-1)$ 形式である.

$$\beta(z) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{(n-1)!}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \frac{1}{\|z\|^{2n}} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \bar{z}_i \overset{\overset{i}{\vee}}{d\bar{z}}.$$

Bochner-Martinelli の公式については, Krantz[7] が参考になる.

注意. 本稿では, $\mathbb{C}^n$ の正の局所座標系を $(y_1, \cdots, y_n, x_1, \cdots, x_n)$ としている. 通常の向き $(x_1, y_1, \cdots, \cdots, x_n, y_n)$ とは異なるため, $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$ という定数倍が掛かる.

参考文献

[1] N. Honda, T. Izawa, and T. Suwa. *Sato hyperfunctions via relative Dolbeault cohomology.* pp.229-290, Vol. 75(1), J. Math. Soc. Japan, 2023.

[2] 柏原正樹, 河合隆裕, 木村達雄. 代数解析学の基礎. 紀伊國屋数学叢書, No. 18. 紀伊國屋, 1980.

[3] 金子晃. 新版 超函数入門. 東京大学出版会, 1996.

[4] T. Suwa. *Representation of relative sheaf cohomology.* arXiv:1810.06198.

[5] 青木貴史, 片岡清臣, 山崎晋. 超函数・FBI 変換・無限階擬微分作用素. 共立出版, 2004.

[6] T. Suwa. *Relative Dolbeault cohomology.* arXiv:1903.04710.

[7] S. G. Krantz. *Function Theory of Several Complex Variables.* Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, 2nd edition, 1992.