多変数超幾何函数の積分変換

大島利雄

Toshio Oshima

城西大学 数理・データサイエンスセンター

Center for Mathematics and Data Science, Josai University

Abstract

多項式係数の線型常微分方程式の解析には middle convolution とそれに対応する Riemann Liouville 変換が有益であった（cf. [3, 4, 6, 7, 11]）．多変数超幾何級数に対して，その拡張にあたる積分変換を導入する（cf. [12]）．さらに，古典的な超幾何級数や KZ 方程式との関係を調べ，あたらな超幾何函数の例を考える．

1 積分変換

ベータ積分を一般化した Dirichlet の積分は

$$
\begin{aligned}
&\int_{\substack{t_1>0,\dots,t_n>0\\ t_1+\cdots+t_n<1}} t^{\lambda_1-1}\cdots t^{\lambda_n-1}(1-t_1-\cdots-t_n)^{\mu-1}dt\\
&=\int_0^1 t_1^{\lambda_1-1}dt_1\int_0^{1-t_1}t_2^{\lambda_2-1}dt_2\cdots\int_0^{1-t_1-\cdots-t_{n-1}}t_n^{\lambda_n-1}(1-t_1-\cdots-t_{n-1}-t_n)^{\mu-1}dt_n\\
&\qquad (t_n=(1-t_1-\cdots-t_{n-1})s)\\
&=\int_0^1 t_1^{\lambda_1-1}dt_1\int_0^{1-t_1}t_2^{\lambda_2-1}dt_2\cdots\int_0^1(1-t_1-\cdots-t_{n-1})^{\lambda_n+\mu-1}s^{\lambda_n}(1-s)^{\mu-1}ds\\
&=\frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\lambda_n)}{\Gamma(\lambda_n+\mu)}\int_0^1 t_1^{\lambda_1-1}dt_1\cdots\int_0^{1-t_1-\cdots-t_{n-2}}t_{n-1}^{\lambda_{n-1}-1}(1-t_1-\cdots-t_{n-1})^{\lambda_n+\mu-1}dt_{n-1}\\
&=\frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\lambda_n)}{\Gamma(\lambda_n+\mu)}\times\frac{\Gamma(\lambda_n+\mu)\Gamma(\lambda_{n-1})}{\Gamma(\lambda_{n-1}+\lambda_n+\mu)}\times\cdots\times\frac{\Gamma(\lambda_2+\cdots+\lambda_n+\mu)\Gamma(\lambda_1)}{\Gamma(\lambda_1+\cdots+\lambda_n+\mu)}\\
&=\frac{\Gamma(\lambda_1)\cdots\Gamma(\lambda_n)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda_1+\cdots+\lambda_n+\mu)}
\end{aligned}
$$

となる．これに注意して $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in\mathbb{C}^n$, $\mu\in\mathbb{C}$ で定まる積分変換

$$
(K_x^{\mu,\boldsymbol{\lambda}}u)(x):=\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_{\substack{t_1>0,\dots,t_n>0\\ t_1+\cdots+t_n<1}} t_1^{\lambda_1-1}\cdots t_n^{\lambda_n-1}(1-t_1-\cdots-t_n)^{\mu-1}u(t_1x_1,\dots,t_nx_n)dt_1\dots dt_n
$$

を考えよう．この変換は変数 $x=(x_1,\dots,x_n)$ の収束べき級数環 $\mathcal{O}_0$ における線形変換を定め

$$
\mathcal{O}_0\ni u(x)=\sum_{\mathbf{m}\geq 0}c_{\mathbf{m}}x^{\mathbf{m}}\mapsto K_x^{\mu,\boldsymbol{\lambda}}u(x)=\sum_{\mathbf{m}\geq 0}c_{\mathbf{m}}\frac{\Gamma(\boldsymbol{\lambda}+\mathbf{m})}{\Gamma(|\boldsymbol{\lambda}+\mathbf{m}|+\mu)}x^{\mathbf{m}}\in\mathcal{O}_0
$$

となる．ここで

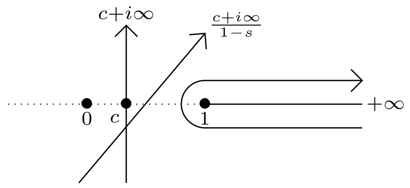
$$
\begin{aligned}
&\mathbf{m} = (m_1, \ldots, n_n) \geq 0 \;\Leftrightarrow\; m_1 \geq 0, \ldots, m_n \geq 0,\\
&|\boldsymbol{\alpha}| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n,\ \boldsymbol{\alpha} + c = (\alpha_1 + c, \ldots, \alpha_n + c),\ \mathbf{m}! = m_1! \cdots m_n!,\\
&x^{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}} = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n},\ (c - \mathbf{x})^{\boldsymbol{\alpha}} = (c - x_1)^{\alpha_1} \cdots (c - x_n)^{\alpha_n},\\
&\Gamma(\boldsymbol{\alpha}) = \Gamma(\alpha_1) \cdots \Gamma(\alpha_n),\ (\boldsymbol{\alpha})_{\mathbf{m}} = \frac{\Gamma(\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{m})}{\Gamma(\boldsymbol{\alpha})}
\end{aligned}
$$

というような記号を用いる．このとき, たとえば

$$(1 - |\mathbf{x}|)^{-\lambda} = \sum_{\mathbf{m} \geq 0} \frac{(\lambda)_{|\boldsymbol{m}|}}{\mathbf{m}!} x^{\mathbf{m}}, \quad e^{|\mathbf{x}|} = \sum_{\mathbf{m} \geq 0} \frac{\mathbf{x}^{\mathbf{m}}}{\mathbf{m}!}.$$

一方，$0 \leq \mathrm{Re}\, s < 1$, $0 < c < 1 - \mathrm{Re}\, s$ のとき，積分

$$
\begin{aligned}
&\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} t^{-\lambda-1}(1-s-t)^{-\tau} \tfrac{dt}{t} = (1-s)^{-\lambda-1-\tau} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \big(\tfrac{t}{1-s}\big)^{-\lambda-1} \big(1 - \tfrac{t}{1-s}\big)^{-\lambda-1-\tau} \tfrac{dt}{t}\\
&= (1-s)^{-\lambda-1-\tau} \int_{\frac{c-i\infty}{1-s}}^{\frac{c+i\infty}{1-s}} t^{-\lambda-1}(1-t)^{-\tau} \tfrac{dt}{t}\\
&= (1-s)^{-\lambda-1-\tau} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} t^{-\lambda-1}(1-t)^{-\tau} \tfrac{dt}{t}\\
&= (1-s)^{-\lambda-1-\tau}(-e^{-\tau\pi i} + e^{\tau\pi i}) \int_1^{\infty} t^{-\lambda-1}(t-1)^{-\tau} \tfrac{dt}{t}\\
&= (1-s)^{-\lambda-1-\tau} \cdot 2i \sin \tau\pi \int_0^1 (\tfrac{1}{u})^{-\lambda-1}(\tfrac{1}{u} - 1)^{-\tau} \tfrac{du}{u} \quad (u = \tfrac{1}{t})\\
&= \frac{2\pi i(1-s)^{-\lambda-1-\tau}}{\Gamma(\tau)\Gamma(1-\tau)} \int_0^1 u^{\lambda-1+\tau-1}(1-u)^{-\tau} du\\
&= 2\pi i \frac{\Gamma(\lambda+\tau-1)}{\Gamma(\tau)\Gamma(\lambda)}(1-s)^{-\lambda-\tau-1}
\end{aligned}
$$



から, 積分公式

$$
\begin{aligned}
&\int_{\frac{1}{n+1}-i\infty}^{\frac{1}{n+1}+i\infty} \cdots \int_{\frac{1}{n+1}-i\infty}^{\frac{1}{n+1}+i\infty} t^{-\boldsymbol{\lambda}-1}(1 - t_1 - \cdots - t_n)^{-\tau} \tfrac{dt_1}{t_1} \cdots \tfrac{dt_n}{t_n}\\
&\quad = (2\pi i)^n \frac{\Gamma(\lambda_1 + \tau - 1)}{\Gamma(\tau)\Gamma(\lambda_1)} \frac{\Gamma(\lambda_1 + \lambda_2 + \tau - 2)}{\Gamma(\lambda_1 + \tau - 1)\Gamma(\lambda_2)} \cdots \frac{\Gamma(|\boldsymbol{\lambda}| + \tau - n)}{\Gamma(\lambda_2 + \cdots + \lambda_{n-1} + \tau - n - 1)\Gamma(\lambda_n)}\\
&\quad = (2\pi i)^n \ \frac{\Gamma(|\boldsymbol{\lambda}| + \tau - n)}{\Gamma(\boldsymbol{\lambda})\Gamma(\tau)}
\end{aligned}
$$

が Dirichlet の積分と同様に得られる．そこでこれを用いた積分変換

$$(L_x^{\mu,\boldsymbol{\lambda}} u)(x) := \frac{\Gamma(\mu+n)}{(2\pi i)^n} \int_{\frac{1}{n+1}-i\infty}^{\frac{1}{n+1}+i\infty} \cdots \int_{\frac{1}{n+1}-i\infty}^{\frac{1}{n+1}+i\infty} t^{\boldsymbol{\lambda}-1}(1 - |\mathbf{t}|)^{-\mu-n} u(\tfrac{x_1}{t_1}, \ldots, \tfrac{x_n}{t_n}) \tfrac{dt_1}{t_1} \cdots \tfrac{dt_n}{t_n}$$

を定義すると

$$\mathcal{O}_0 \ni u(x) = \sum_{\mathbf{m}\geq 0} c_{\mathbf{m}} x^{\mathbf{m}} \mapsto L_x^{\mu,\boldsymbol{\lambda}} u(x) = \sum_{\mathbf{m}\geq 0} c_{\mathbf{m}} \frac{\Gamma(|\boldsymbol{\lambda}+\mathbf{m}|+\mu)}{\Gamma(\boldsymbol{\lambda}+\mathbf{m})} x^{\mathbf{m}} \in \mathcal{O}_0$$

となり，$K_x^{\mu,\boldsymbol{\lambda}}$ の逆変換となる．

定義した 2 つの積分変換をまとめると

定理 1.

$$\boxed{K_x^{\mu,\boldsymbol{\lambda}} \sum_{\mathbf{m}\geq 0} c_{\mathbf{m}} x^{\mathbf{m}} = \frac{\Gamma(\boldsymbol{\lambda})}{\Gamma(|\boldsymbol{\lambda}|+\mu)} \sum_{\mathbf{m}\geq 0} \frac{(\boldsymbol{\lambda})_{\mathbf{m}}}{(|\boldsymbol{\lambda}|+\mu)_{|\mathbf{m}|}} c_{\mathbf{m}} x^{\mathbf{m}}}$$

$$\boxed{L_x^{\mu,\boldsymbol{\lambda}} \sum_{\mathbf{m}\geq 0} c_{\mathbf{m}} x^{\mathbf{m}} = \frac{\Gamma(|\boldsymbol{\lambda}|+\mu)}{\Gamma(\boldsymbol{\lambda})} \sum_{\mathbf{m}\geq 0} \frac{(|\boldsymbol{\lambda}|+\mu)_{|\mathbf{m}|}}{(\boldsymbol{\lambda})_{\mathbf{m}}} c_{\mathbf{m}} x^{\mathbf{m}}}$$

となり，これら積分変換は $\mathrm{Re}\,\lambda_j > 0$ $(j = 1,\ldots,n)$, $\mathrm{Re}\,\mu > 0$ のとき定義されるが，パラメータについての解析接続により，$K_x^{\mu,\boldsymbol{\lambda}}$ は $\lambda_j \notin \{0,-1,-2,\ldots\}$ $(j = 1,\ldots,n)$ のとき，$L_x^{\mu,\boldsymbol{\lambda}}$ は $|\boldsymbol{\lambda}|+\mu \notin \{0,-1,-2,\ldots\}$ のとき，$\mathcal{O}_0$ 上で定義される．また以下が成り立つ．

$$K_x^{\mu,\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\lambda}'} = x^{-\boldsymbol{\lambda}'} \circ K_x^{\mu,\boldsymbol{\lambda}} \circ x^{\boldsymbol{\lambda}'}, \quad L_x^{\mu,\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\lambda}'} = x^{-\boldsymbol{\lambda}'} \circ L_x^{\mu,\boldsymbol{\lambda}} \circ x^{\boldsymbol{\lambda}'}. \tag{1.1}$$

$x_2 = \cdots = x_n = 0$ とおくと接続係数の計算に役立つ以下の結果が得られる．

定理 2. $u(x) \in \mathcal{O}_0$ に対し

$$\begin{aligned}
\big(K_x^{\mu,\boldsymbol{\lambda}} u\big)(x_1,0,\ldots,0) &= \frac{\Gamma(\lambda_2)\cdots\Gamma(\lambda_n)}{\Gamma(\lambda_2+\cdots+\lambda_n+\mu)} K_{x_1}^{\mu+|\boldsymbol{\lambda}|-\lambda_1,\lambda_1}\big(u|_{x_2=\cdots=x_n=0}\big),\\
\big(L_x^{\mu,\boldsymbol{\lambda}} u\big)(x_1,0,\ldots,0) &= \frac{\Gamma(\lambda_2+\cdots+\lambda_n+\mu)}{\Gamma(\lambda_2)\cdots\Gamma(\lambda_n)} L_{x_1}^{\mu+|\boldsymbol{\lambda}|-\lambda_1,\lambda_1}\big(u|_{x_2=\cdots=x_n=0}\big).
\end{aligned}$$

2 いくつかの古典的な例

前節の結果から，いくつかの古典的な超幾何函数の積分表示が得られる．

一変数の場合は

$$\begin{aligned}
(K_x^{\mu,1}u)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^1 (1-t)^{\mu-1} u(tx)dt = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^x (1-\tfrac{s}{x})^{\mu-1} u(s)\tfrac{ds}{x} \quad (s = tx)\\
&= x^{-\mu} \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^x (x-s)^{\mu-1} u(s)ds.
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
&K_x^{\mu,1} = x^{-\mu} I_0^{\mu},\\
&I_0^{\mu} u(x) := \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^x (x-t)^{\mu-1} u(t)dt \qquad \text{(Riemann-Liouville 積分)}.
\end{aligned}$$

I_0^μ は，方程式の middle convolution に対応する変換で，$\mathbb{P}^1$ 上の線型微分方程式の変換論で重要である（cf. [4, 6, 7, 11]）．

$$\begin{aligned}
K_x^{\mu,\lambda_1}(1-x)^{-\lambda_0} &= \frac{\Gamma(\lambda_1)}{\Gamma(\lambda_1+\mu)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\lambda_1)_m}{(\lambda_1+\mu)_m}\frac{(\lambda_0)_m}{m!}x^m \\
&= \frac{\Gamma(\lambda_1)}{\Gamma(\lambda_1+\mu)}F(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_1+\mu,x) \quad (\text{Gauss の超幾何関数}), \\
K_x^{\mu,\lambda}e^x &= \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda+\mu)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_m}{(\lambda+\mu)_m m!}x^m \\
&= \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda+\mu)}{}_1F_1(\lambda,\lambda+\mu,x) \quad (\text{Kummer の合流型超幾何関数}).
\end{aligned}$$

2 変数の例を一つ挙げる：

$$\begin{aligned}
K_{x,y}^{\mu,\lambda_1,\lambda_2}(1-x-y)^{-\lambda_0} &= \frac{\Gamma(\lambda_1)\Gamma(\lambda_2)}{\Gamma(\lambda_1+\lambda_2+\mu)}\sum_{i,\,j\ge 0}\frac{(\lambda_1)_i(\lambda_2)_j}{(\lambda_1+\lambda_2+\mu)_{i+j}}\frac{(\lambda_0)_{i+j}}{i!j!}x^iy^j \\
&= \frac{\Gamma(\lambda_1)\Gamma(\lambda_2)}{\Gamma(\lambda_1+\lambda_2+\mu)}F_1(\lambda_0;\lambda_1,\lambda_2;\lambda_1+\lambda_2+\mu;x,y) \quad (\text{Appell の } F_1).
\end{aligned}$$

Lauricella の超幾何級数は，以下のように表せる．

$$\begin{aligned}
F_D(\lambda_0,\boldsymbol{\lambda},\mu;\mathbf{x}) &:= \sum_{\mathbf{m}\ge 0}\frac{(\lambda_0)_{|\mathbf{m}|}(\boldsymbol{\lambda})_{\mathbf{m}}}{(\mu)_{|\mathbf{m}|}\mathbf{m}!}\mathbf{x}^{\mathbf{m}} = \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\boldsymbol{\lambda})}K_x^{\mu-|\boldsymbol{\lambda}|,\boldsymbol{\lambda}}(1-|\mathbf{x}|)^{-\lambda_0}, \\
F_A(\lambda_0,\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\lambda};\mathbf{x}) &:= \sum_{\mathbf{m}\ge 0}\frac{(\lambda_0)_{|\mathbf{m}|}(\boldsymbol{\mu})_{\mathbf{m}}}{(\boldsymbol{\lambda})_{\mathbf{m}}\mathbf{m}!}\mathbf{x}^{\mathbf{m}} \\
&= \frac{\Gamma(\boldsymbol{\lambda})}{\Gamma(\boldsymbol{\mu})}K_{x_1}^{\lambda_1-\mu_1,\mu_1}\cdots K_{x_n}^{\lambda_n-\mu_n,\mu_n}(1-|\mathbf{x}|)^{-\lambda_0} \\
&= \frac{\Gamma(\boldsymbol{\lambda})}{\Gamma(\lambda_0)}L_x^{\lambda_0-|\boldsymbol{\lambda}|,\boldsymbol{\lambda}}(1-\mathbf{x})^{-\boldsymbol{\mu}}, \\
F_B(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\lambda}',\mu;\mathbf{x}) &:= \sum_{\mathbf{m}\ge 0}\frac{(\boldsymbol{\lambda})_{\mathbf{m}}(\boldsymbol{\lambda}')_{\mathbf{m}}}{(\mu)_{|\mathbf{m}|}\mathbf{m}!}\mathbf{x}^{m} = \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\boldsymbol{\lambda})}K_x^{\mu-|\boldsymbol{\lambda}|,\boldsymbol{\lambda}}(1-\mathbf{x})^{-\boldsymbol{\lambda}'}, \\
F_C(\mu,\lambda_0,\boldsymbol{\lambda};\mathbf{x}) &:= \sum_{\mathbf{m}\ge 0}\frac{(\mu)_{|\mathbf{m}|}(\lambda_0)_{|\mathbf{m}|}}{(\boldsymbol{\lambda})_{\mathbf{m}}\mathbf{m}!}\mathbf{x}^{\mathbf{m}} = \frac{\Gamma(\boldsymbol{\lambda})}{\Gamma(\mu)}L_x^{\mu-|\boldsymbol{\lambda}|,\boldsymbol{\lambda}}(1-|\mathbf{x}|)^{-\lambda_0}.
\end{aligned}$$

特に $n=2$ のとき，F_D, F_A, F_B, F_C は Appell の超幾何級数 F_1, F_2, F_3, F_4 となる．

Horn の 2 変数合流型超幾何級数のいくつかの例をあげる：

$$\begin{aligned}
\Phi_2(\beta,\beta';\gamma;x,y) &:= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\beta)_m(\beta')_n}{(\gamma)_{m+n}m!n!}x^my^n \\
&= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')}K_{x,y}^{\gamma-\beta-\beta',\beta,\beta'}e^{x+y},
\end{aligned}$$

$$\Psi_1(\alpha;\beta;\gamma,\gamma';x,y) := \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m+n}(\beta)_m}{(\gamma)_m(\gamma')_n m!n!}x^m y^n$$
$$= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma')}{\Gamma(\alpha)}L_{x,y}^{\alpha-\gamma-\gamma',\gamma,\gamma'}(1-x)^{-\beta}e^y,$$

$$\Psi_2(\alpha;\gamma',\gamma';x,y) := \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m+n}}{(\gamma)_m(\gamma')_n m!n!}x^m y^n$$
$$= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma')}{\Gamma(\alpha)}L_{x,y}^{\alpha-\gamma-\gamma',\gamma,\gamma'}e^{x+y}.$$

3 さらなる積分変換

導入した積分変換と $\mathbb{C}^n$ の座標変換 $\mathbb{C}^n \ni x \mapsto R(x) \in \mathbb{C}^n$ との合成を考えよう．まず

$$(T_{x\to R(x)}\phi)(x) := \phi(R(x))$$

とおく．また $\{i_1,\ldots,i_k\} \subset \{1,\ldots,n\}$ に対し

$$\mathbf{y} = (x_{i_1},\ldots,x_{i_k})$$

とおく．さらに $\mu \in \mathbb{C}$ と $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{C}^k$ に対して,

$$\boxed{K_{\mathbf{y},x\to R(x)}^{\mu,\boldsymbol{\lambda}} := T_{x\to R(x)}^{-1}\circ K_{\mathbf{y}}^{\mu,\boldsymbol{\lambda}}\circ T_{x\to R(x)}}$$
$$\boxed{L_{\mathbf{y},x\to R(x)}^{\mu,\boldsymbol{\lambda}} := T_{x\to R(x)}^{-1}\circ L_{\mathbf{y}}^{\mu,\boldsymbol{\lambda}}\circ T_{x\to R(x)}}$$

とおく．

整数成分の行列 $\mathbf{p} = \Big(p_{i,j}\Big)_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}} \in GL(n,\mathbb{Z})$ に対し，座標変換

$$\mathbb{C}^n \ni x \mapsto x^{\mathbf{p}} = \mathbf{x}^{\mathbf{p}} = (x^{p_{*,1}},\ldots,x^{p_{*,n}}) = \Big(\prod_{\nu=1}^{n}x_\nu^{p_{\nu,1}},\ldots,\prod_{\nu=1}^{n}x_\nu^{p_{\nu,n}}\Big)$$

を考えよう．さらに

$$\mathbf{pm} := (p_{1,*}\mathbf{m},\ldots,p_{n,*}\mathbf{m}) = \Big(\sum_{\nu=1}^{n}p_{1,\nu}m_\nu,\ldots,\sum_{\nu=1}^{n}p_{n,\nu}m_\nu\Big)$$

とおく．ここで

$$\big(T_{x\to x^{\mathbf{p}}}^{-1}T_{x\to(t_1x_1,\ldots,t_nx_n)}T_{x\to x^{\mathbf{p}}}\phi\big)(x) = \phi\Big(x_1\prod_{\nu=1}^{p}t_\nu^{p_{\nu,1}},\ldots,x_n\prod_{\nu=1}^{n}t_\nu^{p_{\nu,n}}\Big),$$

に注意すると

定義 3.

$$\left(K^{\mu,\boldsymbol{\lambda}}_{(x_{i_1},\dots,x_{i_k}),x\to x^{\mathbf{p}}}\phi\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_{\substack{t_1>0,\dots t_k>0\\ t_1+\cdots+t_k<1}} \mathbf{t}^{\boldsymbol{\lambda}-1}(1-|\boldsymbol{t}|)^{\mu-1}\phi\Big(x_1\prod_{\nu=1}^k t_\nu^{p_{i_\nu,1}},\dots,x_n\prod_{\nu=1}^k t_\nu^{p_{i_\nu,n}}\Big)dt$$

$$\left(L^{\mu,\boldsymbol{\lambda}}_{(x_{i_1},\dots,x_{i_k}),x\to x^{\mathbf{p}}}\phi\right)(x) = \frac{\Gamma(\mu+k)}{(2\pi i)^k}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\cdots\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\mathbf{t}^{\boldsymbol{\lambda}-1}(1-|\boldsymbol{t}|)^{-\mu-k} \phi\Big(\frac{x_1}{\prod_{\nu=1}^k t_\nu^{p_{i_\nu,1}}},\dots,\frac{x_n}{\prod_{\nu=1}^k t_\nu^{p_{i_\nu,n}}}\Big)\frac{dt_1}{t_1}\cdots\frac{dt_k}{t_k}\qquad (c=\tfrac{1}{k+1})$$

となるので，条件

$$p_{i_\nu,j}\ge 0\qquad (1\le\nu\le k,\ 1\le j\le n)\tag{3.1}$$

のもとに，これら 2 つの変換は $\mathcal{O}_0$ 上の変換となる．すなわち

$$(\mathbf{pm})_{i_1,\dots,i_k} := \Big(\sum_{\nu=1}^n p_{i_1,\nu}m_\nu,\dots,\sum_{\nu=1}^n p_{i_k,\nu}m_\nu\Big)$$

とおくと

定理 4.

$$K^{\mu,\boldsymbol{\lambda}}_{(x_{i_1},\dots,x_{i_k}),x\to x^{\mathbf{p}}}\sum_{\mathbf{m}\ge0}c_{\mathbf{m}}x^{\mathbf{m}} = \frac{\Gamma(\boldsymbol{\lambda})}{\Gamma(|\boldsymbol{\lambda}|+\mu)}\sum_{\mathbf{m}\ge0}\frac{(\boldsymbol{\lambda})_{(\mathbf{pm})_{i_1,\dots,i_k}}}{(|\boldsymbol{\lambda}|+\mu)_{|(\mathbf{pm})_{i_1,\dots,i_k}|}}c_{\mathbf{m}}x^{\mathbf{m}}$$

$$L^{\mu,\boldsymbol{\lambda}}_{(x_{i_1},\dots,x_{i_k}),x\to x^{\mathbf{p}}}\sum_{\mathbf{m}\ge0}c_{\mathbf{m}}x^{\mathbf{m}} = \frac{\Gamma(|\boldsymbol{\lambda}|+\mu)}{\Gamma(\boldsymbol{\lambda})}\sum_{\mathbf{m}\ge0}\frac{(|\boldsymbol{\lambda}|+\mu)_{|(\mathbf{pm})_{i_1,\dots,i_k}|}}{(\boldsymbol{\lambda})_{(\mathbf{pm})_{i_1,\dots,i_k}}}c_{\mathbf{m}}x^{\mathbf{m}}$$

たとえば $\mathbf{p}=\left(\begin{smallmatrix}p_1&p_2\\q_1&q_2\end{smallmatrix}\right)\in GL(2,\mathbb{Z})$, p_1, p_2, q_1, $q_2\ge0$ に対し，$\tilde{\mathbf{p}}=\mathbf{p}\otimes I_{n-2}\in GL(n,\mathbb{Z})$ とおくと

$$\begin{aligned}
K^{\mu,(\lambda_1,\lambda_2)}_{(x_1,x_2),x\to x^{\tilde{\mathbf{p}}}}x^{\mathbf{m}} &= \frac{\Gamma(\lambda_1)\Gamma(\lambda_2)}{\Gamma(\lambda_1+\lambda_2+\mu)}\frac{(\lambda_1)_{p_1m_1+p_2m_2}(\lambda_2)_{q_1m_1+q_2m_2}}{(\lambda_1+\lambda_2+\mu)_{(p_1+q_1)m_1+(p_2+q_2)m_2}}x^{\mathbf{m}},\\
K^{\mu,\lambda}_{x_1,x\to x^{\tilde{\mathbf{p}}}}x^{\mathbf{m}} &= \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda)_{p_1m_1+p_2m_2}}{(\lambda+\mu)_{p_1m_1+p_2m_2}}x^{\mathbf{m}}
\end{aligned}$$

などとなる．さらに $k=1$, $\mathbf{p}=\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&-1\end{smallmatrix}\right)$ の例として

$$\begin{aligned}
K^{\mu,\lambda}_{x,(x,y)\mapsto(x,\frac{x}{y})}(1-x)^{-\alpha}(1-y)^{-\beta} &= \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^1 t^{\lambda-1}(1-t)^{\mu-1}(1-tx)^{-\alpha}(1-ty)^{-\beta}dt\\
&= \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda+\mu)}\sum_{\mathbf{m}\ge0}\frac{(\lambda)_{m_1+m_2}}{(\lambda+\mu)_{m_1+m_2}}\frac{(\alpha)_{m_1}(\beta)_{m_2}}{m_1!m_2!}x^{m_1}y^{m_2}\\
&= \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda+\mu)}F_1(\lambda,\alpha,\beta,\lambda+\mu;x,y)
\end{aligned}$$

は，Appell の F_1 の前節とは別の積分表示を与える．

4 微分方程式の変換

$u(x)$ が線型の微分方程式を満たしていると，それらに前節で導入された積分変換を施した結果も線型の微分方程式を満たす．それを計算しよう．微分作用素の記号

$$\partial := \tfrac{d}{dx},\ \ \vartheta := x\,\partial,\ \ \partial_i := \tfrac{\partial}{\partial\, x_i},\quad \vartheta_i := x_i\,\partial_i,\ \ W[x] := \mathbb{C}[x]\otimes\mathbb{C}[\boldsymbol{\partial}].\ W(x) = \mathbb{C}[x]\otimes\mathbb{C}[\boldsymbol{\partial}]$$

を用いる．関数 $f(x)$ と $P\in W(x)$ に対し

$$\mathrm{Ad}(f(x))P := f(x)\circ P\circ f(x)^{-1}$$

とおく．特に $\mathrm{Ad}(x^{\boldsymbol{\lambda}})$ は $W(x)$ の自己同形写像で

$$\mathrm{Ad}(x^{\boldsymbol{\lambda}}) : x_i\mapsto x_i,\quad \partial_i\mapsto\partial_i - \tfrac{\lambda_i}{x_i},\quad \vartheta_i\mapsto\vartheta_i-\lambda_i$$

を満たす．さらに $\mathrm{R}\,P$ を

$$\mathrm{R}\,P := g(x)P\in W[x]$$

において $\deg_x g(x)P$ が最小となるように $g(x)\in W(x)\setminus\{0\}$ を選んで定義する．

また

$$K_x^{\mu} := K_x^{\mu,(1,\dots,1)},\quad L_x^{\mu} := L_x^{\mu,(1,\dots,1)} \tag{4.1}$$

とおく．

まず一変数の場合 $(n=1)$ を復習しておく（cf. [6, 7]）．このとき

$$K_x^{\mu} = K_x^{\mu,1} = x^{-\mu}I_0^{\mu},\ L_x^{\mu} = L_x^{\mu,1} = I_0^{-\mu}x^{\mu}.$$

$P = P(x,\partial)\in W[x]$ の middle convolution $\mathrm{mc}_\mu(P)$ は

$$\partial^{\gamma}\,P = \sum_{i\ge0,\,j\ge0} c_{i,j}\,\partial^i\,\vartheta^j\in W[x] \tag{4.2}$$

となる $\gamma\in Z_{\ge0}$ を一つ選び

$$\mathrm{mc}_\mu(P) := \partial^{-\delta}\sum c_{i,j}\,\partial^i(\vartheta-\mu)^j\in W[x] \tag{4.3}$$

を満たす最大の $\delta\in\mathbb{Z}_{\ge0}$ を選んで定義する．

$u(x)$ が $P(x,\partial)u=0$ を満しているとする．$u(x)\in x^{\lambda}\mathcal{O}_0\setminus\{0\}$ であったならば条件

$$\lambda\notin\mathbb{Z},\quad \lambda+\mu\notin\mathbb{Z} \tag{4.4}$$

のもとで, $I_0^{\mu}u\in x^{\lambda+\mu}\mathcal{O}_0\setminus\{0\}$ が well-defined で

$$\mathrm{mc}_\mu(P)I_0^{\mu}u = 0$$

が成立する（より一般の場合や P が原点を不確定特異点とする場合については [6, 11]）．よって，(1.1) に注意すると

$$K_x^{\mu,\lambda}:\mathcal{O}_0\to\mathcal{O}_0$$

において，$u\in O_0\setminus\{0\}$ が $P(x,\partial)u=0$ を満たすならば，条件 (4.4) のもとで $K_x^{\mu,\lambda}u\neq 0$ で

$$\bigl(\mathrm{Ad}(x^{-\lambda-\mu+1})\circ\mathrm{mc}_\mu\circ\mathrm{R}\circ\mathrm{Ad}(x^{\lambda-1})P\bigr)K_x^{\mu,\lambda}u=0$$

が成り立つ．

同様に，一般の場合も K_x^μ や L_x^μ が引き起こす $x^{\boldsymbol{\lambda}-1}\mathcal{O}_0$ 上の作用に対する方程式の変換を調べればよい．$x_i\,\partial_i\bigl(u(tx)\bigr)=\bigl(x_i\,\partial_i\,u(x)\bigr)|_{x\mapsto tx}$ に注意すると

$$(\vartheta_iK_x^\mu u)(x)=\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^1(1-|\mathbf{t}|)^{\mu-1}x_it_i(\partial_i\,u)(tx)dt=(K_x^\mu\vartheta_iu)(x)$$

であり

$$\tfrac{\partial}{\partial t_i}\bigl((1-|\mathbf{t}|)^{\mu-1}u(tx)\bigr)=-(\mu-1)(1-|\mathbf{t}|)^{\mu-2}u(tx)+(1-t)^{\mu-1}x_i(\partial_i\,u)(tx)$$

より

$$\begin{aligned}
x_iK_x^\mu\,\partial_i&=(\mu-1)K_x^{\mu-1}=x_\nu K_x^\mu\,\partial_\nu,\\
\mu\int_0^1(1-|\mathbf{t}|)^{\mu-1}u(tx)dt&=x_i\int_0^1(1-|\mathbf{t}|)^{\mu}(\partial_i\,u)(tx)dt\quad(\text{上で }\mu\mapsto\mu+1)\\
&=x_i\int_0^1(1-|\mathbf{t}|)^{\mu-1}(1-t_1-\cdots-t_n)(\partial_i\,u)(tx)dt,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_iK_x^\mu\,\partial_i\,u&=\mu K_x^\mu u+\sum_{\nu=1}^n\frac{x_i}{\Gamma(\mu)}\frac{1}{x_\nu}\int_0^1(1-|\mathbf{t}|)^{\mu-1}\bigl((x_\nu\,\partial_i\,u)|_{x\to tx}\bigr)dt\\
&=\mu K_x^\mu u+\sum_{\nu=1}^n\frac{x_i}{x_\nu}K_x^\mu\,\partial_ix_\nu u-K_x^\mu u\\
&=(\mu-1)K_x^\mu u+\sum_{\nu=1}^nK_x^\mu\,\partial_\nu\,x_\nu u=(\mu+n-1)K_x^\mu u+\sum_{\nu=1}^n\vartheta_\nu K_x^\mu u.
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
&K_x^\mu\circ\vartheta_j=\vartheta_j\circ K_x^\mu,\\
&K_x^\mu\circ\partial_j=\tfrac{1}{x_j}(\vartheta_1+\cdots+\vartheta_n+\mu+n-1)\circ K_x^\mu.
\end{aligned}\tag{4.5}$$

定理 5. $u(x)$ が $Pu=0$ を満たすとする（$P\in W(x)$）.

i)
$$\partial^{\boldsymbol{\gamma}}\,\mathrm{R}P=\sum_{\alpha,\,\beta\in\mathbb{N}^n}c_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}\,\partial^{\boldsymbol{\alpha}}\,\vartheta^{\boldsymbol{\beta}}\quad(c_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}\in\mathbb{C})$$

となる最小の $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ を選んで

$$K_x^\mu(\sum c_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}\,\partial^{\boldsymbol{\alpha}}\,\vartheta^{\boldsymbol{\beta}}) := \mathrm{R}\sum c_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}\Bigl(\prod_{k=1}^n\bigl(\tfrac{1}{x_k}(\vartheta_1+\cdots+\vartheta_n+\mu+n-1)\bigr)^{\alpha_k}\Bigr)\vartheta^{\boldsymbol{\beta}}$$

とおくと， $K_x^\mu(\partial^\gamma\,\mathrm{R}P)K_x^\mu u(x)=0$ が成り立つ.

ii)

$$\partial^{\boldsymbol{\gamma}}\,\mathrm{R}P|_{(x_j,\partial_j)\mapsto(x_j^{-1},-x_j(\vartheta_j+1)),\ j=1,\dots,n} = \sum_{\alpha,\,\beta\in\mathbb{N}^n} c_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}\,\partial^{\boldsymbol{\alpha}}\,\vartheta^{\boldsymbol{\beta}} \quad (c_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}\in\mathbb{C})$$

となる最小の $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ を選んで

$$L_x^\mu(\sum c_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}\,\partial^{\boldsymbol{\alpha}}\,\vartheta^{\boldsymbol{\beta}}) := \mathrm{R}\sum c_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}\Bigl(\prod_{k=1}^n\bigl(x_k(\mu-\vartheta_1-\cdots-\vartheta_n)\bigr)^{\alpha_k}\Bigr)(-\boldsymbol{\vartheta}-1)^{\boldsymbol{\beta}}$$

とおくと，$L_x^\mu(\partial^{\boldsymbol{\gamma}}\,\mathrm{R}P)L_x^\mu u(x)=0$ が成り立つ.

定理の直前の議論から i) が得られるが，ii) も同様に示される（cf. [12]).

一変数のときは (4.3) により既約方程式が分かる．多変数のときは，方程式は単項生成ではなくて，一般には既約な形で求めるのは難しいが，たとえば以下に注意することは重要である（一変数の $K_x^{\mu,\lambda}$ 場合は，以下で既約商が分かる).

注意 6. $P_1,\,P_2\in W[x]$ に対し

$$\{u\in\mathcal{O}_0 \mid P_1=0\}=\{0\} \ \Rightarrow\ \{u\in\mathcal{O}_0 \mid P_1P_2u=0\}=\{u\in\mathcal{O}_0 \mid P_2u=0\}.$$

5 KZ 方程式

rigid な 4 点以上の特異点をもつ $\mathbb{P}^1$ 上の Fuchs 型常微分方程式は，1 階の Pfaff 型方程式で表し，特異点の位置も変数と見なすと KZ 方程式（cf. [5]）に拡張され，多変数の超幾何微分方程式が得られる（cf. [3, 7, 9]）．これは 1 階の Pfaff 型方程式と KZ 方程式に対する middle convolution を用いて示される（cf. [1, 2]）．特異点が 4 点なら 2 変数の超幾何微分方程式となり，4 点のスペクトル型が $21,21,21,21$ のときは Appell の F_1 の，$211,22,31,31$ のときは F_2 の満たす方程式となる（cf. [8, 9]）．rigid で不分岐な不確定特異点を持つ場合も，同様にして不確定特異点をもつ多変数の超幾何微分方程式が得られる (cf. [10]).

KZ 方程式 $\mathcal{M}$ は, 特異点 $x_i=x_j$ における留数行列 $A_{i,j}$ を用いて表される:

$$\mathcal{M}\,:\,\frac{\partial u}{\partial x_i}=\sum_{\substack{0\leq\nu\leq q\\ \nu\neq i}}\frac{A_{i,\nu}}{x_i-x_\nu}u \quad (i=0,\dots,q) \tag{5.1}$$

$$A_{i,j}=A_{j,i}\in M(N,\mathbb{C}) \quad (i,\,j\in\{0,1,\dots,q+1\})$$

という Pfaff 型方程式で

$$A_{i,i} = A_{\emptyset} = A_i = 0, \quad A_{i,q+1} := -\sum_{\nu=0}^{q} A_{i,\nu},$$

$$A_{i_1,i_2,\dots,i_k} := \sum_{1\le\nu<\nu'\le k} A_{i_\nu,i_{\nu'}} \quad (\{i_1,\dots,i_k\}\subset\{0,\dots,q+1\})$$

と置くと

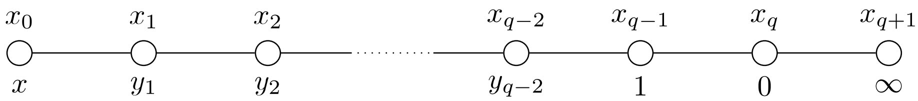
$$[A_I, A_J] = 0 \quad \text{if } I\cap J=\emptyset \text{ or } I\subset J \text{ with } I,\, J\subset\{0,\dots,q+1\}$$

という可積分条件が満たされるものをいう．なお，既約性から $\mathcal{M}$ は *homogeneous*, すなわち

$$A_I = 0 \quad (\#I = q+1)$$

(cf. [8, 9]) を仮定してよい．

対称性から，方程式 (5.1) の空間には対称群 $\mathfrak{S}_{q+2}$ が添え字の置換として作用する．



一方，rigid で既約な Fuchs 型方程式

$$\frac{du}{dx} = \sum_{i=1}^{q} \frac{A_i}{x-x_i} u \tag{5.2}$$

は，$x = x_0$ and $A_i = A_{0,i}$ と置くことにより KZ 方程式 $\mathcal{M}$ に拡張できる（cf. [3, 9]).

$x_{q-1} = 1$, $x_q = 0$, $x_{q+1} = \infty$ と変換することにより，KZ 方程式 (5.1) は $n = q-1$ 変数の超幾何微分方程式とみなせる．そこで $n = q-1 = 2$ 変数の場合を以下考察しよう．このとき，関係式

$$A_{01} + A_{01} + A_{03} + A_{12} + A_{13} + A_{23} = 0$$

などから，$(A_{01}, A_{02}, A_{03}, A_{12}, A_{13})$ から $\mathcal{M}$ が定まることに注意しよう．$x_0 = x$, $x_1 = y$ とおいて，$\mathfrak{S}_5$ の作用を表してみると

$$\begin{array}{rcl}
(x_0,x_1,x_2,x_3,x_4) & \to & (x,y,1,0,\infty) \\
x_0 \leftrightarrow x_1 & \to & (x,y)\leftrightarrow(y,x) \\
x_1 \leftrightarrow x_2 & \to & (x,y)\leftrightarrow(\frac{x}{y},\frac{1}{y}) \\
x_2 \leftrightarrow x_3 & \to & (x,y)\leftrightarrow(1-x,1-y) \\
x_3 \leftrightarrow x_4 & \to & (x,y)\leftrightarrow(\frac{1}{x},\frac{1}{y})
\end{array}$$

となる．また，KZ 方程式は次のようになる：

$$\mathcal{M} : \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{A_{01}}{x-y}u + \dfrac{A_{02}}{x-1}u + \dfrac{A_{03}}{x}u, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{A_{01}}{y-x}u + \dfrac{A_{12}}{y-1}u + \dfrac{A_{13}}{y}u. \end{cases} \tag{5.3}$$

注意 7. $\mathfrak{S}_5$ の作用から来る包合的座標変換

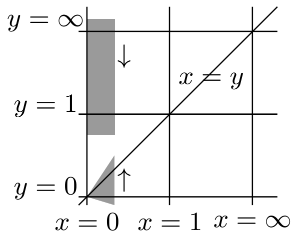
$$
\begin{aligned}
(x_0,x_1,x_2,x_3,x_4) \leftrightarrow (x_2,x_1,x_0,x_4,x_3) \qquad &\to \qquad (x,y) \leftrightarrow (x,\tfrac{x}{y})\\
(x_0,x_1,x_2,x_3,x_4) \leftrightarrow (x_0,x_2,x_1,x_4,x_3) \qquad &\to \qquad (x,y) \leftrightarrow (\tfrac{y}{x},y)
\end{aligned}
$$

は，方程式 (5.3) の原点の特異点を解消する座標変換を与える．

$\mathfrak{S}_5 \ni x_0 \leftrightarrow x_1 \quad x_1 \leftrightarrow x_2 \quad x_2 \leftrightarrow x_3 \quad x_3 \leftrightarrow x_4$

$(x,y) \mapsto (y,x) \quad (\frac{x}{y},\frac{1}{y}) \quad (1-x,1-y) \quad (\frac{1}{x},\frac{1}{y})$

$$
\begin{aligned}
(x,y) \ &\leftrightarrow \ (x,\tfrac{x}{y})\\
\{|x|<\epsilon,\ |y|<C|x|\} \ &\leftrightarrow \ \{|x|<\epsilon,\ |y|>C^{-1}\}\\
x=y=0 \ &\leftrightarrow \ x=0
\end{aligned}
$$



この座標変換から以下の定理が得られることに注意しよう．

定義 8. 方程式 (5.3) の原点（resp. $x_i = x_j$）の近傍での解が *simple monodromy* をもつ，とは原点（resp. $x_i = x_j$ の generic points）の近傍で特異点を除いて解析接続したものが 1 次元の線型空間に入っているもののこととする．

定理 9. 方程式 (5.3) の原点（$x_0 = x_1 = x_3$）の近傍での *simple monodromy* をもつ解と $x_2 = x_4$ の近傍での *simple monodromy* をもつ解とは 1 対 1 に対応する．

KZ 方程式 (5.1) の convolution に対応する解 $u(x,y)$ の変換は

$$
(\tilde{\mathrm{mc}}_\mu u)(x,y) := \begin{pmatrix} I_{x,0}^{\mu+1}\frac{u(x,y)}{x-y}\\ I_{x,0}^{\mu+1}\frac{u(x,y)}{y}\\ I_{x,0}^{\mu+1}\frac{u(x,y)}{x}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Gamma(\mu+1)}\int_0^x(1-t)^\mu\frac{u(t,y)}{t-y}\mathrm{d}t\\ \frac{1}{\Gamma(\mu+1)}\int_0^x(1-t)^\mu\frac{u(t,y)}{y}\mathrm{d}t\\ \frac{1}{\Gamma(\mu+1)}\int_0^x(1-t)^\mu\frac{u(t,y)}{t}\mathrm{d}t\end{pmatrix}.
$$

で与えられるので，$K_x^{\mu,\lambda} = x^{-\mu-\lambda}\circ I_{x,0}^{\mu}\circ x^{\lambda}$ に対応する変換を

$$
(\tilde{K}_x^{\mu,\lambda}u)(x,y) = \begin{pmatrix} K_x^{\mu+1,\lambda}\frac{xu(x,y)}{x-y}\\ K_x^{\mu+1,\lambda}\frac{xu(x,y)}{x-1}\\ K_x^{\mu+1,\lambda}u(x,y)\end{pmatrix} \tag{5.4}
$$

と定義する．KZ 方程式 (5.1) の解 u に対し $\tilde{u} = \tilde{K}_x^{\mu,\lambda}u$ とおくと，$\tilde{u}$ は

$$
\frac{\partial\,\tilde{u}}{\partial\,x_i} = \sum_{\substack{0\le\nu\le3\\ \nu\ne i}}\frac{\tilde{A}_{i,\nu}}{x_i-x_\nu}\tilde{u} \tag{5.5}
$$

を満たすが，一般にはこの方程式は可約なので，既約商とした方程式

$$
\bar{\mathcal{M}} : \frac{\partial\,\bar{u}}{\partial\,x_i} = \sum_{\substack{0\le\nu\le3\\ \nu\ne i}}\frac{\bar{A}_{i,\nu}}{x_i-x_\nu}\bar{u}. \tag{5.6}
$$

を考える．これらの行列 $\tilde{A}_{i,j}$，$\bar{A}_{i,j}$ は

$$\tilde{A}_{01} = \begin{pmatrix} \mu + A_{01} & A_{02} & A_{03} + \lambda \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{A}_{02} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ A_{01} & \mu + A_{02} & A_{03} + \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{A}_{03} = \begin{pmatrix} -\mu - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\mu - \lambda & 0 \\ A_{01} & A_{02} & A_{03} \end{pmatrix}, \qquad \tilde{A}_{04} = \begin{pmatrix} -A_{01} + \lambda & -A_{02} & -A_{03} - \lambda \\ -A_{01} & -A_{02} + \lambda & -A_{03} - \lambda \\ -A_{01} & -A_{02} & -A_{03} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{A}_{12} = \begin{pmatrix} A_{12} + A_{02} & -A_{02} & 0 \\ -A_{01} & A_{12} + A_{01} & 0 \\ 0 & 0 & A_{12} \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_{13} = \begin{pmatrix} A_{13} + A_{03} + \lambda & 0 & -A_{03} - \lambda \\ 0 & A_{13} & 0 \\ -A_{01} & 0 & A_{01} + A_{13} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{A}_{14} = \begin{pmatrix} A_{23} - \mu - \lambda & 0 & 0 \\ A_{01} & A_{02} + A_{03} + A_{23} & 0 \\ A_{01} & 0 & A_{02} + A_{03} + A_{23} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{A}_{23} = \begin{pmatrix} A_{23} & 0 & 0 \\ 0 & A_{03} + A_{23} + \lambda & -A_{03} - \lambda \\ 0 & -A_{02} & A_{02} + A_{23} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{A}_{24} = \begin{pmatrix} A_{01} + A_{13} + A_{03} & A_{02} & 0 \\ 0 & A_{13} - \mu - \lambda & 0 \\ 0 & A_{02} & A_{01} + A_{13} + A_{03} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{A}_{34} = \begin{pmatrix} A_{12} + A_{01} + A_{02} + \mu & 0 & A_{03} + \lambda \\ 0 & A_{12} + A_{01} + A_{02} + \mu & A_{03} + \lambda \\ 0 & 0 & A_{12} \end{pmatrix}.$$

で与えられる．なお，簡単のため $A_{01} = A_{0,1}$ などと書いた．このとき $\mathbb{C}^{3N}$ の部分空間

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &:= \begin{pmatrix} \ker A_{01} \\ \ker A_{02} \\ \ker A_{03} + \lambda \end{pmatrix} + \ker(\tilde{A}_{04} - \mu - \lambda) \\ &= \begin{pmatrix} \ker A_y \\ \ker A_1 \\ \ker A_0 + \lambda \end{pmatrix} + \ker \begin{pmatrix} A_y + \mu & A_1 & A_0 + \lambda \\ A_y & A_1 + \mu & A_0 + \lambda \\ A_y & A_1 & A_0 + \mu + \lambda \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5.7}$$

は $\tilde{A}_{i,j}\mathcal{L} \subset \mathcal{L}$ を満たすので，$\bar{A}_{i,j}$ を，商空間 $\mathbb{C}^{3N}/\mathcal{L}$ 上に $\tilde{A}_{i,j}$ が引き起こす線形変換に対応するサイズ $3N - \dim \mathcal{L}$ の正方行列として定義する．ここで λ と μ が generic ならば

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \ker A_{01} \\ \ker A_{02} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

となることに注意しよう．

さらに KZ 方程式に対して次の変換を考える．

$$\begin{aligned} \tilde{K}_y^{\mu,\lambda} &:= T_{(x,y)\mapsto(y,x)} \circ \tilde{K}_x^{\mu,\lambda} \circ T_{(x,y)\mapsto(y,x)}, \\ \tilde{K}_{x,y}^{\mu,\lambda} &:= T_{(x,y)\mapsto(x,\frac{x}{y})} \circ \tilde{K}_x^{\mu,\lambda} \circ T_{(x,y)\mapsto(x,\frac{x}{y})}. \end{aligned} \tag{5.8}$$

$(x,y) \mapsto (y,x)$ と $(x,y) \mapsto (x,\frac{x}{y})$ は $(x_0,x_1,x_2,x_3,x_4) \mapsto (x_1,x_0,x_2,x_3,x_4)$ と $(x_0,x_1,x_2,x_3,x_4) \mapsto (x_2,x_1,x_0,x_4,x_3)$ に対応するので，$\tilde{K}_y^{\mu,\lambda}u$ や $\tilde{K}_{x,y}^{\mu,\lambda}u$ の満たす既約方程式は容易に計算できる．

6 一つの例

最後に Appell の F_1 の自然な拡張として，KZ 方程式を満たす 2 変数超幾何級数の例を考察してみる．すなわち

$$\prod_{i=2}^{p} \tilde{K}_x^{-\alpha'_i-\alpha_i,\alpha_i} \prod_{j=2}^{q} \tilde{K}_y^{-\beta'_j-\beta_j,\beta_j} \prod_{r=1}^{r} \tilde{K}_{x,y}^{-\gamma'_k-\gamma_k,\gamma_k} \tag{6.1}$$

を方程式 $\mathrm{d}u = \alpha_1 u \frac{\mathrm{d}x}{x-1} + \beta_1 u \frac{\mathrm{d}y}{y-1}$ に施して得られる KZ 方程式 (5.3) で，その一般化 Riemann scheme（cf. [6, §4]）は

$$\begin{aligned}
&\left\{\begin{matrix}
A_{01} & A_{02} & A_{03} & A_{04} & A_{12} \\
[0]_{pq+(p+q-1)r} & [0]_{pr+(p+r-1)q} & [\alpha'_i]_{q+r} & [\alpha_i]_{q+r} & [0]_{qr+(q+r-1)p} \\
[-\alpha''-\beta'']_r & [-\alpha''-\gamma'']_q & \beta_j+\gamma'_k & \beta'_j+\gamma_k & [-\beta''-\gamma'']_p
\end{matrix}\right. \\
&\qquad \left.\begin{matrix}
A_{13} & A_{23} & A_{14} & A_{24} & A_{34} \\
[\beta'_j]_{p+r} & [\gamma_k]_{p+q} & [\beta_j]_{p+r} & [\gamma'_k]_{p+q} & [0]_{pq+qr+rp-(p+q+r)+1} \\
\alpha_i+\gamma'_k & \alpha_i+\beta_j & \alpha'_i+\gamma_k & \alpha'_i+\beta'_j & [-\alpha''-\beta''-\gamma'']_2 \\
 & & & & [-\alpha''-\beta'']_{r-1} \\
 & & & & [-\beta''-\gamma'']_{p-1} \\
 & & & & [-\alpha''-\gamma'']_{q-1}
\end{matrix}\right\},
\end{aligned} \tag{6.2}$$

$$\begin{aligned}
&\alpha''_i := \alpha_i + \alpha'_i,\ \beta''_j := \beta_j + \beta'_j,\ \gamma''_k := \gamma_k + \gamma'_k,\ \alpha'_1 = \beta'_1 = 0, \\
&\alpha'' = \sum_{i=1}^{p} \alpha''_i,\ \beta'' = \sum_{j=1}^{q} \beta''_j,\ \gamma'' = \sum_{k=1}^{r} \gamma''_k, \\
&1 \le i \le p,\ 1 \le j \le q,\ 1 \le k \le r \quad (p \ge 1,\ q \ge 1,\ r \ge 1).
\end{aligned} \tag{6.3}$$

となる．すなわち，留数行列 A_{01} はサイスが $R = pq + qr + rp$ で，重複度 $pq + (p + q - 1)r$ の固有値 0 と重複度 r の固有値 $-\alpha'' - \beta''$ を持っている．また，α_i, β_j, γ_k, α'_i, β'_j, γ'_k が generic なら，$A_{i,j}$ は対角化可能で KZ 方程式は既約である．この KZ 方程式の解には

$$\begin{aligned}
\phi(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^{p}(\alpha_i)_m \prod_{j=1}^{q}(\beta_j)_n \prod_{k=1}^{r}(\gamma_k)_{m+n}}{\prod_{i=1}^{p}(1-\alpha'_i)_m \prod_{j=1}^{q}(1-\beta'_j)_n \prod_{k=1}^{r}(1-\gamma'_k)_{m+n}} x^m y^n \\
\text{with} \quad \alpha'_1 = \beta'_1 = 0
\end{aligned} \tag{6.4}$$

が最後の成分となるものがある (cf. (5.4))．特に

$$\phi(x,y) = F_1(\gamma_1, \alpha_1, \beta_1, 1 - \gamma'_1; x, y) \quad (p = q = r = 1)$$

Riemann scheme (6.2) は [8, Theorem 7.1]（cf. [9]）と (6.1) から得られる（数式処理プログラ [13] でも計算できる）．また x 変数の常微分方程式とみたときの rigid 指数は

$$\begin{aligned}
\mathrm{Idx}_x \mathcal{M} &= (R-q)^2 + q^2 + (R-r)^2 + r^2 + 2(p(q+r)^2 + qr) - 2R^2 \\
&= 2 - 2(q-1)(r-1)(q+r+1)
\end{aligned} \tag{6.5}$$

となるので，それが rigid となる必要十分条件は $r = 1$ または $q = 1$ で与えられる．

定理 9 より，原点で pq 個の simple monodromy を持つ独立解が存在することがわかる（A_{24} の重複度 1 の固有値 $\alpha'_i+\beta'_j$ の個数）．また

15 の正規交差の特異点がある：$\{x_i=x_j\}$ と $\{x_k=x_\ell\}$ の交点（$\#\{i,j,k,\ell\}=4$）

$\supset$ うち 6 点（$j=3,\ \ell=4$）は同時特性指数がすべて重複度 1

$\Rightarrow$ その 6 点では $pq+qr+rp$ 個の局所独立解がべき級数で具体的に得られる．

その局所独立解は，(6.4) の形のべき級数で表せるものとべき級数

$$\psi(x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\prod_{i=1}^{p}(\alpha_i)_m\prod_{j=1}^{q}(\beta_j)_n\prod_{k=1}^{r}(\gamma_k)_{m-n}(\gamma'_k)_{n-m}}{\prod_{i=2}^{p}(1-\alpha'_i)_m\prod_{j=2}^{q}(1-\beta'_j)_n m!n!}x^m y^n \tag{6.6}$$

で表せるものとからなる．6 点間での接続係数の計算は定理 2 を使うと既知の一般超幾何 ${}_mF_{m-1}$ の 0 と ∞ 間の接続係数に帰着される．

$\tilde K_x^{\mu,\lambda}$, $\tilde K_y^{\mu,\lambda}$, $\tilde K_{x,y}^{\mu,\lambda}$ による留数行列や Riemann scheme の変換は，数式処理 `Risa/Asir` のライブラリ [13] でサポートされている．たとえば

```
Sp=os_md.mc2grs(0,["K",[4,3,2]]);
os_md.mc2grs(Sp,"get"|dviout=1,div=5);
```

とすると $(p,q,r)=(4,3,2)$ のときの (6.2) が得られる．なお，`Sp` は 15 個の正規交差特異点における同時特性指数とその重複度データで，[8, Theorem 7.1] に基づいて計算されている． また

```
os_md.mc2grs(Sp,"rest"|dviout=1);
```

によって，10 本の特異直線 $x_i=x_j$ への確定特異点型境界値方程式の Riemann scheme が得られる．`"rest"`の代わりに`"spct"`とするとスペクトル型が得られる．このようにしてスペクトル型や正規交差点での同時スペクトル分解を計算した例を以下に載せる (cf. [9, §5])．

$p=q=r=1$: Appell's F_1

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	idx
x_0		21	21	21	21	2
x_1	21		21	21	21	2
x_2	21	21		21	21	2
x_3	21	21	21		21	2
x_4	21	21	21	21		2

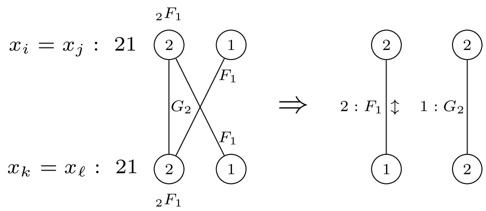
$p=q=r=2$ (rank $=12$)

	$x_0=x$	$x_1=y$	$x_2=1$	$x_3=0$	$x_4=\infty$	idx
x_0		(10)2	(10)2	441111	441111	-8
x_1	(10)2		(10)2	441111	441111	-8
x_2	(10)2	(10)2		441111	441111	-8
x_3	441111	441111	441111		72111	-124
x_4	441111	441111	441111	72111		-124

$p=q=r=3$ (rank $=27$)

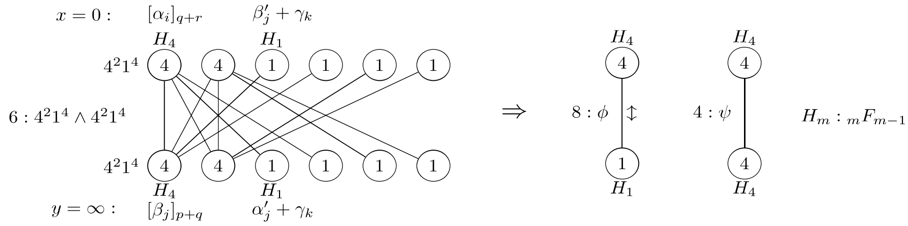
	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	idx
x_0		(24)3	(24)3	6^31^9	6^31^9	-54
x_1	(24)3		(24)3	6^31^9	6^31^9	-54
x_2	(24)3	(24)3		6^31^9	6^31^9	-54
x_3	6^31^9	6^31^9	6^31^9		$(19)22^3$	-730
x_4	6^31^9	6^31^9	6^31^9	$(19)22^3$		-730

正規交差点での局所解（$p=q=r=1$）

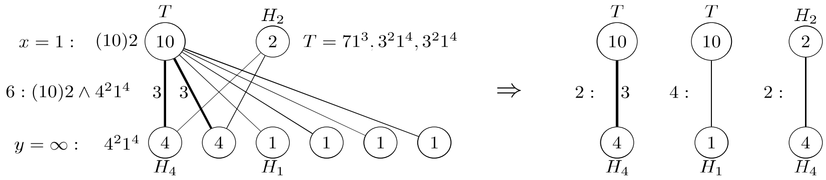


$p=q=r=2$ の場合: 正規交差点での同時スペクトル型は 1^{12} と 3^21^6 が各 6 点, 71^5 が各 3 点

正規交差点の型：$[1^4+1^4+1+1+1+1]\wedge[1^4+1^4+1+1+1+1]:1^{12}$



正規交差点の型：$([3^21^4]+[1^2])\wedge[31+31+1+1+1+1]:3^21^6$



参考文献

[1] Dettweiler, T. and S. Reiter, An algorithm of Katz and its applications to the inverse Galois problems, J. Symbolic Comput. **30** (2000), 761–798.

[2] Haraoka, Y., Middle convolution for completely integrable systems with logarithmic singularities along hyperplane arrangements, Adv. Studies in Pure Math. **62** (2012), 109–136.

[3] 原岡喜重, 複素領域における線形微分方程式, 数学書房, 2015, 363pp.

[4] Katz, N. M., *Rigid Local Systems*, Annals of Mathematics Studies, vol. 139, Princeton University Press, 1995.

[5] Knizhnik, V. and A. Zamolodchikov, Current algebra and Wess-Zumino model in 2 dimensions, *Nucl. Phys.* **B 247** (1984), 83–103

[6] Oshima, T., *Fractional calculus of Weyl algebra and Fuchsian differential equations*, MSJ Memoirs, vol. 11, Mathematical Society of Japan, 2012, 203pp.

[7] 大島利雄，Riemann 球面上の複素常微分方程式と多変数超幾何函数，第 14 回岡シンポジウム講義録，53–97, 奈良女子大, 2016, http://www.nara-wu.ac.jp/omi/oka_symposium.html

[8] Oshima, T., Transformations of KZ type equations, in *Microlocal Analysis and Singular Perterbation Theory,* RIMS Kôkyûroku Bessatsu **B61** (2017), 141–162.

[9] 大島利雄，KZ 型超幾何系の変換と解析，表現論と非可換調和解析をめぐる諸問題, 数理解析研究所講究録 **2031** (2017), 124–158.

[10] Oshima T., Confluence and versal unfolding of Pfaffian systems, Josai Mathematical Monographs **12** (2020), 117–151.

[11] Oshima T., Versal unfolding of irregular singularities of a linear differential equation on the Riemann sphere, Proc. FASNET21, Contemporary Mathematics **782** (2023), 57–91.

[12] Oshima, T., Integral transformations of hypergeometric functions, preprint, 2023.

[13] 大島利雄, `os_muldif.rr`, 数式処理 `Risa/Asir` のライブラリ, 2008–2023.
`http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~oshima/`