Nonlinear perturbation of the wave equation

By

Keisuke UCHIKOSHI*

Abstract

We study nonlinear perturbation of wave equations, using Hadamard distributions, which at first appeared in quantum field theory (QFT). Considering the elementary solutions of the wave equations, Hadamard distributions enables us to desribe the singularities clearly. We study the nonlinear perturbation using them.

§1. 背景説明

本稿では Hadamard 超関数を用いて波動方程式の非線形摂動について考察する．ここでいう Hadamard 超関数とは，最初に場の量子論（QFT）において用いられた概念である．そこで場の量子論の背景について簡単に説明する．

場の量子論の基礎方程式は Klein-Gordon 方程式である：

$$\partial_{x_0}^2 \phi(x) - \sum_{1\le k\le 3} \partial_{x_k}^2 \phi(x) + m^2\phi(x) + \frac{\lambda}{3!}\phi(x)^3 = 0. \tag{1.1}$$

ここで $x = (x_0, x') = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^4$ または $\mathbf{C}^4$ であり，定数 $m \ge 0$ は粒子の質量を表す．実定数 λ は結合定数と呼ばれ，粒子の相互作用の強さを表す．未知関数 $\phi(x)$ は量子場と呼よれ，演算子に値を持つ distribution である．本稿では簡単のため $\phi(x)$ は通常の distribution とする．したがって Klein-Gordon 方程式を解くというよりは，場の量子論を参考にして非線形波動方程式を解くことになる．また質量 m は正とする．

Klein-Gordon 方程式 (1.1) において，左辺第 4 項 $\dfrac{\lambda}{3!}\phi(x)^3$ を相互作用項という．相互作用項はもっと一般の形でもよいが，この例 $\dfrac{\lambda}{3!}\phi(x)^3$ は基本的な重要性を持ち，ϕ^4 モデルとよばれている．$\lambda = 0$ のときは相互作用がないので自由場方程式とよぶ：

$$\partial_{x_0}^2 \phi(x) - \sum_{1\le k\le 3} \partial_{x_k}^2 \phi(x) + m^2\phi(x) = 0. \tag{1.2}$$

2020 Mathematics Subject Classification(s): Primary 35L05; Secondary 35S30, 81T10.
Key Words: Nonlinear waves, Fourier integral operators
Supported by Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University

*Department of Mthematics, National Defense Academy, Yokosuka 239-8686, Japan.

本稿では (1.1) の distribution 解を考える．そのために，[1, 3] に従って，フーリエ積分作用素を使って，(1.2) の次の distribution 解

$$\phi_{-1}(x)=\frac{1}{4\pi\sqrt{\pi}}\int_{\mathbf{R}^3}e^{(\sqrt{-1}x_0E(\xi')+\sqrt{-1}x'\cdot\xi')}E(\xi')^{-1}.d\xi' \tag{1.3}$$

を考える．ここで

$$\mathrm{Wf}\phi_{-1}=\{(x,\sqrt{-1}\xi)\in\sqrt{-1}T^*\mathbf{R}^4\setminus\{0\};\ x_0^2=\sum_{1\le j\le 3}x_j^2,\ \xi_0=|\xi'|\},$$

である．したがって $X\subset\sqrt{-1}T^*\mathbf{R}^4$ に対して $X^a=\{(x,-\sqrt{-1}\xi)\in\sqrt{-1}T^*\mathbf{R}^4;\ (x,\sqrt{-1}\xi)\in X\}$ として，$\mathrm{Wf}\phi_{-1}\cap(\mathrm{Wf}\phi_{-1})^a=\emptyset$ となる．そのため ϕ_{-1}^2 のような非線形演算が定義できる．

一方，Hadamard [2] は

$$\phi(x)=A(p^2)p^{-2}+B(p^2)\log p \tag{1.4}$$

という形をした (1.2) の解を構成した．ここで $p(x)=\sqrt{x_0^2-\sum_{1\le j\le 3}x_j^2}$ とする．このような形の解は計算が便利なので，[1, 3] はこのような形をした解はアダマール状態にある，と呼んでいる．実は ϕ_{-1} もアダマール状態である．本稿の目的はこのような 点に着目して (1.1) の distribution 解を構成することである．

§ 2. Hadamard 超関数

(1.3) を一般化して，実数 μ に対して

$$\phi_\mu(x)=\frac{1}{4\pi\sqrt{\pi}}\int_{\mathbf{R}^3}e^{(\sqrt{-1}x_0E(\xi')+\sqrt{-1}x'\cdot\xi')}E(\xi')^{\mu}\ d\xi' \tag{2.1}$$

を考える．以下 $L>0$ は任意の実数とし，$r>0$ は小さくとる．以下の複素領域を考える．

$$\begin{aligned}
\Omega_0(r)&=\{(p,\kappa)\in\mathbf{C}^2;\ |p|<r/e,\ 0<|pe^{\pm\kappa}|<r,\ |\Im\kappa|<3\pi/4\}.\\
\Omega_1(r)&=\{(x_0,q)\in\mathbf{C}^2;\ |x_0^2-q^2|^{1/2}<r/e,\ |x_0\pm q|<r\},\\
\Omega_2(r)&=\{(x_0,q)\in\Omega_1(r);\ x_0^2-q^2\neq 0\},\\
\omega_1(r)&=\{x\in\mathbf{C}^4;\ |x_0^2-\textstyle\sum_{1\le j\le 3}x_j^2|^{1/2}<r/e,\ |x_0\pm\sqrt{\textstyle\sum_{1\le j\le 3}x_j^2}|<r\},\\
\omega_2(r)&=\{x\in\omega_1(r);\ x_0^2-\textstyle\sum_{1\le j\le 3}x_j^2\neq 0\},\\
\omega^{\mathbf{R}}(r)&=\omega_1(r)\cap\mathbf{R}^4.
\end{aligned}$$

領域 $\Omega_0(r)$ 上で $p\neq 0$ であり，その普遍的被覆空間 $\mathcal{R}(\Omega_0(r))$ の点を $(p,\kappa,\arg p)\in\Omega_0(r)\times\mathbf{R}$ のように表示できる．そこで

$$\Omega_0(r,L)=\{(p,\kappa)\in\mathcal{R}(\Omega_0(r));\ |\arg p|<L\}.$$

とする．複素多様体 X 上の一価正則関数の全体を $\mathcal{O}(X)$ と記す．

$$\Phi:\ \Omega_0(r,L)\ni(p,\kappa)\mapsto(p\cosh\kappa,p\sinh\kappa)\in\Omega_2(r)$$

は全射なので $f(p,\kappa)\in\mathcal{O}(\Omega_0(r,L))$ が $f(p,\kappa)=f(p,-\kappa)$ を満たしていれば $g(x)=g(x_0,\sqrt{\sum_{1\le j\le 3}x_j^2})$ は $x_0=p\cosh\kappa$, $\sqrt{\sum_{1\le j\le 3}x_j^2}=p\sinh\kappa$ として $\omega_2(r)$ 上の多価正則関数になる．また $\mathcal{R}(\omega_2(r))$ 上の点を $(x_0,q,\arg(x_0+q),\arg(x_0-q))\in\omega_2(r)\times\mathbf{R}^2$ と同一視して，この点を $(x_0,q)^{\sim}$ または単に (x_0,q) と記す．そこで

$$\begin{aligned}\tilde\omega_2(r,L)=\{(x_0,q)\in\mathcal{R}(\omega_2(r));&\,|\arg(x_0+q)+\arg(x_0-q)|<L,\\ &|\arg(x_0+q)-\arg(x_0-q)|<3\pi/2\}.\end{aligned}$$

とする．このとき

$$\tilde\omega_2(r,L)\ni(x_0,q)^{\sim}\longmapsto(x_0,q)\in\omega_2(r)$$

は全射である．関数 $f(x_0,q)\in\mathcal{O}(\tilde\omega_2(r,L))$ が $f(x_0,-q)=f(p,q)$ を満たしていれば，$g(x)=f(x_0,q(x'))$ は

$$\{x\in\mathbf{C}^4;\ 0<|x_0+q(x)|<r,\ 0<|x_0-q(x)|<r,\ |p|<r/e\},$$

における多価正則関数になる．

実数 μ に対して

$$\mu^*=\begin{cases}1,\text{if }\mu\in\{j\in\mathbf{Z};\ j\ge 1\},\\ 0,\text{if }\mu\in\mathbf{R}\setminus\{j\in\mathbf{Z};\ j\ge 1\}.\end{cases}$$

とする．$\Omega_0(r,L)$ 上で $\psi_\pm(x)=x_0\pm\sqrt{\sum_{1\le j\le 3}x_j^2}$ とする．

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{\max}(x)&=\max(|\psi_+(x)|,\ |\psi_-(x)|),\\ \mathcal{N}_{\min}(x)&=\min(|\psi_+(x)|,\ |\psi_-(x)|),\\ \mathcal{N}_\mu(x)&=\frac{\max\Big(\mathcal{N}_{\max}(x)^{\mu+1}|\log\mathcal{N}_{\max}(x)|^{\mu^*},\ \mathcal{N}_{\min}(x)^{\mu+1}|\log\mathcal{N}_{\min}(x)|^{\mu^*}\Big)}{\mathcal{N}_{\max}(x)}\end{aligned}$$

とする．言い換えれば

$$\mathcal{N}_\mu(x)=\begin{cases}\mathcal{N}_{\max}(x)^\mu, & \mu\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Z},\ \mu>-1,\\ \mathcal{N}_{\max}(x)^\mu|\log\mathcal{N}_{\min}(x)|, & \mu=-1,\\ \mathcal{N}_{\max}(x)^\mu|\log\mathcal{N}_{\max}(x)|, & \mu\in\mathbf{Z},\ \mu\ge 0,\\ \mathcal{N}_{\min}(x)^{\mu+1}\mathcal{N}_{\max}(x)^{-1}, & \mu\in\mathbf{R},\ \mu<-1\end{cases}$$

である．また以下のような関数空間を考える：

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_e(\tilde\omega_2(r,L))&=\{a(x_0,q)\in\mathcal{O}(\tilde\omega_2(r,L));\ a(x_0,q)=a(x_0,-q)\},\\ \mathcal{O}_o(\tilde\omega_2(r,L))&=\{a(x_0,q)\in\mathcal{O}(\tilde\omega_2(r,L));\ a(x_0,q)=-a(x_0,-q)\}.\end{aligned}$$

また $\mathcal{O}_e(\omega_1(r))$, $\mathcal{O}_o(\omega_1(r))$ も同様に定める．さらに

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^\nu(\tilde{\omega}_1(r,L)) = \{&a_0(x_0,q)+a_1(x_0,q);\\ &a_1 \in \mathcal{O}_e(\tilde{\omega}_1(r,L)),\ \sup_{\tilde{\omega}_1(r,L)} \frac{|a(x_0,q)|}{\mathcal{N}_\nu(x_0 q)} < \infty\\ &a_0 \in \mathcal{O}_e(\omega(r)),\ \sup_{\omega(r)} |b| < \infty\}\end{aligned}$$

とする．もし $\nu \leq 0$ なら a を $a+b$ で置き換えて $b=0$ としてよい．

この意味は以下の通りある．すでに述べたように $\phi_{-1}(x) = A(p^2)p^{-2} + B(p^2)\log p$ なので $M>0$ を大きくとると

$$|\phi_{-1}(x)| \leq M|p|^{-2} = M|\psi_+|^{-1}|\psi_-|^{-1} = M\mathcal{N}_{\max}^{-1}\mathcal{N}_{\min}^{-1} = M\mathcal{N}_{-2}$$

となる．$j = 1,2,3,\cdots$ なら $\phi_{-1+j}(x) = (-\sqrt{-1})^j \partial_{x_0}^j \phi_{-1}$ なので

$$\phi_{j-1}(x) \sim \partial_{x_0}^j(\psi_+^{-1}\psi_-^{-1}) = \sum_{k+l=j} (-\sqrt{-1})^j j! \psi_+^{-k-1}\psi_-^{-l-1}$$

だから

$$|\phi_{j-1}(x)| \leq M\mathcal{N}_{\min}^{-j-1}$$

と書いても間違いではないが，少し改善できて

$$|\phi_{j-1}(x)| \leq M\mathcal{N}_{\max}^{-1}\mathcal{N}_{\min}^{-j} = M\mathcal{N}_{-j-1}$$

となる．一般的に次の結果が成り立つ．

Theorem 2.1. (i) もし $\mu > \nu$ であれば，$r>0$ を小さく選べば，$\mathcal{H}^\mu(\Omega_0(r,L)) \subset \mathcal{H}^\nu(\Omega_0(r,L))$ となる．
(ii) 任意の $L,\mu \in \mathbf{R}$ に対して $r>0$ を小さく選べば $\phi_\mu \in \mathcal{H}^{-\mu-3}(\Omega_0(r,L))$ となる．.

§ 3. 主要結果

関数空間 $\mathcal{H}^\mu$ を用いて ϕ^4 モデルの非線形摂動を考えるとき，$\mu \leq -1$ の場合は紫外発散という深刻な状況が起こる．簡単に言えば $\phi(x) \in \mathcal{H}^\mu$ とは $p=0$ の近くで $|f| \leq M|p|^\mu$ ということである．そこで

$$|\partial_{x_0}^2\phi(x) - \sum_{1\leq k\leq 3} \partial_{x_k}^2\phi(x)| \leq M'|p|^{\mu-2}$$

および

$$|\phi^3| \leq M^3|p|^{3\mu}$$

となる．もし $\mu \leq -1$ なら $\mu - 2 \geq 3\mu$ となって非線形項のほうが強い特異点を持っている．この場合には繰り込み理論を適用する必要があり，本稿ではこれには触れない．そこで $\mu > -1$ の場合を考えて，次の結果が得られる．

Theorem 3.1. もし $\mu > -1$ として $\phi_0 \in \mathcal{H}^\mu(\Omega_0(r,L))$ が (1.2) を満たしていれば $r > 0$ を小さく取り直して (1.1) を満たす $\phi \in \mathcal{H}^\mu(\Omega_0(r,L))$ が存在する．さらに $\mu \notin \mathbf{Z}$ なら

$$\phi - \phi_0 \in \mathcal{H}^{2+3\mu}(\Omega_0(r,L))(\subset \mathcal{H}^\mu(\Omega_0(r,L)))$$

であり，$\mu \in \mathbf{Z}$ なら任意の $\mu' < 2 + 3\mu$ に対して

$$\phi - \phi_0 \in \mathcal{H}^{\mu'}(\Omega_0(r,L))$$

である．

References

[1] Brunetti, R., and Fredenhagen, K., *Microlocal analysis and interacting quantum field theory: Renormalization on physical backgrounds*, Communications in Mathematical Physics 208, 623–661 (2000).
[2] Hadamard, J., *Lectures on Cauchy problem in linear partial differential equations*, New Haven, Yale University Press (1923).
[3] Radzikowski, M., *Micro-local approach to the Hadamard condition in quantum field theory on curved space-time*, Commun. Math. Phys. 179 (1996).