Homotopy commutativity in quasitoric manifolds

大阪公立大学・大学院理学研究科　蓮井 翔
Sho Hasui
Graduate School of Science, Osaka Metropolitan University

1　概要

今回の発表は, 岸本大祐氏, 蔦谷充伸氏 (ともに九州大学), Yichen Tong 氏 (京都大学) らと行った, **擬トーリック多様体** (*quasitoric manifold*) のループ空間のホモトピー可換性に関する共同研究について解説したものである. 詳しくは次節で述べるが, 擬トーリック多様体は Davis と Januszkiewicz の論文 [DJ91] においてトーリック多様体のトポロジー的対応物として導入された閉微分多様体のクラスであり, トーリック多様体が扇に対応するのと同様, 擬トーリック多様体は**特性対**と呼ばれるある種の組み合わせ的対象と一対一に対応づけられる. 本発表の主定理は, 擬トーリック多様体のループ空間がホモトピー可換となるための必要十分条件について, 対応する特性対を用いて完全に記述したものとなっている.

主定理の正確な主張は次節に譲ることとして, ここではホモトピー可換性の定義について述べておく. 以下, 連続写像とホモトピーは基点を保つもののみを考える. まず, 位相空間 X とその元 e, および連続写像 $\mu\colon X \times X \to X$ の組 (X, e, μ) であって, 次の図式がホモトピー可換となるものを **H-空間**と呼ぶ.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_X"] & X \times \{e\} \arrow[d, "\mu"] \\
\{e\} \times X \arrow[r, "\mu"] & X
\end{tikzcd}$$

ここで $i_1(x) = (x, e)$, $i_2(x) = (e, x)$ $(x \in X)$ とした. これはいわばモノイドのホモトピー論的対応物であり, 代表的な例として, X を位相空間, x_0 をその 1 点としたとき, ループ空間

$$\Omega X = \{\, \gamma\colon [0,1] \to X \mid \gamma \text{ は連続写像, かつ } \gamma(0) = \gamma(1) = x_0 \,\}$$

はループの合成を積として H-空間になることが知られている. ホモトピー可換性はこうした H-空間に対して定義される概念であり, 以下の図式がホモトピー可換となることをいう.

$$\begin{tikzcd}
X \times X \arrow[r, "t"] \arrow[d, "\mu"'] & X \times X \arrow[d, "\mu"] \\
X \arrow[r, equal] & X
\end{tikzcd}$$

ここで t は成分の入れ替えを表す写像 (つまり $t(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$) である．最初に述べた通り，本発表が対象とするのは，擬トーリック多様体 M に対するループ空間 ΩM のホモトピー可換性である．

2　擬トーリック多様体に関する基礎事項，および主定理の主張

本節は擬トーリック多様体と特性対の定義，および主定理の主張を正確な形で述べることを目的とする．その準備として，まずはいくつか必要な用語を導入しておく．

以下，S^1 は常に $\mathbb{C}$ 内の単位円 $\{ t \in \mathbb{C} \mid |t| = 1 \}$ を，T^n は n 次元コンパクトトーラス $(S^1)^n$ を表すものとし，T^n は通常通り各成分ごとの積により Lie 群とみなすこととする．このとき T^n は各成分ごとの積により $\mathbb{C}^n$ に作用するが，これを T^n の**標準作用**と呼ぶ．(つまり，

$$(t_1, \dots, t_n) \cdot (z_1, \dots, z_n) := (t_1 z_1, \dots, t_n z_n) \quad ((t_1, \dots, t_n) \in T^n,\ (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n)$$

として定まる作用である.) 以下，$\mathbb{C}^n$ およびその T^n–不変部分集合については，常にこの T^n–作用を考えるものとする．

X, Y を群 G の作用が備わった集合とする．写像 $f\colon X \to Y$ が**弱同変**であるとは，G のある自己同型 ψ について次が成り立つことをいう．

$$任意の\ t \in T^n\ と\ x \in X\ に対し，f(t \cdot x) = \psi(t) \cdot f(x).$$

最後に，組み合わせ的幾何学からいくつかの用語を導入する．**凸多面体**とは，有限次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^m$ 内の有限個の点 $p_1, \dots, p_\ell$ を用いて $P = \mathrm{Conv}\,(\{p_1, \dots, p_\ell\})$ と表せるような集合 P のことをいう．ここで $\mathrm{Conv}\,(S)$ は $\mathbb{R}^m$ の部分集合 S に対する凸包を表す．また，凸多面体 P の次元 $\dim P$ はそのアフィン包 $\mathrm{aff}\,(P)$ の次元として定義される．さらに，凸多面体の**面**とは，$f(P) \subseteq [0, \infty)$ を満たすアフィン関数 $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ を用いて $F = f^{-1}(0) \cap P$ と表せるような P の部分集合 F をいう．凸多面体の面はそれ自身も凸多面体となることが知られており，P が n 次元の凸多面体であるとき，その $n-1$ 次元の面を P の**側面**，0 次元の面を P の**頂点**と呼ぶ．最後に，n 次元凸多面体 P が**単純**であるとは，P の任意の頂点 v に対し，v の属する側面の枚数がちょうど n 枚となることをいう．例えば，$\mathbb{R}^n$ の元 $v_0, v_1, \dots, v_n$ を，$v_0 = (0, \dots, 0)$，$v_i = (\delta_{i,1}, \dots, \delta_{i,n})$ $(i = 1, \dots, n)$ により定めるとき，$\Delta^n := \mathrm{Conv}\,(\{v_0, \dots, v_n\})$ はいわゆる標準単体であるが，これは上記の意味において n 次元凸多面体となることが分かる．(ここで $\delta_{i,j}$ は Kronecker のデルタを表している.) さらに，証明は省くが，Δ^n の頂点は $v_0, \dots, v_n$ の $n+1$ 個であり，$F_i = \mathrm{Conv}\,(\{v_0, \dots, v_n\} \setminus \{v_i\})$ $(i = 0, \dots, n)$ と置けば，Δ^n の側面は $F_0, \dots, F_n$ の $n+1$ 枚となる．各頂点 v_i は F_i 以外のちょうど n 枚の側面に属するので，Δ^n は単純な凸多面体である．

以上の準備の下，擬トーリック多様体の定義は次のように述べられる．上記の定義から直ちには示せないが，単純凸多面体は自然に角つき多様体とみなせることに注意されたい．

定義 2.1. M は $2n$ 次元の微分多様体であり，T^n の滑らかな作用をもつものとする．
(1) T^n の M への作用が**局所標準的**であるとは，任意の $x \in M$ に対し，T^n–不変な x の開近傍 U であって，$\mathbb{C}^n$ のある T^n–不変開集合 V に弱同変微分同相であるものが取れることをいう．
(2) T^n の M への作用が局所標準的であり，さらにその商空間 M/T^n が単純凸多面体 P に角つき多様体として同相となるとき，M は P **上の擬トーリック多様体**であるという．

注 2.2. 上の (1) の条件が成り立つとき, U/T^n は V/T^n に同相である. ここで V/T^n は $\mathbb{C}^n/T^n$ の開集合であり, さらに $\mathbb{C}^n/T^n$ は自然に $[0,\infty)^n$ と同一視できる. 従って T^n の M への作用が局所標準的であるとき, M/T^n は自然に角つき多様体とみなすことができるのである. 上定義の (2) はこのことを前提としている.

ひとつ具体的な例を挙げておくと, トーリック多様体の場合と同様, 複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ が擬トーリック多様体の代表的な例となる. 球面 S^{2n+1} を $\mathbb{C}^{n+1}$ の単位球面とみなして T^{n+1} 作用を入れれば, この作用は $T^{n+1}/S^1 \cong T^n$ の $\mathbb{C}P^n = S^{2n+1}/S^1$ への作用を誘導するが, $\mathbb{C}P^n$ はこの作用について Δ^n 上の擬トーリック多様体となることが容易に示される.

続いて, 擬トーリック多様体の組み合わせ的対応物である特性対について述べる.

定義 2.3. P を n 次元単純凸多面体とする. さらに, P はちょうど m 枚の側面をもつものとし, それらには $F_1,\dots,F_m$ と番号をつけておく. P **上の特性行列**とは, 整数係数の $n\times m$ 行列 $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_m)$ であって, 以下の条件を満たすものをいう.

$$F_{i_1}\cap\cdots\cap F_{i_n}\neq\emptyset \;\; (i_1<\cdots<i_n) \text{ であるとき}, \det(\lambda_{i_1},\dots,\lambda_{i_n})=\pm 1.$$

単純凸多面体 P と P 上の特性行列 λ の対 (P,λ) を特性対という.

定義 2.4. P および $F_1,\dots,F_m$ は定義 2.3 と同様とする. 以下により定まる単体複体を K_P と記す.

$$K_P := \{\,\{i_1,\dots,i_k\}\subseteq\{1,\dots,m\} \mid F_{i_1}\cap\cdots\cap F_{i_k}\neq\emptyset\,\}.$$

さらに, K_P の自己同型群を $\mathrm{Aut}\,(K_P)$ と記す. すなわち, m 次対称群を S_m と記せば, $\mathrm{Aut}\,(K_P)$ は以下によって定まる S_m の部分群である.

$$\mathrm{Aut}\,(K_P)=\{\,\sigma\in S_m \mid \text{任意の}\{i_1,\dots,i_k\}\in K_P\text{ に対して}\{\sigma(i_1),\dots,\sigma(i_k)\}\in K_P\,\}.$$

定義 2.5. P および $F_1,\dots,F_m$ は定義 2.3 と同様とし, λ および λ' を P 上の特性行列とする. λ **と** $\lambda'=(\lambda'_1,\dots,\lambda'_m)$ **が同値**であるとは, ある $G\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ と $\sigma\in\mathrm{Aut}\,(K_P)$, $\epsilon_1,\dots,\epsilon_m\in\{\pm1\}$ に対して

$$\lambda = G\cdot(\epsilon_1\lambda'_{\sigma(1)},\dots,\epsilon_m\lambda'_{\sigma(m)})$$

となることをいう. ここで右辺の $\cdot$ は通常の行列の積を表す.

ここからは特性対と擬トーリック多様体の対応づけについて, 厳密な証明は省き簡易的な形で述べていく. そこで重要となるのが, 次に紹介するモーメント・アングル複体である.

定義 2.6. K を $[m]=\{1,\dots,m\}$ 上の単体複体とし, 各 $\sigma\in K$ に対して

$$Z_\sigma := \{(z_1,\dots,z_m)\in(D^2)^m \,|\, i\notin\sigma\text{ のとき } z_i\in S^1\}$$

と定める. $Z_K := \bigcup_{\sigma\in K} Z_\sigma$ として定まる $(D^2)^m$ の部分空間を K に対する**モーメント・アングル複体**という. さらに, 単純凸多面体 P に対するモーメント・アングル複体 Z_P を $Z_P = Z_{K_P}$ により定める.

注 2.7. T^m の $\mathbb{C}^m$ への標準作用を考えるとき, Z_P は明らかに $\mathbb{C}^m$ の T^m–不変な部分集合である. 従って Z_P は自然な T^m 作用をもっている.

以下の構成は Buchstaber と Panov の著書 [BP02] に拠る．P を n 次元単純凸多面体とし，P はちょうど m 枚の側面をもつものとする．P 上の特性行列 λ に対し，以下のようにして位相空間 $M(\lambda)$ を定める．まず，λ を線型写像 $\lambda\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ とみなすとき，当然ながら $\lambda(\mathbb{Z}^m) \subseteq \mathbb{Z}^n$ なので，λ は準同型 $\bar{\lambda}\colon \mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m \to \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ を誘導する．ここで自然に $\mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m = T^m$ と同一視すれば，$\ker\bar{\lambda}$ は T^m の $m-n$ 次元部分トーラスで，注 2.7 の作用を通じて Z_P に自由に作用することが分かる．そこで $M(\lambda) := Z_P/\ker\bar{\lambda}$ と定めれば，$M(\lambda)$ には $T^m/\ker\bar{\lambda} \cong T^n$ の作用が誘導される．

次の定理は擬トーリック多様体に関する最も基本的な対応関係を与えるものである．

定理 2.8. この $M(\lambda)$ は P 上の擬トーリック多様体である．さらに，対応づけ $\lambda \mapsto M(\lambda)$ は，P 上の特性行列の同値類全体から P 上の擬トーリック多様体の弱同変同相類全体への全単射を与える．

さらに，[DJ91] において示されている通り，擬トーリック多様体 M に関するホモロジー環などの不変量は，対応する特性行列を用いて直接的に計算できる．

定理 2.9. M を n 次元単純凸多面体 P 上の擬トーリック多様体，λ を M に対応する P 上の特性行列とする．このとき以下が成立する．

(1) M の整数係数ホモロジー群 $H_d(M)$ は，d が奇数のとき自明群となる．また，$H_{2k}(M)$ は階数 $h_k(P)$ の自由アーベル群となる．ここで $(h_0(P),\dots,h_n(P))$ は P の h–vector を表す．

(2) P の側面を $F_1,\dots,F_m$ とし，λ の (i,j) 成分を $\lambda_{i,j}$ と記すとき，次数つき環として

$$H^*(M) \cong \mathbb{Z}[v_1,\dots,v_m]/(\mathcal{I}_P + \mathcal{J}_\lambda) \quad (\deg v_1 = \cdots = \deg v_m = 2)$$

となる．ここで $\mathcal{I}_P$ および $\mathcal{J}_\lambda$ は以下のようにして定まるイデアルを表す．

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_P &= (v_{i_1}\cdots v_{i_k} \mid F_{i_1}\cap\cdots\cap F_{i_k} = \emptyset),\\ \mathcal{J}_\lambda &= (\lambda_{i,1}v_1 + \cdots + \lambda_{i,m}v_m \mid i = 1,\dots,n).\end{aligned}$$

注 2.10. 定理の (2) を実際に用いる場合，$\mathbb{Z}[v_1,\dots,v_m]$ を先に $\mathcal{J}_\lambda$ で割っておくことにより，生成元の数を $m-n$ 個に減らすことができる．例えば $F_1\cap\cdots\cap F_n \neq \emptyset$ である場合，λ は同値な範囲で取り替えて $\lambda = (E_n\ *)$ の形であるとみなすことができ，

$$\mathbb{Z}[v_1,\dots,v_m]/(\mathcal{I}_P + \mathcal{J}_\lambda) = \mathbb{Z}[v_{n+1},\dots,v_m]/\mathcal{I}_\lambda \quad (\deg v_{n+1} = \cdots = \deg v_m = 2)$$

と書くことができる．ここで $\mathcal{I}_\lambda$ は以下のようにして定まるイデアルを表す．

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_\lambda &= (v'_{i_1}\cdots v'_{i_k} \mid F_{i_1}\cap\cdots\cap F_{i_k} = \emptyset),\\ v'_i &= \begin{cases} -\lambda_{i,n+1}v_{n+1} - \cdots - \lambda_{i,m}v_m & \text{if } i = 1,\dots,n,\\ v_i & \text{if } i = n+1,\dots,m.\end{cases}\end{aligned}$$

なお，上記の $\mathcal{I}_\lambda$ の生成元は全て 4 次以上なので，$H^*(M)$ の生成元の数はこれが最小である．

以上の準備の下，本発表の主定理は次のように述べられる．

定理 2.11. M を P 上の擬トーリック多様体とし, 対応する特性行列を λ とする. このとき, ΩM がホモトピー可換となるための必要十分条件は, $P \cong (\Delta^3)^k$ かつ

$$\lambda \simeq \begin{pmatrix} E_3 & a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & & a_{1k} \\ & a_{21} & E_3 & a_{22} & & a_{23} & & & a_{2k} \\ & a_{31} & & a_{32} & E_3 & a_{33} & & & a_{3k} \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & & \vdots \\ & a_{k1} & & a_{k2} & & a_{k3} & & E_3 & a_{kk} \end{pmatrix} \tag{1}$$

となることである. ここで $\cong$ は角つき多様体としての同相を, $\simeq$ は特性行列の同値を, E_3 は 3 次の単位行列を表し, $a_{ij} \in \mathbb{Z}^3$ $(i, j = 1, \ldots, k)$ は以下を満たすものとする.

$$a_{ii} = {}^t(1,1,1) \quad \text{かつ} \quad (1,1,1)a_{ij} \equiv 0 \mod 2 \quad (i \neq j). \tag{2}$$

注 2.12. $(\Delta^3)^k$ 上の任意の特性行列は, (1) の右辺の形で, かつ $a_{ii} = {}^t(1,1,1)$ $(i = 1, \ldots, k)$ を満たすような特性行列に同値となる. 従って, この定理の条件のうち本質的なのは, $P \cong (\Delta^3)^k$, および $(1,1,1)a_{ij} \equiv 0 \mod 2$ $(i \neq j)$ という部分である.

注 2.13. 定義を思い出せば分かる通り, 特性行列を扱う際には P の側面の番号づけを固定しておく必要がある. この定理の場合は $P \cong (\Delta^3)^k$ の側面の番号づけを与えねばならないが, これは次のようにして定めている. Δ^3 の側面を F_1, F_2, F_3, F_4 とすれば, $(\Delta^3)^k$ の側面は $F_{i,j} := (\Delta^3)^{i-1} \times F_j \times (\Delta^3)^{k-i}$ $(i = 1, \ldots, k,\ j = 1, 2, 3, 4)$ らとなる. そこで $(\Delta^3)^k$ の側面の番号づけ $F_1, \ldots, F_{4k}$ は, $F_{4(i-1)+j} := F_{i,j}$ によって与えることができる.

3 ループ空間の直積分解

この節では注 2.12 で挙げた 2 つの条件のうち, 主として $P \cong (\Delta^3)^k$ の部分を扱う. つまり, $P \cong (\Delta^3)^k$ は ΩM がホモトピー可換であるための必要条件であることを示すのが本節の目標である.

P の次元を n, 側面の枚数を m とする. 前節で述べた構成法から分かるように, 任意の擬トーリック多様体 M に対し, 主 T^{m-n} 束 $\pi\colon Z_P \to M$ が存在する. 従って次のホモトピーファイバー列が得られる.

$$\Omega Z_P \xrightarrow{\Omega\pi} \Omega M \xrightarrow{\rho} T^{m-n}.$$

一方, 標準的な胞体分割を考えたとき, Z_P は $(D^2)^m$ の 3–skeleton を含んでおり, $(D^2)^m$ は可縮なので, Z_P は 2–連結であることが分かる. 従って $\pi_1(\Omega Z_P) = 0$ であり, 故に上のホモトピーファイバー列の $\rho\colon \Omega M \to T^{m-n}$ は π_1 の同型を導く. さらに ΩM はループの合成による積をもつので, $\rho\colon \Omega M \to T^{m-n}$ には homotopy section (つまり, 連続写像 $s\colon T^{m-n} \to \Omega M$ であって $\rho \circ s \simeq \mathrm{id}_{T^{m-n}}$ となるもの) が存在する. 以上により次の補題を得る.

補題 3.1. ΩM は $\Omega Z_P \times T^{m-n}$ にホモトピー同値である.

このホモトピー同値はそれぞれの積構造と整合的なものとは限らないので, ΩM のホモトピー可換性が $\Omega Z_P \times T^{m-n}$ のそれと一致するとまではいえないのだが, 以下の補題を示すことはで

きる.

補題 3.2. ΩM がホモトピー可換であるとき, ΩZ_P もホモトピー可換である.

この補題を踏まえ, 以下では ΩZ_P のホモトピー可換性と P の組み合わせ的構造 (つまり $P \cong (\Delta^3)^k$) を結びつけることを考える. そこで便利なのが missing face の概念である.

定義 3.3. K を $[m] = \{1, \ldots, m\}$ 上の単体複体とする. K の *missing face* とは, $[m]$ の部分集合 I であって, $I \notin K$ かつ I の任意の真部分集合が K に属するものをいう.

角つき多様体として $P \cong (\Delta^3)^k$ であることは単体複体として $K_P \cong K_{(\Delta^3)^k}$ であることと同値であり, また $K_{(\Delta^3)^k} \cong K_{\Delta^3} \star \cdots \star K_{\Delta^3} = \partial\Delta^3 \star \cdots \star \partial\Delta^3$ なので, 次の補題が得られる. (ここで $\star$ は単体複体の join を, $\partial\Delta^3$ は $\{1, 2, 3, 4\}$ のすべての真部分集合からなる単体複体を表す.)

補題 3.4. 角つき多様体として P と $(\Delta^3)^k$ が同相であることは, 以下の (1), (2) がともに成り立つことと同値である.

(1) K_P の任意の missing face I に対し, $|I| = 4$. ($|I|$ は I の濃度を表す.)
(2) I, J が K_P の相異なる missing face であるとき, $I \cap J = \emptyset$.

つまり, 冒頭に述べた本節の目標を達成するには, ΩM がホモトピー可換であるとき上の (1), (2) がともに成り立つことを示せばよい.

まずは (1) の条件について考える. 以下の補題は定義から容易に示され, これを用いることで ΩZ_P のホモトピー可換性と K_P の missing face の情報を結びつけることができる.

定義 3.5. $[m]$ 上の単体複体 K と $I \subseteq [m]$ に対し,

$$K_I := \{\, \sigma \cap I \mid \sigma \in K \,\}$$

と定める. このように表される K の部分複体を, K の *full subcomplex* という.

補題 3.6. K を $[m]$ 上の単体複体, I を $[m]$ の部分集合とする. このとき Z_{K_I} は Z_K のレトラクトである. (つまり, 連続写像 $r\colon Z_K \to Z_{K_I}$ であって, 包含写像 $i\colon Z_{K_I} \to Z_K$ に対して $r \circ i = \mathrm{id}_{Z_{K_I}}$ となるものが存在する.)

注 3.7. ここで K_I は $[m]$ 上ではなく I 上の単体複体とみている. (定義により, モーメント・アングル複体 Z_K の形は, K の単なる集合としての情報のみでなく, 頂点集合の設定にも依存する. 例えば $m = 2$, $I = \{1\}$, $K = \emptyset$ の場合, 前者の見方では $Z_{K_I} = S^1 \times S^1$ だが, 後者の見方なら $Z_{K_I} = S^1$ となる.)

補題 3.2 の証明と同様にして, この補題から次の系が得られる.

系 3.8. K を $[m]$ 上の単体複体, I を $[m]$ の部分集合とする. ΩZ_K がホモトピー可換であるとき, ΩZ_{K_I} もまたホモトピー可換である.

この系を補題 3.2 と合わせれば, ΩM がホモトピー可換であるとき, 任意の $I \subseteq [m]$ に対して $\Omega Z_{(K_P)_I}$ もまたホモトピー可換でなければならないことが分かる. そこで I が missing face である場合を考えると, 定義により $Z_{K_I} \cong Z_{\partial\Delta^{|I|-1}} = \partial((D^2)^{|I|}) \cong S^{2|I|-1}$ となる. つまり $\Omega S^{2|I|-1}$ が

ホモトピー可換とならねばならないのだが, ホモトピー論においてはよく知られている通り, これは $|I|=1,2,4$ のときにしか成り立たない. K_P の定義により $|I|\geq 2$ なので, 補題 3.4 の (1) を示すには, 後は $|I|=2$ の場合を排除すればよいことが分かる.

残る $|I|=2$ の場合, および補題 3.4 (2) の証明には, また別の手法が必要となる. 次に述べる Samelson 積はホモトピー可換性に関わる最も基本的な概念のひとつであり, その随伴である Whitehead 積に着目して考えるというのが以降の基本方針である. 以下, 基点つき位相空間 X, Y に対し, 基点つきホモトピー集合を $[X,Y]_*$ と記す. (つまり $[X,Y]_*$ とは, X から Y への基点を保つ連続写像全体の集合を, 基点を保つホモトピーによって割った商集合のことである.)

X を位相空間とし, $x_0\in X$ を基点としてループ空間 ΩX を考える. ΩX における交換子写像を $c\colon \Omega X\times\Omega X\to\Omega X$ と記す (つまり, ループの合成を $\cdot$ で, ループ γ に対する逆ループを γ^{-1} で表すなら, $c(\gamma_1,\gamma_2)=(\gamma_1^{-1}\cdot\gamma_2^{-1})\cdot(\gamma_1\cdot\gamma_2)$) とき, ウェッジ和 $\Omega X\vee\Omega X$ への c の制限は定値写像にホモトピックなので, 次の図式をホモトピー可換にする $\bar{c}$ が存在することが分かる.

$$\begin{tikzcd}
\Omega X\times\Omega X \arrow[r, "c"] \arrow[d, "p"'] & \Omega X \\
\Omega X\wedge\Omega X \arrow[ur, "\bar{c}"'] &
\end{tikzcd}$$

ここで $\Omega X\wedge\Omega X$ はスマッシュ積 $(\Omega X\times\Omega X)/(\Omega X\vee\Omega X)$ を, p は商写像を表す.

定義 3.9. X, Y, Z を基点つき位相空間とする. $\alpha=[f]\in[X,\Omega Z]_*$ と $\beta=[g]\in[Y,\Omega Z]_*$ に対し, $\langle\alpha,\beta\rangle\in[X\wedge Y,\Omega Z]_*$ を $\langle\alpha,\beta\rangle=[\bar{c}\circ(f\wedge g)]$ として定め, これを α と β の **Samelson 積**と呼ぶ.

補題 3.10. ΩX がホモトピー可換であることは $\langle\mathrm{id}_{\Omega X},\mathrm{id}_{\Omega X}\rangle=0$ となることと同値である. (右辺の 0 は定値写像の属するホモトピー類を表す.) また, このとき任意の基点つき位相空間 A, B と $\alpha\in[A,\Omega X]_*$, $\beta\in[B,\Omega X]_*$ に対し, $\langle\alpha,\beta\rangle=0$ が成り立つ.

以下, 基点つき位相空間 X に対し, その被約懸垂 $X\wedge S^1$ を ΣX で表す. また, よく知られている通り, $f\colon\Sigma X\to Y$ に対して $\mathrm{ad}(f)\colon X\to\Omega Y$ を $(\mathrm{ad}(f)(x))(t)=f(x,t)$ により定めれば, ad は基点を保つ連続写像のなす空間の間の同相を与える. ad がホモトピー集合に導く全単射を $\mathrm{ad}_*\colon[\Sigma X,Y]_*\to[X,\Omega Y]_*$ と記す.

定義 3.11. X, Y, Z を基点つき位相空間とする. $\alpha\in[\Sigma X,Z]_*$ と $\beta\in[\Sigma Y,Z]_*$ に対し, $[\alpha,\beta]\in[\Sigma(X\wedge Y),Z]_*$ を $[\alpha,\beta]=\mathrm{ad}_*^{-1}(\langle\mathrm{ad}_*(\alpha),\mathrm{ad}_*(\beta)\rangle)$ として定め, これを α と β の **Whitehead 積**と呼ぶ.

注 3.12. 定義から明らかなように, $\alpha\in[X,\Omega Z]_*$ と $\beta\in[Y,\Omega Z]_*$ に対し, $\langle\alpha,\beta\rangle=0$ は $[\mathrm{ad}_*^{-1}(\alpha),\mathrm{ad}_*^{-1}(\beta)]=0$ と同値である.

以上の準備の下で本題に戻るが, まず示すべきことは, K_P が $|I|=2$ となる missing face I をもつ場合に, ΩM がホモトピー非可換となることであった. 補題 3.10 と注 3.12 により, そのためには M における非自明な Whitehead 積を 1 つ見つければよい. 実はそのような Whitehead 積は有理ホモトピー論を用いて容易に検出できる. 実際, K_P の濃度 2 の missing face の枚数を ℓ とするとき, 定理 2.9 とその注により, $*\leq 5$ の範囲で $H^*(M;\mathbb{Q})\cong\mathbb{Q}[t_1,\dots,t_{m-n}]/(q_1,\dots,q_\ell)$

$(\deg t_1 = \cdots = \deg t_{m-n} = 2,\ \deg q_1 = \cdots = \deg q_\ell = 4)$ と書くことができる. 従って M の minimal Sullivan model は 4 次以下の範囲で $(\mathbb{Q}[t_1, \ldots, t_{m-n}] \otimes \Lambda(x_1, \ldots, x_\ell), d)$ $(\deg x_i = 3,\ dx_i = q_i,\ i = 1, \ldots, k)$ となり, 後は [FHT01, Proposition 13.16] を適用することで非自明な Whitehead 積を検出できる.

最後に, ΩM がホモトピー可換であるとき, 補題 3.4 の条件 (2) が成り立つことを示す. 補題 3.2 と補題 3.10, 注 3.12 により, K_P の相異なる missing face I_1, I_2 で $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$ となるものが取れるとき, Z_P には非自明な Whitehead 積が存在することを示せばよい. 帰謬法で示すため, Z_P の Whitehead 積は全て自明であるものと仮定する. $\ell = 1, 2$ に対し, 包含写像 $Z_{(K_P)_{I_\ell}} \to Z_{(K_P)_{I_1 \cup I_2}}$ を i_ℓ で, 包含写像 $Z_{(K_P)_{I_\ell}} \to Z_{(K_P)_{I_1}} \vee Z_{(K_P)_{I_2}}$ を j_ℓ で表すとき, 以下の図式はホモトピー可換となる. (I_ℓ は missing face なので, $Z_{(K_P)_{I_\ell}} \cong S^{2|I_\ell|-1} = \Sigma S^{2|I_\ell|-2}$ であることに注意.)

$$\begin{tikzcd}
\Sigma(S^{2|I_1|-2} \wedge S^{2|I_2|-2}) \arrow[d, "{[j_1, j_2]}"'] \arrow[dr, "{[i_1, i_2]}"] & \\
Z_{(K_P)_{I_1}} \vee Z_{(K_P)_{I_2}} \arrow[r, "i_1 \vee i_2"] & Z_{(K_P)_{I_1 \cup I_2}}
\end{tikzcd}$$

帰謬法の仮定と補題 3.6 により $[i_1, i_2] = 0$ であり, よく知られている通り $Z_{(K_P)_{I_1}} \times Z_{(K_P)_{I_2}}$ は $[j_1, j_2]$ の homotopy cofiber なので, 以下の図式をホモトピー可換にする μ の存在が分かる.

$$\begin{tikzcd}
Z_{(K_P)_{I_1}} \vee Z_{(K_P)_{I_2}} \arrow[r, "i_1 \vee i_2"] \arrow[d, "\text{inclusion}"'] & Z_{(K_P)_{I_1 \cup I_2}} \arrow[d, equal] \\
Z_{(K_P)_{I_1}} \times Z_{(K_P)_{I_2}} \arrow[r, "\mu"] & Z_{(K_P)_{I_1 \cup I_2}}
\end{tikzcd}$$

ここで $\ell = 1, 2$ に対して $H^{2|I_\ell|-1}(Z_{(K_P)_{I_\ell}}) \cong H^{2|I_\ell|-1}(S^{2|I_\ell|-1}) \cong \mathbb{Z}$ の生成元を取り v_ℓ と置けば, 補題 3.6 により $i_\ell^*\colon H^*(Z_{(K_P)_{I_1 \cup I_2}}) \to H^*(Z_{(K_P)_{I_\ell}})$ は全射なので, $i^*(u_\ell) = v_\ell$ となる $u_\ell \in H^{2|I_\ell|-1}(Z_{(K_P)_{I_1 \cup I_2}})$ が取れる. そこで $\mu^*(u_1 u_2)$ を考えると,

$$\mu^*(u_1 u_2) = \mu^*(u_1)\mu^*(u_2) = (v_1 \times 1) \cdot (1 \times v_2) = v_1 \times v_2 \neq 0$$

と計算できることが容易に分かり, 特に $u_1 u_2 \neq 0$ となる. ところが $\deg u_1 u_2 > \dim Z_{(K_P)_{I_1 \cup I_2}}$ なので, これは起こり得ない.

4 Samelson 積の計算

引き続き, M を P 上の擬トーリック多様体, λ を対応する特性行列とし, n は P の次元, m は P の側面の枚数とする. 前節では ΩM がホモトピー可換のとき $P \cong (\Delta^3)^k$ とならねばならないことが示された. 注 2.12 により λ は定理 2.11 の (1) の形かつ $a_{ii} = {}^t(1,1,1)$ $(i = 1, \ldots, k)$ を満たすものとしてよいので, 後はこの形の λ について, $\Omega M(\lambda)$ のホモトピー可換性と $(1,1,1)a_{ij} \equiv 0 \bmod 2$ $(i \neq j)$ が同値であることを示せばよい.

補題 3.10 により, ΩM がホモトピー可換であることは $\langle \mathrm{id}_{\Omega M}, \mathrm{id}_{\Omega M} \rangle = 0$ となることと同値である. 一方, 補題 3.1 と $P \cong (\Delta^3)^k$ により, 今 $\Omega M \simeq (\Omega S^7)^k \times T^k$ となっている. この直積分解を用いることで, 計算すべき Samelson 積をより小さく扱いやすいものに分解していくというのが本節の方針である.

$\Omega M \simeq (\Omega S^7)^k \times T^k$ における各成分の入射を $a_i\colon S^1 \to \Omega M$, $b_i\colon \Omega S^7 \to \Omega M$ $(i = 1, \ldots, k)$ と記す. 鍛冶氏と岸本氏の計算 [KK10, Proposition 1] により, まずは次のことが分かる.

補題 4.1. $\langle \mathrm{id}_{\Omega M}, \mathrm{id}_{\Omega M} \rangle = 0$ となるのは $\langle a_i, a_j \rangle = 0$, $\langle a_i, b_j \rangle = 0$, $\langle b_i, b_j \rangle = 0$ $(i, j = 1, \ldots, k)$ となることと同値である.

注 4.2. S^1 および ΩS^7 がホモトピー可換であることを用いれば, $\langle a_i, a_j \rangle$ および $\langle b_i, b_j \rangle$ は常に 0 となることが容易に分かる. 従って, 結局のところ $\langle a_i, b_j \rangle$ のみが問題となる.

さらに, Ganea による補題を用いれば, $\langle a_i, b_j \rangle$ をより小さい空間の間の写像に還元できる. $E\colon S^6 \to \Omega S^7$ を $\mathrm{id}_{S^7}\colon \Sigma S^6 \to S^7$ の随伴とし, $\bar{b}_i\colon S^6 \xrightarrow{E} \Omega S^7 \xrightarrow{b_i} \Omega M$ と定めれば, [Gan67, Lemma 2.1] により次の補題が得られる.

補題 4.3. $\langle a_i, b_j \rangle = 0$ は $\langle a_i, \bar{b}_j \rangle = 0$ と同値である.

そこで a_i および $\bar{b}_j$ の随伴をそれぞれ α_i, β_j と記し, Whitehead 積 $[\alpha_i, \beta_j] \in \pi_8(M)$ を考える. これは $\langle a_i, \bar{b}_j \rangle$ の随伴なので, 以上の補題をまとめて次を得る.

補題 4.4. $\langle \mathrm{id}_{\Omega M}, \mathrm{id}_{\Omega M} \rangle = 0$ となるのは $[\alpha_i, \beta_j] = 0$ $(i, j = 1, \ldots, k)$ となることと同値である.

後は Barrat, James, Stein [BJS60] の手法を参考に, $[\alpha_i, \beta_j]$ の計算を行う. 以下, 連続写像 $f\colon X \to Y$ に対してその homotopy cofiber (つまり被約写像錐) を C_f と記す.

前々節で述べた擬トーリック多様体の構成法により, 主 T^k 束 $\pi\colon Z_P \to M$ が存在することを思い出してほしい. 今 $Z_P = (S^7)^k$ なので, $\pi\colon (S^7)^k \to M$ である. この π に対する homotopy cofiber C_π を考える. $\beta = \beta_1 \vee \cdots \vee \beta_k\colon (S^7)^{\vee k} \to M$ と置くとき, これは π の 13–skeleton への制限に等しいので, 自然に $\tilde{\beta} = \tilde{\beta}_1 \vee \cdots \vee \tilde{\beta}_k\colon ((D^8)^{\vee k}, (S^7)^{\vee k}) \to (C_\pi, M)$ へと拡張され, 以下の可換図式が得られる. 上 2 段は空間対に対するホモトピー完全列の一部であり, 下の垂直方向の射 2 つは商写像により誘導される準同型を表す.

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_9((D^8)^{\vee k}, (S^7)^{\vee k}) \arrow[r, "\delta", "\cong"'] \arrow[d, "\tilde{\beta}_*"'] \arrow[dd, bend left, "\cong"] & \pi_8((S^7)^{\vee k}) \arrow[d, "\beta_*"', "\cong"] \\
\pi_9(C_\pi) \arrow[r, "\iota_*"] \arrow[d, "\rho_*"'] & \pi_9(C_\pi, M) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\rho_*"'] & \pi_8(M) \\
\pi_9(C_\pi/M) \arrow[r, equal] & \pi_9(C_\pi/M) \arrow[r, equal] & \pi_9((S^8)^{\vee k})
\end{tikzcd}$$

我々の目標である $[\alpha_i, \beta_j]$ は $\pi_8(M)$ の元であるが, この図式によりある $\epsilon_{ij} \in \pi_9((D^8)^{\vee k}, (S^7)^{\vee k})$ を用いて $[\alpha_i, \beta_j] = -\beta_* \circ \delta(\epsilon_{ij})$ と表せることが分かる. 一方 $\delta([\alpha_i, \tilde{\beta}_j]) = -[\alpha_i, \beta_j]$ でもあるので,

$$\delta([\alpha_i, \tilde{\beta}_j] - \tilde{\beta}_*(\epsilon_{ij})) = -[\alpha_i, \beta_j] - \beta_* \circ \delta(\epsilon_{ij}) = 0$$

となり, $[\alpha_i, \tilde{\beta}_j] - \tilde{\beta}_*(\epsilon_{ij}) = \iota_*(\zeta_{ij})$ となるような $\zeta_{ij} \in \pi_9(C_\pi)$ が取れることが分かる. 次の補題は $\rho_*([\alpha_i, \tilde{\beta}_j]) = 0$ であることに注意すれば容易に示せる.

補題 4.5. $[\alpha_i, \beta_j] = 0$ は $\rho_*(\zeta_{ij}) = 0$ と同値である.

また, 次の補題は戸田氏による計算 [Tod56, (5.8)] から直ちに得られる.

補題 4.6. $\pi_9(C_\pi, M)$ は以下のように記述できる.

$$\pi_9(C_\pi, M) = \mathbb{Z}\left\{ [\alpha_i, \tilde{\beta}_j] \;\middle|\; i, j = 1, \ldots, k \right\} \oplus \mathbb{Z}_2\left\{ \tilde{\beta}_i \circ \tilde{\eta} \;\middle|\; i = 1, \ldots, k \right\}.$$

ここで $R\{x_1, \ldots, x_\ell\}$ は $x_1, \ldots, x_\ell$ で生成される自由 R 加群を, $\mathbb{Z}_2$ は剰余環 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を表し, $\tilde{\eta}\colon (D^9, S^8) \to (D^8, S^7)$ は $\pi_8(S^7) \cong \mathbb{Z}/2$ の生成元 η の拡張を表す.

一方, 主 T^k 束 $\pi\colon (S^7)^k \to M$ の存在から, ホモトピーファイバー列 $(S^7)^k \xrightarrow{\pi} M \to (\mathbb{C}P^\infty)^k$ が得られる. 当然 $M \to (\mathbb{C}P^\infty)^k$ は homotopy cofiber からの写像 $C_\pi \to (\mathbb{C}P^\infty)^k$ に拡張できるのだが, その homotopy fiber は $(S^1)^k \star (S^7)^k$ となることが示せる. さらに入射 $(S^1)^k \star (S^7)^k \to C_\pi$ について同様の構成を行えば, 次のホモトピー可換図式が得られる.

$$\begin{tikzcd}
(S^7)^k \arrow[r, "\pi"] & M \arrow[r, "\simeq_7"] \arrow[d] & (\mathbb{C}P^\infty)^k \arrow[d, equal] \\
(S^1)^k \star (S^7)^k \arrow[r, "j"] & C_\pi \arrow[r, "\simeq_9"] \arrow[d] & (\mathbb{C}P^\infty)^k \arrow[d, equal] \\
 & C_j \arrow[r, "\simeq_{10}"] & (\mathbb{C}P^\infty)^k
\end{tikzcd}$$

ここで連続写像 $X \to Y$ が d 次以下のコホモロジー環に同型を導くことを $X \xrightarrow{\simeq_d} Y$ で表している. 中段のホモトピーファイバー列に対する完全列を考えれば, $\pi_9(C_\pi) \cong \pi_9((S^1)^k \star (S^7)^k) \cong \mathbb{Z}^{k^2}$ となることが分かる. 今後の都合のためより具体的に書いておくと, 今 C_j の 10–skeleton は $(S^1)^k \star (S^7)^k$ の 9–skeleton $(S^9)^{\vee k^2}$ の錐を C_π に貼り付けたものなので, 10–skeleton までにおいては

$$C_j = C_\pi \cup_{\gamma_{11}} e^{10} \cup_{\gamma_{12}} \cdots \cup_{\gamma_{kk}} e^{10}$$

と書くことができ, この γ_{ij} $(i, j = 1, \ldots, k)$ らが $\pi_9(C_\pi) \cong \mathbb{Z}^{k^2}$ の基底を与えている.

補題 4.7. $\rho_*(\zeta_{ij}) = 0$ $(i, j = 1, \ldots, k)$ は $\rho_*(\gamma_{ij}) = 0$ $(i, j = 1, \ldots, k)$ と同値である.

Proof. $\iota_*(\zeta_{ij})$ $(i, j = 1, \ldots, k)$ の生成する $\pi_9(C_\pi, M)$ の部分加群を A と記す. $\pi_9(M) \cong \pi_9((S^7)^k)$ は有限群なので, 対の完全列を考えることにより, $\iota_*\colon \pi_9(C_\pi) \to \pi_9(C_\pi, M)$ は単射であることが分かる. また, ζ_{ij} の取り方により $\iota_*(\zeta_{ij}) = [\alpha_i, \tilde{\beta}_j] - \tilde{\beta}_*(\epsilon_{ij})$ であり, $\tilde{\beta}_*$ の定義域もまた有限群であることから, $\tilde{\beta}_*(\epsilon_{ij})$ は捩れ元である. このことと補題 4.6 により A は $\pi_9(C_\pi, M)$ の極大自由部分加群であり, $A \subseteq \operatorname{Im} \iota_*$ であることから $A = \operatorname{Im} \iota_*$ が分かる. 従って ζ_{ij} $(i, j = 1, \ldots, k)$ らもまた $\pi_9(C_\pi)$ の基底となるので, 補題の主張が従う. $\square$

以上のことを用いれば, Whitehead 積 $[\alpha_i, \beta_j]$ らの自明性を, コホモロジーにおける計算に帰着することができる. 定理 2.9 とその注により, $H^*(M) \cong \mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_k]/(q_1, \ldots, q_k)$ $(\deg t_i = 2$, $\deg q_i = 8$, $i = 1, \ldots, k)$ と書けることに注意.

命題 4.8. $H^*(M) \cong \mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_k]/(q_1, \ldots, q_k)$ $(\deg t_i = 2$, $\deg q_i = 8$, $i = 1, \ldots, k)$ と表すとき, $[\alpha_i, \beta_j] = 0$ $(i, j = 1, \ldots, k)$ は $\mathbb{Z}_2[t_1, \ldots, t_k]$ において $\mathrm{Sq}^2 q_i = 0$ $(i = 1, \ldots, k)$ となることと同値である.

Proof. 補題 4.7 の直前に述べた通り $C_j = C_\pi \cup_{\gamma_{11}} e^{10} \cup_{\gamma_{12}} \cdots \cup_{\gamma_{kk}} e^{10}$ (dim ≤ 10) なので,

$$\begin{aligned} C_j/M &= (C_\pi/M) \cup_{\rho_*(\gamma_{11})} e^{10} \cup_{\rho_*(\gamma_{12})} \cdots \cup_{\rho_*(\gamma_{kk})} e^{10} \\ &= (S^8 \vee \cdots \vee S^8) \cup_{\rho_*(\gamma_{11})} e^{10} \cup_{\rho_*(\gamma_{12})} \cdots \cup_{\rho_*(\gamma_{kk})} e^{10} \quad (\dim \leq 10) \end{aligned}$$

となる. 従って, 10–胞体の貼り付け写像である $\rho_*(\gamma_{ij})$ らは Steenrod 作用素 $\mathrm{Sq}^2 \colon H^8(C_j/M; \mathbb{Z}_2) \to H^{10}(C_j/M; \mathbb{Z}_2)$ により検出できることが分かる. つまり, 任意の $i, j = 1, \ldots, k$ に対して $\rho_*(\gamma_{ij}) = 0$ となることは, $\mathrm{Sq}^2 \colon H^8(C_j/M; \mathbb{Z}_2) \to H^{10}(C_j/M; \mathbb{Z}_2)$ が 0 となることと同値である.

一方, 商写像から誘導される準同型 $H^*(C_j/M; \mathbb{Z}_2) \to H^*(C_j; \mathbb{Z}_2)$ は $* \leq 10$ で明らかに単射であり, また $H^*(C_j; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[t_1, \ldots, t_k]$ $(* \leq 10)$ であって, $H^8(C_j/M; \mathbb{Z}_2)$ の像は $q_1, \ldots, q_k$ で生成される部分加群に一致する. つまり $\mathrm{Sq}^2 \colon H^8(C_j/M; \mathbb{Z}_2) \to H^{10}(C_j/M; \mathbb{Z}_2)$ が 0 となることは, $\mathbb{Z}_2[t_1, \ldots, t_k]$ における Sq^2 が $\mathbb{Z}_2\{q_1, \ldots, q_k\}$ 上で 0 となることに同値であり, これは定理の後者の条件に一致している. □

後は実際に $\mathrm{Sq}^2 q_i$ の計算を行うだけであり, 定理 2.11 はもはや容易に示すことができる.

References

[BJS60] M.G. Barratt, I.M. James, and N. Stein, Whitehead products in projective spaces, J. Math. Mech. **9** (1960), 813-819.

[BP02] V.M. Buchstaber and T.E. Panov, Torus Actions and Their Applications in Topology and Combinatorics, Univ. Lecture Ser. **24**, Amer. Math. Soc., Providence, 2002.

[DJ91] M.W. Davis and T. Januszkiewicz, Convex polytopes, Coxeter orbifolds, and torus action, Duke Math. J. **62** (1991), no. 2, 417-451.

[FHT01] Y. Félix, S. Halperin, and J.-C. Thomas, Rational Homotopy Theory, Graduate Texts in Mathematics **205**, Springer-Verlag, New York, 2001.

[Gan67] T. Ganea, On the loop spaces of projective spaces, J. Math. Mech. **16** (1967), 853-858.

[KK10] S. Kaji and D. Kishimoto, Homotopy nilpotency in p-regular loop spaces, Math. Z. **264** (2010), no. 1, 209-224.

[Tod56] H. Toda, On the double suspension E^2, J. Inst. Polytech. Osaka City Univ. Ser. A **7** (1956), 103-145.

Graduate School of Science
Osaka Metropolitan University
Sakai 599-8531
JAPAN
E-mail address: `s.hasui@omu.ac.jp`