Lie 代数の Grading と基本群

大阪大学　理学研究科　数学専攻修士二年　下地　泰斗 *
Taito Shimoji
Department of Mathematics, Osaka University

2024 年 8 月 30 日

概 要

本稿は 2024 年度 RIMS 共同研究「変換群論とその進展」にて行われた講演「Lie 代数の Grading と基本群」の講究録である.

M を非特異複素代数多様体とする. その基本群 $\Gamma = \pi_1(M, *)$ は有限生成群であることが一般に知られており, 以下は「**Serre の問題**」と呼ばれている.

問題: 任意の有限生成群は非特異複素代数多様体の基本群として実現できるか？

本稿では, 筆者の研究対象である (冪零)Lie 代数の Grading を調べることにより, この問題の反例を得られることを説明し, 次の表示で定義される有限生成群

$$L_4 := \left\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \,\middle|\, \begin{array}{l} [x_1, x_i] = x_{i+1} \ (i = 2, 3) \\ 1 = [x_1, x_4] = [x_j, x_k] \ (2 \leq j < k \leq 4) \end{array} \right\rangle$$

が実際に反例となることを紹介する.

謝辞: 本研究集会の世話人である津山工業高等専門学校 田村俊輔氏にお礼申し上げます. また, 本研究の要となる論文 [2] や本研究集会の情報提供をして下さった指導教員の大阪大学 糟谷久矢氏にお礼申し上げます.

1　研究対象

この章では, 筆者の研究対象である Lie 代数とその Grading についての基本事項を, 具体例を交えて復習する. まず, **$\mathbb{K}$-Lie 代数**とは, 交代性とヤコビ等式を満たす双線形な二項演算 (リーブラケット) を備えた体 $\mathbb{K}(= \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする) 上のベクトル空間のことである. つまり, $\mathbb{K}$ ベクトル空間 $\mathfrak{g}$ が Lie 代数であるとは, 双線形写像 $[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}; (X, Y) \mapsto [X, Y]$ で

$$\text{交代性} : [X, Y] = -[Y, X]. \qquad \text{ヤコビ等式} : [X, [Y, Z]] = [X, [Y, Z]] + [Y, [X, Z]].$$

を満たすものが備わっているときをいう. $\mathfrak{g}$ が有限次元のとき, 基底 $e_1, \ldots, e_n (n = \mathrm{dim}\mathfrak{g})$ の行き先

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^{n} C_{ij}^k e_k \quad (1 \leq i < j \leq n)$$

によって Lie 代数の構造が決まることに注意されたい. C_{ij}^k が全て有理数であるとき, $e_1, \ldots, e_n$ を基底とする $\mathbb{Q}$-Lie 代数 $\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}}$ を用いて

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{K}$$

---

* u215629i@ecs.osaka-u.ac.jp

と書ける. 本稿を通して以下の具体例を扱う.

$$\mathfrak{n}_3(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| \ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

これは, 行列の交換子積 $[X, Y] := XY - YX$ によって $\mathbb{R}$-Lie 代数となる. 行列単位 e_{ij} を用いると $e_1 = e_{12}, e_2 = e_{23}, e_3 = e_{13}$ が基底として取れ, リーブラケットは

$$[e_1, e_2] = e_3, \text{他}\ 0$$

である. したがって, $\mathfrak{n}_3(\mathbb{R})$ の成分を $\mathbb{Q}$ に制限した $\mathfrak{n}_3(\mathbb{Q})$ を用いて

$$\mathfrak{n}_3(\mathbb{R}) = \mathfrak{n}_3(\mathbb{Q}) \otimes \mathbb{R}$$

と表せる. この Lie 代数は**ハイゼンベルグ Lie 代数**と呼ばれている.

1.1 Lie 代数の Grading

$\mathfrak{g}$ を $\mathbb{K}$-Lie 代数とする. $\mathfrak{g}$ の Grading とは, 整数全体で添え字つけられた直和分解で, リーブラケットに適合するもののことである. すなわち,

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_i, \quad [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j} \ (\forall i, j \in \mathbb{Z})$$

が成り立つときをいう. 特に, すべての $i \leq 0 (i \geq 0)$ に対して $\mathfrak{g}_i = \{0\}$ が成り立つとき, この Grading を positive(negative) という. 定義から, 有限次元リー代数に positive(negative)Grading が入ると, リーブラケットに適合するという条件から, 冪零であることも分かる.

1.1.1 例: $\mathfrak{n}_3(\mathbb{R})$ の (negative)Grading

$\mathbb{R}$-Lie 代数 $\mathfrak{n}_3(\mathbb{R}) = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle : [e_1, e_2] = e_3$ に Grading を入れる. i 番目の部分空間の $\mathfrak{g}_i$ の基底が $e_1^i, ..., e_{l_i}^i$ であるとき, $\mathfrak{g}_i = \langle e_1^i, ..., e_{l_i}^i \rangle$ と書くと, $\mathfrak{n}_3(\mathbb{R})$ には例えば次のような Grading が入る.

$$(1) : \langle e_1, e_2 \rangle_{-1} \oplus \langle e_3 \rangle_{-2}$$

$$(2) : \langle e_1 \rangle_{-1} \oplus \langle e_2 \rangle_{-2} \oplus \langle e_3 \rangle_{-3}$$

これらを一般化すると, (1),(2) の Grading は整数 $m, n \geq 1$ を用いて,

$$(1) : \langle e_1, e_2 \rangle_{-m} \oplus \langle e_3 \rangle_{-2m}$$

$$(2) : \langle e_1 \rangle_{-n} \oplus \langle e_2 \rangle_{-m} \oplus \langle e_3 \rangle_{-n-m}$$

となる. $\mathfrak{n}_3(\mathbb{R})$ に入る非自明な (自明な Grading は全体が 0 で添え字つけられたもの)Grading はこの 2 つしかないことも分かる.

1.2 Lie 代数のコホモロジーと誘導される Grading

この節では有限次元 Lie 代数に negative Grading が存在すると, そのコホモロジーには (ベクトル空間の)positive Grading が誘導されることを説明する.

有限次元 $\mathbb{K}$-Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に negative Grading $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \leq -1} \mathfrak{g}_i$ が存在すると仮定する. 各部分空間 $\mathfrak{g}_i$ $(i \leq -1)$ から基底を取り,

$$\mathfrak{g}_i = \langle e_1^i, \ldots, e_{l_i}^i \rangle \quad (l_i = \mathrm{dim}\mathfrak{g}_i)$$

と表示し, $e_1^i, \ldots, e_{l_i}^i$ たちの双対基底をそれぞれ $f_1^i, \ldots f_{l_i}^i$ とする. 各 $k \geq 1$ に対して, $\mathfrak{g}$ 上の j 次交代形式全体 $\bigwedge^j \mathfrak{g}^*$ の部分空間 C_k^j を,

$$C_k^j := \left\langle f_{i_1}^{t_1}, \ldots, f_{i_j}^{t_j} \middle| k = -(t_1 + \cdots + t_j) \right\rangle$$

と定めると,

$$\bigwedge^j \mathfrak{g}^* = \bigoplus_{k \geq 1} C_k^j$$

が成立し, 交代形式全体には (ベクトル空間の)positive Grading が入ることが言える. さらに, 写像

$$d : \bigwedge^j \mathfrak{g}^* \to \bigwedge^{j+1} \mathfrak{g}^* \quad df(X_1, \ldots, X_{j+1}) := \sum_{n<m} (-1)^{n+m} f([X_n, X_m], X_1, \ldots, \widehat{X_n}, \ldots, \widehat{X_m}, \ldots, X_j)$$

を考えると $(\bigwedge^{\bullet} \mathfrak{g}^*, d)$ はコチェイン複体となり, すべての $k \geq 1$ で $d(C_k^j) \subset d(C_k^{j+1})$ が成り立つため, $(C_k^{\bullet}, d)$ もコチェイン複体である. したがって, j 次コホモロジー $H^j(\mathfrak{g})$ $(j \geq 1)$ と $H^j(\mathfrak{g})$ の部分集合 H_k^j を

$$H^j(\mathfrak{g}) := \begin{cases} \dfrac{\mathrm{Ker}(d : \bigwedge^j \mathfrak{g}^* \to \bigwedge^{j+1} \mathfrak{g}^*)}{\mathrm{Im}(d : \bigwedge^{j-1} \mathfrak{g}^* \to \bigwedge^j \mathfrak{g}^*)} & j \geq 2 \\ \mathrm{Ker}(d : \mathfrak{g}^* \to \bigwedge^2 \mathfrak{g}^*)/\{0\} & j = 1 \end{cases}$$

$$H_k^j := \begin{cases} \dfrac{\mathrm{Ker}(d : C_k^j \to C_k^{j+1})}{\mathrm{Im}(d : C_k^{j-1} \to C_k^j)} & j \geq 2 \\ \mathrm{Ker}(d : C_k^1 \to C_k^2)/\{0\} & j = 1 \end{cases}$$

と定めると,

$$H^j(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{k \geq 1} H_k^j$$

が成立する. よって, コホモロジーに (ベクトル空間の)positive Grading が誘導された.

1.2.1 例: $\mathfrak{n}_3(\mathbb{R})$ のコホモロジーと誘導される (positive)Grading

3.1.1 の negative Grading の例を用いて, $\mathfrak{n}_3(\mathbb{R})$ のコホモロジーに誘導される positive Grading を観察する.

$$(1) : \langle e_1, e_2 \rangle_{-1} \oplus \langle e_3 \rangle_{-2}$$

を考えると, 双対空間 $\mathfrak{n}_3(\mathbb{R})^*$ の Grading は, C_k^1 の定義から,

$$\mathfrak{n}_3(\mathbb{R})^* = C_1^1 \oplus C_2^1 = \langle f_1, f_2 \rangle_1 \oplus \langle f_3 \rangle_2$$

ここで, f_1, f_2, f_3 はそれぞれ e_1, e_2, e_3 の双対基底である. また, 2, 3 次交代形式に誘導される positive Grading は,

$$\bigwedge^2 \mathfrak{n}_3(\mathbb{R})^* = C_2^2 \oplus C_3^2 = \langle f_1 \wedge f_2 \rangle_2 \oplus \langle f_1 \wedge f_3, f_2 \wedge f_3 \rangle_3$$

$$\bigwedge^3 \mathfrak{n}_3(\mathbb{R})^* = C_4^3 = \langle f_1 \wedge f_2 \wedge f_3 \rangle_4$$

$d(C_k^j) \subset C_k^{j+1}$ がすべての $j, k \geq 1$ で成立することから, 直ちに

$$df_1 = df_2 = 0,\ d(f_1 \wedge f_2) = d(f_1 \wedge f_3) = d(f_2 \wedge f_3) = 0,\ d(f_1 \wedge f_2 \wedge f_3) = 0$$

が言える. よって, df_3 のみを計算すればよい. d の定義より, すべての $f \in \mathfrak{n}_3(\mathbb{R})^*, X, Y \in \mathfrak{n}_3(\mathbb{R})$ に対して,

$$df(X, Y) = -f([X, Y])$$

となるため, $df_3 = -f_1 \wedge f_2$ が分かる. したがって, コホモロジーと, それに誘導される positive Grading は

$$\begin{aligned} H^1(\mathfrak{n}_3(\mathbb{R})) &= \langle [f_1], [f_2] \rangle_1 \\ H^2(\mathfrak{n}_3(\mathbb{R})) &= \langle [f_1 \wedge f_3], [f_2 \wedge f_3] \rangle_3 \\ H^3(\mathfrak{n}_3(\mathbb{R})) &= \langle [f_1 \wedge f_2 \wedge f_3] \rangle_4 \end{aligned}$$

となる.

2 Lie 代数の Grading と基本群

この章では, Lie 代数の Grading と非特異複素代数多様体の基本群との関係を述べる. まず, マルセフ完備化について簡単に説明し, 筆者の研究の要である Morgan の結果 [2] を紹介する.

2.1 Malcev 完備化と冪零リー代数

有限生成群から有理 Lie 代数を構成する方法が知られており, これは **Malcev 完備化**と呼ばれている ([3], [4]). [5] では以下が知られている.

Theorem 2.1. $\mathfrak{g}$ をある有理リー代数 $\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}}$ と $\mathbb{R}$ とのテンソルで書ける $\mathbb{R}$-冪零 *Lie* 代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{R}$ とする. このとき, ある冪零有限生成群 Γ が存在して, Γ の *Malcev* 完備化が $\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}}$ となる.

この定理はリー群とリー代数の対応でよく知られている指数写像や冪零 Lie 代数の上三角行列への埋め込みなどを利用して示されている. ここでは, 詳しい証明は省略して例を観察することで納得してもらうことにする.

例: 離散ハイゼンベルグ群のマルセフ完備化

以下の集合は, 行列の積によって群になり, これは**ハイゼンベルグ群**と呼ばれている.

$$H_3(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| \ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

ハイゼンベルグ群の成分を整数に制限したもの

$$\mathfrak{n}_3(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| \ a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$$

は有限生成群であり, **離散ハイゼンベルグ群**という. 生成元は, 単位行列 I, 行列単位 e_{ij} を用いた行列

$$x_1 := I + e_{12},\ x_2 := I + e_{23},\ x_3 := I + e_{13}$$

の 3 つである．この群の Malcev 完備化は, 指数写像で写したものがそれぞれ生成元 x_1, x_2, x_3 に移るような行列たちで生成される有理 Lie 代数

$$\mathfrak{n}_3(\mathbb{Q}) = \left\langle X_1 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, X_2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, X_3 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

であり, 関係式 (リーブラケット) は $[X_1, X_2] = X_3$, 他 0 となる．

2.2 非特異代数多様体の基本群の Malcev 完備化

M を非特異複素代数多様体とする．この基本群 $\Gamma = \pi_1(M, *)$ は有限生成群であることがよく知られいる．この有限生成群 Γ に Malcev 完備化を行うと, 対応する Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は次の性質を持つことが [2] により示された．

Theorem 2.2. Γ の *Malcev* 完備化 $\mathfrak{g}$ には以下の性質を満たす *negative Grading* $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \leq -1} \mathfrak{g}_i$ が存在する．

- $\dim \mathfrak{g}_i \in 2\mathbb{Z} \quad (i \in 2\mathbb{Z}+1)$
- $H^1(\mathfrak{g}) = H^1_1 \oplus H^1_2$
- $H^2(\mathfrak{g}) = H^2_2 \oplus H^3_2 \oplus H^2_4$
- $\dim H^1_1, \dim H^3_2 \in 2\mathbb{Z}$
  ただし, H^j_k はコホモロジーに誘導される *Grading* を構成する部分空間である

この性質を満たす negative Grading を **good な Grading** と呼ぶことにする．

2.3 問題

非特異複素代数多様体の基本群は有限生成であることがよく知られているが, 逆問題として Serre は次のような問題を考えた (Serre の問題)．

Serre の問題

任意の有限生成群は非特異複素代数多様体の基本群として実現できるか？

この問題の出発点は有限生成群であるので, Theorem2.1, 2.2 を組み合わせて対偶を考えると以下が分かる．

Corollary 2.3: ある冪零 $\mathbb{R}$-Lie 代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{R}$ が good な Grading を持たなければ, 基本群の Malcev 完備化が $\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}}$ となるような非特異複素代数多様体 M は存在しない. したがって, Theorem2.1 によって見つかる有限生成群は, 非特異複素代数多様体の基本群として現れない．

すなわち, **冪零 Lie 代数の Grading を調べることにより Serre の問題の反例が得られる**ことが分かった．ここで, 次の問題が考えられる．

問題

good Grading を持たないような冪零リー代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{R}$ は存在するか？存在するならこれに対応する有限生成群 (Theorem2.1 より存在する) の生成元と関係式, つまり表示を与えよ．

次章は, この問題を**具体的に例を構成することで示す**．

3　主定理と証明の概略

この章では主定理と証明の概略を述べる.

Theorem 3.1 (主定理)**.** 以下の表示を持つ有限生成群 L_4 は非特異複素代数多様体の基本群として現れない.

$$L_4 := \left\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \,\middle|\, \begin{array}{l} [x_1, x_i] = x_{i+1} \ (i = 2, 3) \\ 1 = [x_1, x_4] = [x_j, x_k] \ (2 \leq j < k \leq 4) \end{array} \right\rangle$$

証明は, L_4 のMalcev 完備化である $\mathcal{L}_4$ がgood な Grading を持たないことを確認することで完了する. 以下概略を述べる.

Step1

L_4 の Malcev 完備化 $\mathcal{L}_4 = \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle$: $[e_1, e_i] = e_{i+1} (i = 2, 3)$ の negative Grading を全て求める.

任意の負の整数 $m \geq n$ に対し, 以下が $\mathcal{L}_4$ のすべての negative Grading である.

$$\langle X_1, X_2 \rangle_m \oplus \langle X_3 \rangle_{2m} \oplus \langle X_4 \rangle_{3m} \tag{1}$$

$$\langle X_1 \rangle_m \oplus \langle X_2 \rangle_n \oplus \langle X_3 \rangle_{m+n} \oplus \langle X_4 \rangle_{2m+n} \tag{2}$$

ここで, $X_i (1 \leq i \leq 4)$ は e_i たちの線形結合で, 新たな基底 X_i に関するリーブラケットは

$$[X_1, X_i] = X_{i+1}, \text{他 } 0$$

を満たす. また, X_i の双対基底を F_i とすると, これらの Grading から誘導されるコホモロジーの (ベクトル空間の)Grading はそれぞれ次のようになる:

(1) のコホモロジー : $H^1(\mathcal{L}_4) = \langle [F_1], [F_2] \rangle_{-m}, H^2(\mathcal{L}_4) = \langle [F_1 \wedge F_4], [F_2 \wedge F_3] \rangle_{-4m}$

(2) のコホモロジー : $H^1(\mathcal{L}_4) = \langle [F_1] \rangle_{-m} \oplus \langle [F_2] \rangle_{-n}, H^2(\mathcal{L}_4) = \langle [F_1 \wedge F_4] \rangle_{-3m-n} \oplus \langle [F_2 \wedge F_3] \rangle_{-m-2n}$

Step2

Step1 で求めた Grading が good かどうかを調べる.

good な Grading の定義は 4.2 を参照されたい. 簡単に述べると,「1, 2 次のコホモロジーに誘導される positive Grading の次数がそれぞれ 2 以下, 2 以上 4 以下となるような, 奇数番目の部分空間の次元が偶数の negative Grading」のことである. Step1 の 2 種類の Grading が good であるためには,

- 奇数番目の空間の次元が偶数
- コホモロジー $H^1(\mathcal{L}_4), H^2(\mathcal{L}_4)$ の元がそれぞれ次数 2,4 以下である

を満たす必要があるが, どのような $m, n \leq -1$ を選んでも上の 2 つの条件を満たさないため, $\mathcal{L}_4$ は good な Grading を持たない. したがって, Corollary 2.3 より L_4 はどんな非特異複素代数多様体の基本群とも同型にならないことが言える.

4 予想と今後の課題

主定理で得られた Serre の問題の反例 L_4 の Malcev 完備化 $\mathcal{L}_4 = \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle$ のリーブラケットは

$$[e_1, e_i] = e_{i+1} (i = 2, 3)$$

で与えられていた. この関係式を自然に n 次元に拡張すると, n 次元リー代数 $\mathcal{L}_n = \langle e_1, ..., e_n \rangle$ で

$$[e_1, e_i] = e_{i+1} (1 \leq i \leq n-1)$$

を満たすものを考えられる. これに対応する有限生成群 L_n は次の表示を持つ

$$L_n := \left\langle x_1, ..., x_n \,\middle|\, \begin{array}{l} [x_1, x_i] = x_{i+1} \ (1 \leq i \leq n-1) \\ 1 = [x_1, x_n] = [x_j, x_k] \ (2 \leq j < k \leq n) \end{array} \right\rangle$$

予想

$\mathcal{L}_n$ は good な Grading を持たない. すなわち, L_n はどんな非特異複素代数多様体の基本群にも現れない.

今後の課題

ある有理リー代数 $\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}}$ と $\mathbb{R}$ とのテンソルで書ける冪零リー代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{R}$ で good な Grading を持たないものを分類し, これらと対応する有限生成群を決定することにより Serre の問題の反例のクラスを構成する.

上に挙げた予想や課題は, Serre の反例を構成することに着目したが

- good な Grading を持つ冪零リー代数から得られる複素多様体に関する (何かしらの) 幾何的な情報
- Serre の問題の反例たちの幾何群論的な性質 ([6] を参考に調べる)
- 有理リー代数と $\mathbb{R}$ とのテンソルで書けないような冪零リー代数 (7 次元以上で存在することがよく知られている) の Grading

に関する研究も並行して進めていきたい.

参考文献

[1] Donu Arapura. Fundamental Groups of Smooth Projective Varieties. Complex Algebraic Geometry MSRI Publications Volume 28, (1995).

[2] John W. Morgan. The algebraic topology of smooth algebraic varieties. Publications mathématiques de l ’ I.H.É.S., tome 48 (1978), p. 137-204

[3] A. I. Mal’cev. Nilpotent torsion-free groups. Isvestia Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. 13 (1949), 201-212(Russian)

[4] Robert B. Warfield, The Malcev correspondence, Ch. 12 in Nilpotent Groups, Springer Lec. Notes in Math. 513, (1976), 104-111

[5] Raghunathan, M. S. (1972). Discrete subgroups of Lie groups. Ergebnisse de Mathematik und ihrer Grenzgebiete.

[6] Yves Cornulier, Gradings on Lie algebras, systolic growth, and co-hopfian properties of nilpotent groups, Bull. Soc. Math. France 144 (2016)