Diffeology における主 G 束の同型類への和の導入

信州大学　総合医理工学研究科　野田　真沙衣

Masai Noda
Graduate School of Medicine, Science and Technology
Shinshu University

1 Introduction

Diffeology は 1970 年台に Kuo-Tsai Chen, 1980 年台に Jean-Marie Souriau により別々の場所でその萌芽を得た, 多様体の一般化の一つである. [Ig], [Ig4] によれば, Jean-Marie Souriou のアイデアの発端は無限次元微分同相写像から成る群を容易な形で扱いたいという動機からくるものであったというが, のちに此れは多様体や CW 複体を含む大きな圏を構成するものとなった.

多様体の圏は圏論的構造の多くを欠くものであるが, 一方で Diffeology の圏は和・積・部分集合・商で閉じているのみならず極限・余極限を持ちカルテジアン閉でありこの点で豊穣である. この結果として多様体が扱っているものを含む, 多くの対象を Diffeology では扱うことを可能にした. (例えば singular space や無次元空間及びそれらが併存したものでさえ対応することができる. Souriau の学生であった Patrick Iglesias-Zemmour により, 無次元トーラスを例として singular space へのアプローチの可能性が示唆され現状もその適用の広がりを模索されている最中にある.) また多様体上で得られている構造の再構築も現在進行中で行われているところであり, 例えば Higher homotopy theory, modeling space, Cartan-de Rham コホモロジーなど次々に発表されている.

Principal G-bundle や Čech コホモロジーもそのうちの一つである. 2021 年 [KWW] においては principal G-bundle の同型類の集合と 1 次の Čech コホモロジーとの全単射が示されている. 今回, この全単射を用いて principal G-bundle の集合に和, 及び群構造を導入した. 和を入れるというこの試みは Patrick Igresias-Zemmour により既に行われているものであり ([Ig]), その構成に関しても [Ig] のものと一致する結果となっている. 即ち [KWW] の全単射は [Ig] の和により準同型写像となると言える. 以下 Diffeology の定義や以降の解説に必要な性質の説明から始め, [KWW] の内容も含めた一連の結果について此を概説する. 詳細は準備中の論文 [N] に記述する予定である.

2 Diffeology

この章では本稿で必要な diffeology の一般論をまとめる. この章の多くの内容は [Ig] を参考としているため, 詳細はそちらを参照してほしい. 先ずは定義から始める.

Definition 2.1 (**Diffeology**)
X を集合とする. Euclid 空間の開集合から X への写像の集合を *parametrization* といい, この集合を $Param(X) := \{p : U_p \to X \,|\, U_p : \textit{open set of } \mathbb{R}^n,\ n \in \mathbb{N}\}$ と定める。X の *diffeology* $\mathcal{D}_X$ とは、次の (D1)-(D3) を満たす $Param(X)$ の部分集合のことである。

(D1) (Covering axiom) $\mathcal{D}_X$ は全ての恒等写像を含む.
(D2) (Locality axiom) 与えられた $p \in Param(X)$ に対して $\{U_\alpha\}_\alpha$ を p の domain U_p の開被覆であるとする。任意の α に関して $p|_{U_\alpha} : U_\alpha \to X$ が $\mathcal{D}_X$ に含まれているとき, p もまた $\mathcal{D}_X$ の元である.
(D3) (Smooth compatibility axiom) $p : U_p \to X$ を $\mathcal{D}_X$ の元であるとする。C^∞ 級写像 $f : U_f \to U_p$ と p との合成はまた $\mathcal{D}_X$ に含まれる.

diffeology に含まれる元を *plot* といい、diffeology の定義された集合 X を *diffeological space* という。(以降, 断り無しに *plot* p の domain を U_p と記載することがある.)

Example 2.2 (**Euclidean space**)
$X=\mathbb{R}^n$、$\mathcal{D}_{\mathbb{R}^n}:=C^\infty(\mathbb{R}^n)$ の場合を考えると、$\mathcal{D}_{\mathbb{R}^n}$ が条件 (D1)-(D3) を満たしていることは直ぐに分かる.

次に, diffeological space 間の写像の性質について説明する. *Smooth map* は後に出てくる diffeological space の圏 Diff の射に該当する. また *diffeomorphism* は diffeology における isomorphism である.

Definition 2.3 (**Smooth map, Diffeomorphism, Subduction**)
$(X,\mathcal{D}_X),(X',\mathcal{D}_{X'}),(Y,\mathcal{D}_Y)$ を diffeological space 及びその diffeology とする.
・写像 $f:X\to Y$ が "*smooth*" であるとは, 任意の $\mathcal{D}_X$ の *plot* p との合成 $f\circ p$ が全て $\mathcal{D}_Y$ の *plot* となる場合をいう.
・f が全単射であり且つ f^{-1} もまた smooth であるとき, f を "*diffeomorphism*" という.
・写像 f が "*subduction*" であるとは, 次の i) 及び ii) が満たされるときをいう.
  i) f は全射である
  ii) 任意の $\mathcal{D}_Y$ の *plot* p 及び其の domain の任意の元 $u\in U_p$ に関して, u の開近傍 V_u 及び $p|_{V_u}=f\circ q$ を満たす *plot* $q\in\mathcal{D}_X$ が存在する.
  $f:X\to Y$ が subduction であるとき, $g:X'\to X$ が smooth map/subduction であることは $f\circ g$ が smooth map/subduction であることと同値である.

Introduction で述べた様に, diffeology の良い特徴として部分集合・積・商・和に対し自然に diffeology が入るという点がある. それぞれどの様な定義となるかを次で説明する.

Definition 2.4 (**Some constructions**)
$(X,\mathcal{D}_X),\{(X_\alpha,\mathcal{D}_{X_\alpha})\}_\alpha$ を diffeological space と其の diffeology の組, 及びそれらの族とする. また X の部分集合 U, 商写像 $\rho:X\to X/\sim$ が与えられているものとする. すると, 次の様に部分集合・積・商・和に $(X,\mathcal{D}_X),\{(X_\alpha,\mathcal{D}_{X_\alpha})\}_\alpha$ からの diffeology を入れることができる.
【部分集合 "*subset diffeology*"】
  $\mathcal{D}_X$ の *plot* p のうち、 $Im(p)\subset U$ となるもの全ての集合.
【積 "*product diffeology*"】
  $p\in Param(\prod_\alpha X_\alpha)$ のうち, 任意の α の projection $pr_\alpha:\prod_\alpha X_\alpha\to X_\alpha$ との合成がまた $\mathcal{D}_{X_\alpha}$ に含まれるもの全ての集合.
【商 "*quotient diffeology*"】
  $p\in Param(X/\sim)$ のうち, p の domain の任意の元 $v\in U_p$ に関して $p|_{V_v}=\rho\circ q$ を満たす v の開近傍 V_v, 及び $q\in\mathcal{D}_X$ が存在するもの全ての集合.
【和 "*sum diffeology*"】
  $Param(\coprod_\alpha X_\alpha)$ の元 p のうち, 任意の domain の元 $v\in U_p$ に対し $\iota_\alpha\circ p|_{V_v}\in\mathcal{D}_\alpha$ を満たす α 及び v の開近傍 V_v が存在する全ての集合. ここで $\iota_\alpha:X_\alpha\to\coprod_\alpha X_\alpha$ は包含写像である.

次に diffeology 上の圏について紹介する.

Definition 2.5 (**Category of diffeological spaces**)
diffeological space の圏 Diff とは, 対象を diffeological space 全体, 射を smooth map 全体として構成される圏である.

Definition2.4 と併せ, 圏 Diff は上記の set-theoretic な構造に関して閉じている圏であると言うことができる. 圏 Diff がほかの圏に対してどのような位置付けとなるか示したものが次の Remark である.

Remark 2.6
Mfd を多様体の圏, Top を位相空間の圏, $\mathsf{Set}^{\Delta^{op}}$ を simplicial set の圏とする. Diff と Top 及び Diff と $\mathsf{Set}^{\Delta^{op}}$

との間には随伴の関係があり, 一方 Mfd から Diff へは包含関手が存在する.

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathsf{Set}^{\Delta^{op}} \arrow[d, shift left, "|\ |_D"] \arrow[dr, shift left, "|\ |"] & \\
\mathsf{Mfd} \arrow[r, hook] & \mathsf{Diff} \arrow[u, shift left, "S^D"] \arrow[u, phantom, "\vdash"] \arrow[r, shift left, "D"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{Top} \arrow[ul, shift left, "S"] \arrow[ul, phantom, "\top"] \arrow[l, shift left, "C"]
\end{tikzcd}
$$

続いて本稿を読み進めるにあたって非常に重要となる概念である *generating family* について説明する. 任意の diffeology は generating family を持ち, 逆に (結果 generating family となる)parametrization の集合から diffeology を生成することも出来る. 更に, その次の *Nebula*, *Diffeological group* も後に使用する概念である.

Definition 2.7 (**Generating family**)
$(X, \mathcal{D}_X)$ を diffeological space と其の diffeology であるとする. $\mathcal{D}_X$ の *generating family* $\mathcal{Q}$ とは $\mathcal{D}_X$ の部分集合であって次の条件を満たすものをいう. 即ち任意の $p \in \mathcal{D}_X$ 及び $u \in U_p$ に対して, $p|_{V_u} = q \circ f$ を満たす u の開近傍 V_u , $\mathcal{Q}$ の元 q, C^∞ 級写像 $f : V \to U_p$ が存在するものである.
任意の diffeology は generating family をもち, 逆に与えられた parametrization の部分集合 $\mathcal{Q}$ から diffeology $< \mathcal{Q} >$ を生成することができる. $< \mathcal{Q} >$ は, $\mathcal{Q}$ を含む全ての diffeology の intersection である.

Example 2.8 (**Manifold**)
$(M, \{\varphi_\alpha\}_\alpha)$ を多様体とその atlas であるとする. $< \{\varphi_\alpha^{-1}\}_\alpha >$ は $\{\varphi_\alpha^{-1}\}_\alpha$ から生成された diffeology であり, これにより多様体 M に diffeology が入る. Mfd $\hookrightarrow$ Diff (Remark 2.6) は Mfd の対象をこの様な形で Diff の対象に対応させる関手である.

Denifition 2.9 (**Nebula**)
$(X, \mathcal{D}_X)$ を diffeological space と其の diffeology とし, $\mathcal{Q}$ を $\mathcal{D}_X$ の generating family とする. $\mathcal{Q}$ に関連した *Nebula* とは $\mathcal{N}(\mathcal{Q}) := \coprod_{q \in \mathcal{Q}} U_q$ で定められる集合に和の diffeology を入れることで diffeological space となったものをいう.

Definition 2.10 (**Diffeological group**)
Diffeological group G とは, multiplication 及び inversion map が smooth となる様に群 G に diffeology を入れたものである.

3 Principal G-bundles on diffeological spaces

diffeology 上における principal G-bundle の定義は P.Iglesias-Zemmour の教科書 ([Ig]) に記載されている他に [MW], [KWW] にも記述がある. それぞれ表現が異なるものもあるが, 全て同じものである.(これの証明は [Ig], [N] を参照してほしい.) この章では此らのうち本稿で使用するものに絞って紹介していく.

Definition 3.1 (**Principal G − bundles on diffeological spaces** [**MW**], [**Ig**])
E, X を diffeological space, G を diffeological group とする.
次の 3 つの条件を満たす写像 $\pi : E \to X$ があるとき, これを *Principal G-bundle* という.
・π は subduction である.
・E は G による smooth right G-action を持つ.
・$\mathcal{D}_X$ の任意の *plot* による π の pull back は locally trivial である. 即ち任意の *plot* $p \in \mathcal{D}_X$ 及び $u \in U_p$ に関して, その制限 $p|_{V_u}$ による π の pull back $(p|_{V_u})^*\pi \to V_u$ が, 自明束と同型にすることができる. ただし

bundle の同型を成す写像は *G-equivariant* な diffeomorphism (下図式の φ) である.

$$\begin{tikzcd}
V_u \times G \arrow[r, "\varphi", "\sim"'] \arrow[dr, "pr_{V_u}"'] \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft", shift right=18] & (p|_{V_u})^*E \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, "\pi"] \\
& V_u \arrow[r, "p|_{V_u}"'] & X
\end{tikzcd}$$

Definition 3.2 (**Principal G − bundles on diffeological spaces** [**KWW**])
E, X を diffeological space, G を diffeological group とする. 次の 3 つの条件を満たす写像 $\pi : E \to X$ を *principal G-bundle* という.
・π は subduction である.
・E は G による smooth な right G-action を持つ.
・下で定義される写像 “ a ” は diffeomorphism である.

$$\begin{array}{ccc}
a : P \times G & \longrightarrow & P \times_X P \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
(x, g) & \longmapsto & (x, x \cdot g))
\end{array}$$

ただし, “ $\cdot$ ” は P に定義された G-action を意味している.

4 Čech cohomology [KWW]

diffeology の Čech cohomology に関しては [Ig3], [AA], [KWW] に記述があるが、いずれも互いに異なるものである. ([Ig] と [KWW] の関連については [KWW] に記述がある)
ここでは [KWW] で導入された Čech cohomology を紹介するが, 証明等詳細については同論文を参照してほしい. これ以降, G を Abel 群とする.

§ 4.1 Sheaf on diffeology

先ず Čech cohomology を定義するにあたり必要な, sheaf について説明する. diffeology 上の sheaf は各 *plot* の domain 上の通常の sheaf の寄せ集めであると言える.

Definition 4.1.1 ($\mathcal{C}$ − **valued** (**Pre**)**Sheaf on Plots**(**X**))
(X, D_X) を diffeological space 及びその diffeology であるとする. *plot* の圏 $Plots(X)$ とは, 対象を D_X の *plot* 全て, 射を下の図式を可換にする domain 間の C^∞ 写像全体とする圏である.

$$\begin{tikzcd}
& X & \\
U_p \arrow[ur, "p"] \arrow[rr, "f"'] \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft", shift left=18] & & U_q \arrow[ul, "q"']
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{C}$ を圏とする. 反変関手 $F : Plots(X)^{op} \to \mathcal{C}$ を *$\mathcal{C}$-valued presheaf* という.
$(U_p, Open(U_p))$ を, *plot* p の domain U_p の開集合全体を対象, 包含写像全体を射に持つ圏であるとする. この F は自然に次の様な形で関手 $F|_p$ を誘導する.

$$F|_p : (U_p, Open(U_p))^{op} \longrightarrow \mathcal{C} \quad ; \quad U_i \mapsto F(p|_{U_i})$$

任意の *plot* p に対して $F|_p$ が sheaf の条件を満たすとき, F を sheaf であると定める. F と $F|_p$ の関係は次の図式を使うと理解しやすい. 関手 $p \circ ()$ の構成をその下に示す. 此れは包含写像 $\iota_i : U_i \hookrightarrow U_p$ を () 内に入

れることにより $plot$ が復元される関手である．

$$\begin{tikzcd} Plots(X)^{op} \arrow[r, "F"] & \mathcal{C} \\ Open(U_p)^{op} \arrow[u, "p\circ()^{op}"] \arrow[ur, "F|_p"'] \arrow[u, phantom, shift left=6ex, "\circlearrowleft"] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{ccc} p\circ():Open(U_p) & \longrightarrow & Plots(X) \\ (U_i \hookrightarrow U_p) & & (p|_{U_i} \hookrightarrow p) \end{array}$$

次に, diffeology 上の sheaf の例を挙げる．此れは後に Čech cohomology と principal G-bundle の同型類の集合とを関連づけるものとなる．

Example 4.1.2 (**Ab − valued sheaf** $\mathbf{C^\infty(\,\cdot\,,G)}$)
X を diffeological space, G を Abelian diffeological group とする．反変関手 $C^\infty(\,\cdot\,,G):Plots(X)^{op}\to Ab$ は $Plots(X)$ の対象 $p,\ q$, 射 f を用いて $C^\infty(\,\cdot\,,G)(p):=C^\infty(U_p,G)$ 及び $C^\infty(\,\cdot\,,G)(f)(g):=g\circ f$ で与えられるものとする．すると此は sheaf となり, この global section (Definition 4.1.3) 全体の集合は X から G への smooth map 全体の集合である ($C^\infty(\,\cdot\,,G)(X)=C^\infty(X,G)$).

次の Definition4.1.3, 4.1.4 及び Remark4.1.5 も Čech cohomology の定義のための準備である．

Definition 4.1.3 (**global section**)
F を $\mathcal{C}$-valued presheaf とする．この F の *global section* とは, section から成る族 $\{\eta_p\in F(p)\}_{p\in D_X}$ であって, 任意の *plot* $p,\ q$ 間の射 $f:U_p\to U_q$ に関して $F(f)(\eta_q)=\eta_p$ を満たすものをいう．F の global section 全体の集合を $F(X)$ と記す．

Definition 4.1.4 (**Pull back presheaf**)
$\varphi:X\to Y$ を smooth map, $F:Plots(Y)^{op}\to\mathcal{C}$ を $\mathcal{C}$-valued presheaf であるとする．φ による F の *pull back presheaf* $\varphi^*F:Plots(X)^{op}\to\mathcal{C}$ とは, 対象 p, 射 f に関して $\varphi^*F(p):=F(\varphi\circ p)$, $\varphi^*F(f):=F(f)$ で与えられる presheaf である．

Remark 4.1.5 (**Induced morphisms of global sections**)
$\varphi:X\to Y,\ \psi:Y\to Z$ を smooth map, $F:Plots(Y)^{op}\to\mathcal{C},\ G:Plots(Z)^{op}\to\mathcal{C}$ を $\mathcal{C}$-valued presheaf とする．F が sheaf であるとき, φ^*F もまた sheaf である．これは $F|_p$ が sheaf であるならば当然 $F|_{\varphi\circ q}$ (ただし $q\in D_X$ である) も sheaf であることに依る．更に φ は次の様な global section 間の写像 $\widetilde{\varphi}:F(Y)\to F(X)\ ;\ \{\eta_p\}_{p\in D_Y}\mapsto\{\eta_{\varphi\circ q}\}_{q\in D_X}$ を誘導する．これらの合成が $\widetilde{\varphi}\circ\widetilde{\psi}=\widetilde{\psi\circ\varphi}$ を満たすことも直ぐに分かる．

§ 4.2 Čech cohomology

上述した sheaf の概念を用いて Čech cohomology の定義を与える．

Definition 4.2.1 (**Diffeology on** $\mathcal{N}(\mathcal{Q})_{\mathbf{k}}$ ($\mathcal{D}(\mathcal{N}(\mathcal{Q})_{\mathbf{k}})$))
$(X,\mathcal{D}(X))$ を diffeological space 及びその diffeology であるとする．$\mathcal{Q}$ は $\mathcal{D}(X)$ の generating family であって $\mathcal{N}(\mathcal{Q})$ は $\mathcal{Q}$ から得られる nebula である．これらに基づく smooth な評価関数 $ev:\mathcal{N}(\mathcal{Q})\to X\ ;\ ev(u)=q(u)$ (ただし $u\in U_q,\ q\in\mathcal{Q}$) を与えることが出来る．更にこれらは次の様に拡張される;

$$\mathcal{N}(\mathcal{Q})_k:=\{(x_0,...,x_k)\in\mathcal{N}(\mathcal{Q})^{k+1}|ev(x_0)=...=ev(x_k)\}$$

$$ev_k : \mathcal{N}(\mathcal{Q})_k \to X \quad ; \quad ev_k((x_0, ..., x_k)) = ev(x_0)$$

$\mathcal{N}(\mathcal{Q})_k$ には $\mathcal{N}(\mathcal{Q})^k$ に入っている product diffeology の subdiffeology を入れることで diffeological space となる．すると $\mathcal{D}(\mathcal{N}(\mathcal{Q})_k)$ の *plot* は $\mathcal{N}(\mathcal{Q})$ の *plot* の $k+1$ 個のセットで表される．即ち次の様な形で得られる．

$$\forall f \in \mathcal{D}(\mathcal{N}(\mathcal{Q})_k), \quad f = (f_0, ..., f_k) \quad (\ f_i \in \mathcal{D}(\mathcal{N}(\mathcal{Q})) \ \text{ for all } \ i \in \{0, ..., k\}\ )$$

全ての準備が整ったため, いよいよ Čech cohomology の定義に入る．

Definition 4.2.2 (**Čech cochain associated to** $\mathcal{Q}$)
$F : Plots(X)^{op} \to G$ を $\mathcal{C}$-valued presheaf, $\mathcal{Q}$ を $\mathcal{D}(X)$ の generating family であるとする． ここで G は Abelian diffeological group である．F, $\mathcal{Q}$ に基づく k 次の Čech cochain は, Definition 4.1.3, 4.1.4 の記法を用いて $\check{C}^k(\mathcal{Q}, F) := ev_k^* F(Plots(\mathcal{N}(\mathcal{Q})_k))$ と定義される． 即ちこれは ev_k による F の pull back $ev_k^* F : Plots(\mathcal{N}(\mathcal{Q})_k)^{op} \to Ab$ の global section 全体の集合である．
更に $\partial : \check{C}^k(\mathcal{Q}, F) \to \check{C}^{k+1}(\mathcal{Q}, F)$ は $d_i : \mathcal{N}(\mathcal{Q})_{k+1} \to \mathcal{N}(\mathcal{Q})_k$; $(x_0, ..., \hat{x_i}, ..., x_{k+1})$ から誘導される写像 $\widetilde{d_i}$ (Remark 4.1.5) により $\partial := \Sigma_{i=0}^{k+1} (-1)^i \widetilde{d_i}$ と定義される．;

$$\widetilde{d_i} : ev_k^* F(\mathcal{N}(\mathcal{Q})_k) \to d_i^*(ev_k^* F)(\mathcal{N}(\mathcal{Q})_{k+1}) = ev_{k+1}^*(\mathcal{N}(\mathcal{Q})_{k+1})$$

$(\check{C}^k(\mathcal{Q}, F), \partial)$ は $\mathcal{Q}$ に基づいた Čech cochain complex であり, cohomology $\check{H}^\bullet(\mathcal{Q}, F)$ を得る．
写像 ∂ は次で表される写像である．

$$\{\eta_{(f_0, ..., f_k)} \in ev_k^* F(\mathcal{N}(\mathcal{Q})_k)\}_{(f_0, ..., f_k) \in \mathcal{D}(\mathcal{N}(\mathcal{Q})_k)} \mapsto \{\textstyle\sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \eta_{(f_0, .., \hat{f_i}, .., f_{k+1})}\}_{(f_0, ..., f_{k+1}) \in \mathcal{D}(\mathcal{N}(\mathcal{Q})_{k+1})}$$

以上で generating family $\mathcal{Q}$ に関連付けられた Čech cohomology が定義された．更に最終的な, generating family に依存しない形へ持っていくための作業を進める．

Definition 4.2.3 (**Refinement of a Generating family**)
generating family として $\mathcal{Q} = \{q_\alpha : U_\alpha \to X\}_{\alpha \in A}$ を持つ diffeology $\mathcal{D}_X$ が与えられているものとする．$\mathcal{R} = \{r_\beta : V_\beta \to X\}_{\beta \in B}$ が $\mathcal{Q}$ の refinement であるとは, それ自身も X の generating family であって, 添字集合間の写像 $\varphi : B \to A$ 及び smooth map $f_\beta : V_\beta \to U_{\varphi(\beta)}$ の存在により各 β に関して $q_{\varphi(\beta)} \circ f_\beta = r_\beta$ を満たす様なものをいう．

Definition 4.2.4 (**Čech cohomology group of F over X**)
Definition 4.2.3 で与えられた generating family $\mathcal{Q}$ 及びこの refinement $\mathcal{R}$ に関して, $f := \coprod_\beta f_\beta$ で与えられる nabula 間の写像 $f : \mathcal{N}(\mathcal{R}) \to \mathcal{N}(\mathcal{Q})$ 及びこの拡張 $f^k : \mathcal{N}(\mathcal{R})_k \to \mathcal{N}(\mathcal{Q})_k$; $f^k(x_0, ..., x_k) := (f(x_0), ..., f(x_k))$ が自然に得られる．refinement により順序付けられた cohomology の族 $\{\check{H}^k(\mathcal{Q}, F)\}_\mathcal{Q}$ の余極限を考えることにより, k 次の Čech cohomology が定義される ;

$$\check{H}^k(X, F) := Colim_\mathcal{Q}\, \check{H}^k(\mathcal{Q}, F)$$

これで Čech cohomology の最終的な定義が与えられた．
次は特別な sheaf を用いた Čech cochain について説明したものである．ここで得られる Čech cochain とのある同一視により, 上記の様な (ev_k により sheaf F を pull back して得られる sheaf $ev^* F$ の global section, という) 複雑な対象をより簡単に扱うことが可能となる．

Example 4.2.5 (**Čech cochain of** $\mathbf{C^\infty(\,\cdot\,, G)}$)
Example 4.1.2 で定義された sheaf $C^\infty(\,\cdot\,, G)$ を用いた Čech cochain $\check{C}^k(\mathcal{Q}, G) := \check{C}^k(\mathcal{Q}, C^\infty(\,\cdot\,, G))$ は, 次

の図式を可換にする;

$$\begin{tikzcd}
\check{C}^k(\mathcal{Q},G) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\cong"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \check{C}^{k+1}(\mathcal{Q},G) \arrow[d, "\cong"] \\
C^\infty(\mathcal{N}(\mathcal{Q})_k, G) \arrow[r, "\delta"'] & C^\infty(\mathcal{N}(\mathcal{Q})_{k+1}, G)
\end{tikzcd}$$

下段水平の写像は $\delta(f) := \sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i f\circ d_i$ で表される写像である．これにより Čech complex $(\check{C}^k(\mathcal{Q},G),\partial)$ は cochain complex $(C^\infty(\mathcal{N}(\mathcal{Q})_k,G),\delta)$ に同一視される．後者は $\mathcal{N}(\mathcal{Q})_k$ から G への (diffeology の意味での) smooth map 全体の集合を意味する．

5 Principal G-bundles and $\check{H}^1(X,F)$ [KWW]

この章では principal G-bundles の同型類の集合と 1 次の Čech cohomology $\check{H}^1(X,F)$ との関連を見る．既存の位相空間における結果と同様にこれら二者には全単射の関係がある．内容は [KWW] に基づいているため, 詳細については引き続き此方を参照いただきたい．

先ず始めに全単射の構成に必要な, diffeology の *Groupoid*/*Groupoid action* について記述する．

Definition 5.1.1 (**Diffeological groupoid**)
H_0, H_1 を diffelogical spacees とする．$(H_0 \rightrightarrows H_1)$ が diffeological groupoid であるとは, これら H_0, H_1 に構造写像が定義されており, その全てが smooth である場合をいう．

$$H_1 \times_{H_0} H_1 \xrightarrow{m} H_1 \xrightarrow{i} H_1 \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} H_0 \xrightarrow{u} H_1$$

注) s : source map, t : target map, i : inversion map, u : unit map, m : multiplication map.

Definition 5.1.2 (**Groupoid action**)
X を diffeological space, $H_1 \rightrightarrows H_0$ を diffeological groupoid であるとする．この groupoid による smooth anchor map $\rho : X \to H_0$ を伴う X への *Smooth action* とは次の i)-iii) を満たす smooth map $H_{1s} \times_\rho X \to X : (h,x) \mapsto h\cdot x$ である；
i) $s(h) = \rho(x)$ を満たす任意の (h,x) に関して $\rho(h\cdot x) = t(h)$ である．
ii) $s(g) = t(h)$, $s(h) = \rho(x)$ を満たす任意の $g, h \in H_1$, $x \in X$ に対して $g\cdot(h\cdot x) = (g\cdot h)\cdot x$ である．
iii) 任意の $x \in X$ で $u(\rho(x))\cdot x = x$ を満たす．

Groupoid action の例を次の Example に示す．以降, 実際に用いる Groupoid はこの例にあたる．

Example 5.1.3 (**Groupoid R(ev)** $= (\mathcal{N}(\mathcal{Q}) \times_{\mathbf{X}} \mathcal{N}(\mathcal{Q}) \rightrightarrows \mathcal{N}(\mathcal{Q}))$ **and its action**)
(X, D_X) を diffeological space とその diffeology の組であるとし, $\mathcal{Q}$ を D_X の generating family とする．$\mathcal{N}(\mathcal{Q})$ は $\mathcal{Q}$ を用いて得られる nebula であり, 評価関数 $ev : \mathcal{N}(\mathcal{Q}) \to X$ も Definition 4.2.1 の通りとする．ここで Groupoid $R(ev) : \mathcal{N}(\mathcal{Q}) \times_X \mathcal{N}(\mathcal{Q}) \rightrightarrows \mathcal{N}(\mathcal{Q})$ は次の構造写像を持つ Groupoid とする．

$$\begin{array}{ll}
s : \mathcal{N}(\mathcal{Q}) \times_X \mathcal{N}(\mathcal{Q}) \to \mathcal{N}(\mathcal{Q}) & : \quad s(x_1,x_2) = x_2 \\
t : \mathcal{N}(\mathcal{Q}) \times_X \mathcal{N}(\mathcal{Q}) \to \mathcal{N}(\mathcal{Q}) & : \quad t(x_1,x_2) = x_1 \\
i : \mathcal{N}(\mathcal{Q}) \times_X \mathcal{N}(\mathcal{Q}) \to \mathcal{N}(\mathcal{Q}) \times_X \mathcal{N}(\mathcal{Q}) & : \quad i(x_1,x_2) = (x_2,x_1) \\
u : \mathcal{N}(\mathcal{Q}) \to \mathcal{N}(\mathcal{Q}) \times \mathcal{N}(\mathcal{Q}) & : \quad u(x) = (x,x) \\
\multicolumn{2}{l}{m : (\mathcal{N}(\mathcal{Q}) \times_X \mathcal{N}(\mathcal{Q}))_{pr_2} \times_{pr_1} (\mathcal{N}(\mathcal{Q}) \times_X \mathcal{N}(\mathcal{Q})) \to (\mathcal{N}(\mathcal{Q}) \times_X \mathcal{N}(\mathcal{Q}))} \\
 & : \quad m((x_1,x_2)(x_2,x_3)) = (x_1,x_3)
\end{array}$$

Groupoid $R(ev)_\varphi$ の smooth anchor map $pr_{\mathcal{N}(\mathcal{Q})}:\mathcal{N}(\mathcal{Q})\times G\to\mathcal{N}(\mathcal{Q})$ を伴う $\mathcal{N}(\mathcal{Q})\times G$ への $R(ev)_\varphi$-action は下の様に定義される；

$$\begin{array}{ccc}(\mathcal{N}(\mathcal{Q})\times_X\mathcal{N}(\mathcal{Q}))_{pr_2}\times_{pr_{\mathcal{N}(\mathcal{Q})}}(\mathcal{N}(\mathcal{Q})\times G) & \longrightarrow & \mathcal{N}(\mathcal{Q})\times G \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ ((x_1,x_2),(x_2,g)) & \longmapsto & (x_1,\varphi(x_1,x_2)+g)\end{array}$$

ここで, 上の $\varphi:\mathcal{N}(\mathcal{Q})\times\mathcal{N}(\mathcal{Q})\to G$ は $\varphi(x_1,x_2)+\varphi(x_2,x_3)=\varphi(x_1,x_3)$ を満たす smooth map である. また, この $R(ev)_\varphi$-action は $\mathcal{N}(\mathcal{Q})\times G$ への G-作用と可換である.

Groupoid action を定義する際には上記の様な smooth map φ が必要である. 次で定義する写像はこの φ が満たすべき条件を満たしている.

Definition 5.1.4 (smooth map $\mathbf{c}(\tau,\mathbf{P})$)
$\pi:P\to X$ を diffeology における principal G-bundle であるとし, $\mathcal{Q}$ を X の generating family とする. principal G-bundle の定義 ([KWW]) によれば, diffeomorphism $a:P\times G\to P\times_X P$; $(p,g)\mapsto(p,p\cdot g)$ が存在し, 且つ $\pi\circ\tau=ev$ を満たす smooth map $\tau:\mathcal{N}(\mathcal{Q})\to P$ が必ず得られる. (後半に関しては Example 2.6 [KWW] を参照.) Generating family $\mathcal{Q}$ とこの τ の組を "*plotwise local trivialization*" と呼ぶ.
ここで写像 $c(\tau,P)$ は $\tau\times\tau|_{\mathcal{N}(\mathcal{Q})\times_X\mathcal{N}(\mathcal{Q})}$ と $pr_G\circ a^{-1}$ の合成により定義される smooth map である；

$$\begin{tikzcd}\mathcal{N}(\mathcal{Q})\times_X\mathcal{N}(\mathcal{Q}) \arrow[r, "\tau\times\tau|_{\mathcal{N}(\mathcal{Q})\times_X\mathcal{N}(\mathcal{Q})}"] \arrow[rr, bend right, "c(\tau,P)"'] & P\times_X P \arrow[r, "pr_G\circ a^{-1}"] & G\end{tikzcd}$$

計算により $c(\tau,P)(x_1,x_2)+c(\tau,P)(x_2,x_3)=c(\tau,P)(x_1,x_3)$ 及び $\delta(c(\tau,P))=0$ であることは直ぐに分かる. (δ は Example 4.2.5. の coboundary map である)
即ち写像 $c(\tau,P)$ は, Example 4.2.5 の記法に則れば, $Z^1(\mathcal{Q},G)$ の元であると言える.

次の Proposition は本稿を読むにあたって (証明を省略していることため) 使用しないが, Theorem 5.1.6 の証明 (つまり [KWW] Lemma 5.14. , Theorem 5.15.) 及び当方の論文 ([N]) を読む進めるにあたって鍵となる事実である.

Proposition 5.1.5 (Induced principal G − bundle) [KWW]
$\pi:P\to X$ を diffeological 上の principal G-bundle, $\mathcal{Q}$ を X の generating family であるとする. 更に $R(ev)_{c(\tau,P)}$ を Example 5.1.3 で定義された diffeological groupoid とする. (ただし, φ 部分は $c(\tau,P)$ に置き換えてある.)
$(\mathcal{N}(\mathcal{Q})\times G)/R(ev)_{c(\tau,P)}$ は groupoid action による商であり quotient diffeology を入れることで diffeological space となっている. すると次の写像は principal G-bundle である；

$$\begin{array}{ccc}(\mathcal{N}(\mathcal{Q})\times G)/R(ev)_{c(\tau,P)} & \longrightarrow & X \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ [(x,g)]_{c(\tau,P)} & \longmapsto & ev(x)\end{array}$$

これは最初に与えられた $\pi:P\to X$ に同型である. つまり次の図式を可換にする G-equivariant diffeomorphism ρ が存在する.

$$\begin{tikzcd}\mathcal{N}(\mathcal{Q})\times G/R(ev)_{c(\tau,P)} \arrow[rr, "\rho", "\sim"'] \arrow[dr] & & P \arrow[dl, "\pi"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Proof)
[KWW] Lemma 5.13. 参照.

次の Theorem は [KWW] の主結果である.

Theorem 5.1.6 ($\mathbf{\Pi_{(X,G)} \cong \check{H}^1(X,G)}$) **[KWW]**
X を diffeological space, G を diffeological group であるとする. X を底空間に持つ principal G-bundle の同型類の集合を "$\Pi_{(X,G)}$" と記すものとする. 1 次の Čech cohomology $\check{H}^1(X,G)$ と $\Pi_{(X,G)}$ の間には全単射が存在する.

Construction)
本稿では証明は割愛し, 以降の記述に必要となる全単射の構成のみを述べることとする. 詳細は同論文の Lemma 5.14. , Theorem 5.15. を参照してほしい.
先ずは $\Psi : \Pi_{(X,G)} \to \check{H}^1(X,G)$ の構成から記述する. $\pi : P \to X$ を principal G-bundle とし, これを代表元に持つ類を [P] と表す. ;

$$\begin{array}{ccc} \Psi : \Pi_{(X,G)} & \longrightarrow & \check{H}^1(X,G) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ [P] & \longmapsto & c[P] \end{array}$$

$c[P]$ の構成について説明する. Definition 5.1.4 の smooth map $c(\tau,P)$ は 1 次の Čech cocycle であったから, $[c(\tau,P)] \in \check{H}^1(\mathcal{Q},G)$ なる元を取れる. Definition 4.2.4 で述べた様に, $\check{H}^1(X,G)$ は refinement から得た順序による余極限で定義されていた. $\mathcal{R}$ を $\mathcal{Q}$ の refinement, $g : \mathcal{N}(\mathcal{R}) \to \mathcal{N}(\mathcal{Q})$ をそれから得る smooth map とし, $(\mathcal{Q},\tau)$ を π の plotwise local trivializationthen とする. すると $(\mathcal{R},\tau\circ g)$ もまた下の外側三角形の図式を可換にすることから, plotwise local trivialization である.

$$\begin{tikzcd} & & P \arrow[dd, "\pi"] \\ \mathcal{N}(\mathcal{R}) \arrow[r, "g"] \arrow[urr, "\tau\circ g"] \arrow[drr, "ev_{\mathcal{R}}"'] & \mathcal{N}(\mathcal{Q}) \arrow[ur, "\tau"'] \arrow[dr, "ev_{\mathcal{Q}}"] & \\ & & X \end{tikzcd}$$

Čech cohomology 間の写像 $\hat{g} : \check{H}^1(\mathcal{Q},G) \to \check{H}^1(\mathcal{R},G)$ は $[c(\tau,P)] \mapsto [c(\tau\circ g,P)]]$ と定義できる. $c[P]$, はこれらの写像による余極限 $\check{H}^1(X,G)$ のうち $[c(\tau,P)]$ を代表元とするものである.

$$\begin{array}{ccccccc} \check{H}^1(\mathcal{Q},G) & \longrightarrow & \check{H}^1(\mathcal{R},G) & \longrightarrow & ... & \longrightarrow & Colim_{\mathcal{Q}}\check{H}^1(\mathcal{Q},G) = \check{H}^1(X,G) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & & & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ [c(\tau,P)] & \longmapsto & [c(\tau\circ g,P)] & \longmapsto & ... & & \to c[P] \end{array}$$

この対応より定義された Ψ は well-defined であり全単射である.
次に逆写像 Ψ^{-1} の構成を記述する. ω を $\check{H}^1(X,G)$ の元とすれば此は余極限の元であるから, $\omega = [f]$ として代表される $f \in \check{Z}^1(\mathcal{Q},G)$ を持つ. Čech cocycle の元は全て Example 5.1.3 φ の条件を満たしていることから, この f は groupoid action $R(ev)_f$ を誘導する. すると写像 $(\mathcal{N}(\mathcal{Q})\times G)/R(ev)_f \to X$; $[(y,g)]_f \to ev(y)$ は principal G-bundle である. ここで全空間への smooth な G-action は $h \in G$ に関して $([(y,g)]_f, h) \mapsto [(y, g+h)]_f$ と定義される. すると逆写像 Ψ^{-1} は次の対応で表される写像である ;

$$\begin{array}{ccc} \Psi^{-1} : \check{H}^1(X,G) & \longrightarrow & \Pi_{(X,G)} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \omega = [f] & \longmapsto & [(\mathcal{N}(\mathcal{Q})\times G)/R(ev)_f] \end{array}$$

6 On an abelian group of principal G-bundles in diffeology

Proposition 5.1.6 に引き続き, $\Pi_{(X,G)}$ を底空間に X を持つ principal G-bundle の同型類の集合とする. この章では前章の Ψ を用いて $\Pi_{(X,G)}$ に Abelian group の構造を導入する.
ここで定義される " 和 " の構成方法は Patrick Iglesias-Zemmour が [Ig] に記述したものと同じものである. 即ち, [KWW] の全単射 Ψ は [Ig] の和によって準同型写像となっていることが分かる. 証明は [N] を参照いただきたい.

Construction 6.1 (Addition of $\mathbf{\Pi_{(X,G)}}$)
$\pi : P \to X$, $\pi' : P \to X$ を principal G-bundles であるとし, $[P], [P']$ をそれぞれ π, π' を代表元にもつ類であるとする. 更に, $(\mathcal{Q}, \tau)$ 及び $(\mathcal{Q}, \tau')$ は π, π' の plotwise local trivialization であるとする.
$\Pi_{(X,G)}$ に入る和 " $+_{\Pi_{(X,G)}}$ " を次の様に定める ;

$$\begin{array}{rcl} +_{\Pi_{(X,G)}} : \Pi_{(X,G)} \times \Pi_{(X,G)} & \longrightarrow & \Pi_{(X,G)} \\ \cup & & \cup \\ ([P], [P']) & \longmapsto & \Psi^{-1}(\Psi([P]) + \Psi([P'])) \end{array}$$

Ψ 及び Ψ^{-1} の構成法から, $\Psi^{-1}(\Psi([P]) + \Psi([P'])) = [(\mathcal{N}(\mathcal{Q}) \times G)/R(ev)_{c(\tau,P)+c(\tau',P')}]$ と表される. この右辺は principal G-bundle $(\mathcal{N}(\mathcal{Q}) \times G)/R(ev)_{c(\tau,P)+c(\tau',P')} \to X$; $[(y,g)]_{c(\tau,P)+c(\tau',P')} \mapsto ev(y)$ の類である.
この新しくできた bundle を $\pi : P \to X$ 及び $\pi' : P' \to X$ により表したい.

Proposition 6.2 (principal $\mathbf{G-}$bundle $\widetilde{\pi}$)
$\pi : P \to X$, $\pi' : P \to X$ を principle G-bundles であるとする. $P \times_X P$ は π の π' による pull back である. つまり, 次の様に表される集合である. ;

$$P \times_X P = \{(p, p') \in P \times P' | \pi(p) = \pi'(p')\}$$

この集合は product diffeology の sub diffeology を入れることにより diffeological space となる. 更に $P \times_X P'$ に次の同値関係を入れ, この商を $(P \times_X P')/ \sim$ と表す. $P \times_X P$ からの quotient diffeology を入れることで此もまた diffeological space になる.

$$p \sim p' \ \ (p,\ p' \in P \times_X P') \iff \exists g \in G \ \ s.t.\ \ p = q \cdot g,\ \ p' = q' \cdot g^{-1}$$

上の " $\cdot$ " は P 及び P' それぞれで定義された G-action である. すると写像 $\widetilde{\pi} : (P \times_X P')/ \sim \to X$; $[(p,p')] \mapsto \pi(p) = \pi(p')$ は principal G-bundle となる.
この全空間への G-action を次で定義されるものとする ;

$$\begin{array}{rcl} (P \times_X P')/ \sim \ \times G & \longrightarrow & (P \times_X P')/ \sim \\ \cup & & \cup \\ ([(p,p'), g]) & \longmapsto & [(p \cdot g, p')] = [(p, p' \cdot g)] \end{array}$$

すると次の写像 $\widetilde{a}$ は diffeomorphism であり, その結果 $\widetilde{\pi}$ は principal G-bundle の定義 (Definition 3.2) を満たす.

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{a} : (P \times_X P')/ \sim \ \times G & \longrightarrow & (P \times_X P')/ \sim \ \times_X (P \times_X P')/ \sim \\ \cup & & \cup \\ ([(p,p')], g) & \longmapsto & ([(p,p')], [(p \cdot g, p')]) \end{array}$$

Proof)
[N] 参照.

Theorem 6.3
$\widetilde{\pi}:(P\times_X P')/\sim\ \to X$ を Prposition 6.2 で構成された principal G-bundle であるとする.
すると, $[(P\times_X P')/\sim]$ は $\Pi_{(X,G)}$ 上で $\Psi^{-1}(\Psi([P])+\Psi([P']))$ に一致する.

Proof)
[N] 参照.

結果, 次の様に表記できる ;

$$+_{\Pi_{(X,G)}}([P],[P']) := [(P\times_X P')/\sim]$$

此で和が定義できた. この和により, $\Pi_{(X,G)}$ に群構造が入る.

Theorem 6.4 (Abelian group structure)
導入された和 $+_{\Pi_{(X,G)}}$ により, $\Pi_{(X,G)}$ には Abel 群の構造が入る. この群における単位元・逆元は次の通りである.

【単位元】
自明束 $X\times G\to X$ を代表元にもつ類 $[X\times G]$

principal G-bundle $\pi:P\to X$ が与えられており, これを代表元とする類を $[P]$ とする.

【$[P]$ の逆元】
集合としては P と一致しているが P とは逆の smooth right G-action を持つ diffeological space を $\bar{P}$ とする.
(即ち, 任意の $\bar{p}\in\bar{P}$ に対して一致する $p\in P$ があり, 任意の $h\in G$ に関して $\bar{P}$ の G-action は $\bar{p}\cdot h := p\cdot h^{-1}$ で与えられている. " $\cdot$ " は $\bar{P}$, P それぞれの G-action である.)
$[P]$ の逆元は $\bar{\pi}:\bar{P}\to X$; $\bar{p}\mapsto\pi(p)$ で定義される principal G-bundle の類である.

Proof)
[N] 参照.

References

[AA] Alireza Ahmadi "*Diffeological Čech cohomology*",, arXiv:2303.03251vl [math.DG] 6 Mar 2023

[BH] John C.Baez and Alexander E.Hoffnung "*Convinient Categories of Smooth Spaces*" Depart-ment of Mathematics, University of California 92521 USA, arXiv:0807.1704v4 [math.DG] 8 Oct 2009

[CSW] J.Daniel Christensen, Gordon Sinnamon, Enxin Wu, "*The D-Topology for diffeological spaces*", Pacific J.Math. 272 (2014)

[Ig] Patrick Iglesias-Zemmour,"*Diffeology*", American Mathematical Society, (2022), INBN 978-7-5192-9608-7

[Ig2] Patrick Iglesias-Zemmour,"*Une Cohomologie De Čech Pour Les Espaces Differentiables Et Sa*

Relation A La Cohomologie De Rham", CentredePhysique Théorique CNRS case 907 LU MININY 13288 Marseille cedex 9, 27 décembre 1988, (version 0.5)

[Ig3] Patrick Iglesias-Zemmour,"*Čech-de-Rham Bicomplex in Diffeology*", (2020). URL:http://math.huji.ac.il/ piz/documents/CDRBCID.pdf.

[Ig4] Patrick Iglesias-Zemmour, "*AN INTRODUCTION TO DIFFEOLOGY*", August 25, 2017

[KWW] D.Krepski, J.Watts, and S.Wolbert, "*Sheaves, Principal G-bindles, Čech Cohomology for Diffeological Spaces*", arXiv:2111.01032v2 [math.DG] 26 Sep 2022.

[MW] Jean Pierre Magnot and Jordan Watts, "*The Diffeology of milnor's Classifying Space*", arXiv:1606.06680v3 [math.GT] 6 Oct 2017

[NA] Akber Dehghan Nazhad and Alireza Ahmadi, "*A novel approach to sheaves on diffeological spaces*" Topology and its Application,263 (2019) 141-153

[N] M. Noda, "*On an abelian group of principal G-bundles in diffeology*", in preparation.

[St] The Stacks Project, http://stacks.math.columbia.edu/browse

[青村] 青木 稔樹, 村山 春香, "*Sheaves and their cohomology*" 信州大学　卒業論文 (2015)

[渋] 渋谷 圭, "*Diffeology* に現れる 2 つの接空間の関係性"、信州大学　修士論文　(2020)

[志] 志甫 淳, 共立講座 数学の魅力 5 "層とホモロジー代数", 共立出版 (2021), ISBN 978-4-320-11160-8

[玉] 玉木 大, "ファイバー束とホモトピー", 森北出版 (2020), ISBN 978-4-627-05461-5

Mathematical and Social Systems Science Division
Department of Science and Technology
Graduate School of Medicine, Science and Technology
Shinshu University
Nagano 390-8621
JAPAN
E-mail address: `24hs604b@shinshu-u.ac.jp`

信州大学 総合医理工学研究科
総合理工学専攻 数理・社会システム科学分野
野田　真沙衣