不確実性をもつ単一施設ミニサム型配置問題

弘前大学 大学院 理工学研究科　金 正道 (Masamichi KON)
Graduate School of Science and Technology, Hirosaki University

概 要

本稿では、任意のノルムを用いた単一施設ミニサム型配置問題を考える。このとき、施設の利用者の位置を表す複数の需要点およびそれらに付随する施設利用の需要量を表す重みが与えられているとする。単一施設ミニサム型配置問題は、施設の位置（変数）から各需要点までの距離と付随する重みを乗じたものの総和を最小化する問題である。需要点および重みをパラメータとみなし、需要点の不確実性を有界不確実性集合として表し、重みの不確実性を区間不確実性集合として表す。そして、変数に関して最小化しパラメータに関して最大化するミニマックス問題とマクシミン問題の関係を考察する。

1　導入

$\mathbb{R}^n$ において、任意のノルムを用いた単一施設ミニサム型配置問題を考える。このとき、施設の利用者の位置を表す複数の需要点および施設利用の需要量を表すそれらに付随する重みが与えられているとする。ミニサム型配置問題は施設の位置（変数）から各需要点までの距離と付随する重みを乗じたものの総和を最小にするような施設の位置を求める問題である。本稿では不確実性をもつ単一施設ミニサム型配置問題を考察するが、不確実性をもたない単一施設ミニサム型配置問題については古くから多くの研究がある [6, 7, 12, 13, 14, 15]。

一方、需要点の位置や重みは正確にわからないことがしばしばある。このような状況を扱った研究として、不確実性を不確実性集合として扱った研究 [4, 5, 8, 9, 10, 17] や需要点の位置および重みの確率分布を仮定して確率的に扱った研究 [1, 3, 11, 16] などがある。

本稿では、不確実性を不確実性集合として扱う。これは、需要点の位置や重みに対する事前情報（データ）が少ないなどの理由により、確率分布を仮定できない場合に適してる。需要点および重みをパラメータとみなし、需要点の不確実性を有界不確実性集合として表し、重みの不確実性を区間不確実性集合として表す。そして、変数に関して最小化しパラメータに関して最大化するミニマックス問題とマクシミン問題の関係を考察する。ミニマックス問題はロバスト最適化 [2] であり、最悪な場合（パラメータに関する最大値）を最適化（変数に関する最小化）する問題である。マクシミン問題は、パラメータの選び方による最適値（変数に関する最小値）の最悪な場合（パラメータに関する最大化）を求める問題である。

Jamalian and Salahi [8] では、$\mathbb{R}^2$ において、ブロックノルムを用いたミニサム型配置問題の重みのみに区間不確実性集合を導入したミニマックス問題およびユークリッドノルム

を用いたミニサム型配置問題の需要点に有界不確実性集合, 重みに区間不確実性集合を導入したミニマックス問題が考察されている（その他、[17] も参照)。Juel [10] では、需要点のみに有界不確実性集合を導入したマクシミン問題が詳しく考察されている（その他、[4, 5, 9] も参照)。

2　ミニサム型配置問題と不確実性集合

$\mathbb{R}^n$ において、いくつかの需要点（施設の利用者の位置を表す固定された点）が与えられたとき、$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$（新たに配置する施設の位置を表す変数）から各需要点までの距離に付随する重み（施設利用の需要量を表す固定された値）を乗じたものの総和が最小になるような $\boldsymbol{x}$ を求める問題を**単一施設ミニサム型配置問題**または単に**ミニサム型配置問題**とよぶ。

$\boldsymbol{a}_i^0 \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \cdots, m$ を m 個の需要点とし、$\|\cdot\|$ を $\mathbb{R}^n$ 上のノルムとする。このとき、ミニサム型配置問題は次のように定式化される。

$$\text{(P)} \qquad \min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{m} w_i^0 \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}_i^0\|$$

ここで、各 $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$ に対して $w_i^0 > 0$ は需要点 $\boldsymbol{a}_i^0$ に付随する重みであり、$\boldsymbol{w}^0 = (w_1^0, w_2^0, \cdots, w_m^0)$ とする。以降、不確実性をもつミニサム型配置問題 (P) を考察する。

ミニサム型配置問題 (P) において、重みおよび需要点が不確実な場合を考える。まず

$$\underline{\boldsymbol{w}} = (\underline{w}_1, \underline{w}_2, \cdots, \underline{w}_m) \in \mathbb{R}^m, \quad \overline{\boldsymbol{w}} = (\overline{w}_1, \overline{w}_2, \cdots, \overline{w}_m) \in \mathbb{R}^m$$

とし

$$0 < \underline{w}_i \leq w_i^0 \leq \overline{w}_i, \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

とする。このとき

$$[\underline{\boldsymbol{w}}, \overline{\boldsymbol{w}}] = \{\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^m : \underline{\boldsymbol{w}} \leq \boldsymbol{w} \leq \overline{\boldsymbol{w}}\} \tag{1}$$

を重みに対する**区間不確実性集合**とよぶ。また、各 $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$ に対して、$r_i \geq 0$ とし

$$\mathcal{U}_i = \{\boldsymbol{a}_i^0 + \boldsymbol{a}_i : \boldsymbol{a}_i \in \mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{a}_i\| \leq r_i\} = \{\boldsymbol{b}_i \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{b}_i - \boldsymbol{a}_i^0\| \leq r_i\}, \quad i = 1, 2, \cdots, m \tag{2}$$

を需要点 $\boldsymbol{a}_i^0$ に対する**有界不確実性集合**とよぶ。

次に、$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{m \text{ times}} \to \mathbb{R}$ を各 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \cdots, w_m) \in \mathbb{R}^m$ および $\boldsymbol{b}_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \cdots, m$ に対して

$$f(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{w}, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_m) = \sum_{i=1}^{m} w_i \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}_i\| \tag{3}$$

とする。問題

$$\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} \max_{\boldsymbol{w}\in[\underline{\boldsymbol{w}},\overline{\boldsymbol{w}}],\boldsymbol{b}_i\in\mathcal{U}_i,i=1,\cdots,m} f(\boldsymbol{x};\boldsymbol{w},\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_m) \tag{4}$$

を**ミニマックス問題**とよび、その最適解を $\boldsymbol{x}^*\in\mathbb{R}^n$ とし、その最適値を $f_{\min\max}$ とする。問題

$$\max_{\boldsymbol{w}\in[\underline{\boldsymbol{w}},\overline{\boldsymbol{w}}],\boldsymbol{b}_i\in\mathcal{U}_i,i=1,\cdots,m} \min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x};\boldsymbol{w},\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_m) \tag{5}$$

を**マクシミン問題**とよび、その最適解を $\boldsymbol{w}^*\in[\underline{\boldsymbol{w}},\overline{\boldsymbol{w}}]$, $\boldsymbol{b}_i^*\in\mathcal{U}_i$, $i=1,2,\cdots,m$ とし、その最適値を $f_{\max\min}$ とする。

3　ミニマックス問題とマクシミン問題

ミニマックス問題 (4) とマクシミン問題 (5) の最適値の関係を考察する。

補題１ (Juel [10, Lemma 1]) 固定された $\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^n$ および $r\geq 0$ に対して、問題

$$\left|\begin{array}{ll} \max & \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| \\ \text{s.t.} & \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{a}\|\leq r \end{array}\right. \tag{6}$$

を考える。このとき、問題 (6) の最適値は $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|+r$ となる。また、問題 (6) の最適解は、$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{a}$ ならば $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a}+\frac{r}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{x})$ となり、$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$ ならば $\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{a}\|=r$ をみたす任意の $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$ となる。

次の定理は、ミニマックス問題 (4) の最適解と最適値を与える。

定理１　ミニサム型配置問題

$$(\overline{\mathrm{P}}) \qquad \min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x};\overline{\boldsymbol{w}},\boldsymbol{a}_1^0,\boldsymbol{a}_2^0,\cdots,\boldsymbol{a}_m^0)$$

の最適解を $\overline{\boldsymbol{x}}\in\mathbb{R}^n$ とし、最適値を $\overline{f}$ とする。このとき、$\boldsymbol{x}^*=\overline{\boldsymbol{x}}$ となり、$f_{\min\max}=\overline{f}+\sum_{i=1}^m\overline{w}_ir_i$ となる。

定理２ (Juel [10, Theorem 2]) $\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,\cdots,w_m)\in[\underline{\boldsymbol{w}},\overline{\boldsymbol{w}}]$ を任意に固定する。ミニサム型配置問題

$$(\mathrm{P}^{\boldsymbol{w}}) \qquad \min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x};\boldsymbol{w},\boldsymbol{a}_1^0,\boldsymbol{a}_2^0,\cdots,\boldsymbol{a}_m^0)$$

の最適解を $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{w}}\in\mathbb{R}^n$ とし、最適値を $f^{\boldsymbol{w}}$ とする。問題

$$\max_{\boldsymbol{b}_i\in\mathcal{U}_i,i=1,\cdots,m} \min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x};\boldsymbol{w},\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_m) \tag{7}$$

の最適解を $\boldsymbol{b}_i^{\boldsymbol{w}}\in\mathcal{U}_i, i=1,2,\cdots,m$ とし、最適値を $f_{\max\min}^{\boldsymbol{w}}$ とする。このとき、$\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{w}}\neq\boldsymbol{a}_i^0$, $i=1,2,\cdots,m$ ならば、$\boldsymbol{b}_i^{\boldsymbol{w}}=\boldsymbol{a}_i^0+\frac{r_i}{\|\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{w}}-\boldsymbol{a}_i^0\|}(\boldsymbol{a}_i^0-\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{w}})$, $i=1,2,\cdots,m$ となり、$f_{\max\min}^{\boldsymbol{w}}=f^{\boldsymbol{w}}+\sum_{i=1}^m w_ir_i$ となる。

次の定理は、ミニマックス問題 (4) の最適値とマクシミン問題 (5) の最適値の関係およびマクシミン問題 (5) の最適解を与える。

定理３ 問題 $(\mathrm{P}^{\overline{\boldsymbol{w}}})$（または $(\overline{\mathrm{P}})$）の最適解を $\boldsymbol{x}^{\overline{\boldsymbol{w}}} \in \mathbb{R}^n$ とする。このとき、$\boldsymbol{x}^{\overline{\boldsymbol{w}}} \neq \boldsymbol{a}_i^0$, $i = 1, 2, \cdots, m$ ならば、$f_{\max\min} = f_{\min\max}$ となり、$\boldsymbol{w}^* = \overline{\boldsymbol{w}}$ および $\boldsymbol{b}_i^* = \boldsymbol{a}_i^0 + \frac{r_i}{\|\boldsymbol{x}^{\overline{\boldsymbol{w}}} - \boldsymbol{a}_i^0\|}(\boldsymbol{a}_i^0 - \boldsymbol{x}^{\overline{\boldsymbol{w}}})$, $i = 1, 2, \cdots, m$ となる。

4 数値例

Juel [10] において与えらえた例を本稿の設定の下で用いる。

$n = 1$, $m = 2$ とし、$\|\cdot\| = |\cdot|$ とする。また、問題 $(\mathrm{P}^{\overline{\boldsymbol{w}}})$（または $(\overline{\mathrm{P}})$）の最適解を $x^{\overline{\boldsymbol{w}}} \in \mathbb{R}$ とし、最適値を $f^{\overline{\boldsymbol{w}}}$ とする。

例１ $a_1^0 = 0$, $a_2^0 = 4$, $r_1 = 1$, $r_2 = 2$ とし、$w_1^0 = w_2^0 = 1$, $\underline{w}_1 = \overline{w}_1 = \underline{w}_2 = \overline{w}_2 = 1$ とする。問題 $(\mathrm{P}^{\overline{\boldsymbol{w}}})$（または $(\overline{\mathrm{P}})$）の最適解は任意の $x^{\overline{\boldsymbol{w}}} \in [0, 4]$ となり、最適値は $f^{\overline{\boldsymbol{w}}} = 4$ となる。定理１より、ミニマックス問題 (4) の最適解 $x^* \in \mathbb{R}$ は任意の $x^* = x^{\overline{\boldsymbol{w}}} \in [0, 4]$ となり、最適値 $f_{\min\max}$ は $f_{\min\max} = f^{\overline{\boldsymbol{w}}} + \overline{w}_1 r_1 + \overline{w}_2 r_2 = 7$ となる。定理３より、マクシミン問題 (5) の最適解 $\boldsymbol{w}^* \in [\underline{\boldsymbol{w}}, \overline{\boldsymbol{w}}]$ および $b_1^*, b_2^* \in \mathbb{R}$ は $\boldsymbol{w}^* = \overline{\boldsymbol{w}} = (1, 1)$ および $b_1^* = -1$, $b_2^* = 6$ となり（$x^{\overline{\boldsymbol{w}}} = a_1^0 = 0$ のときは $b_1^* = 1$ でもよく、$x^{\overline{\boldsymbol{w}}} = a_2^0 = 4$ のときは $b_2^* = 2$ でもよい)、最適値 $f_{\max\min}$ は $f_{\max\min} = f_{\min\max} = 7$ となる。

例２ $a_1^0 = 0$, $a_2^0 = 4$, $r_1 = r_2 = 1$ とし、$w_1^0 = 1$, $w_2^0 = 2$, $\underline{w}_1 = \overline{w}_1 = 1$, $\underline{w}_2 = \overline{w}_2 = 2$ とする。問題 $(\mathrm{P}^{\overline{\boldsymbol{w}}})$（または $(\overline{\mathrm{P}})$）の最適解は $x^{\overline{\boldsymbol{w}}} = a_2^0 = 4$ となり、最適値は $f^{\overline{\boldsymbol{w}}} = 4$ となる。定理１より、ミニマックス問題 (4) の最適解 $x^* \in \mathbb{R}$ は $x^* = x^{\overline{\boldsymbol{w}}} = 4$ となり、最適値 $f_{\min\max}$ は $f_{\min\max} = f^{\overline{\boldsymbol{w}}} + \overline{w}_1 r_1 + \overline{w}_2 r_2 = 7$ となる。マクシミン問題 (5) の最適解 $\boldsymbol{w}^* \in [\underline{\boldsymbol{w}}, \overline{\boldsymbol{w}}]$ および $b_1^*, b_2^* \in \mathbb{R}$ は $\boldsymbol{w}^* = \overline{\boldsymbol{w}} = (1, 2)$ および $b_1^* = -1$, $b_2^* = 5$ となり、最適値 $f_{\max\min}$ は $f_{\max\min} = 6$ となる。このとき、$f_{\max\min} = 6 < 7 = f_{\min\max}$ となっている。

5 結論

本稿では、任意のノルムを用いた単一施設ミニサム型配置問題を考えた。単一施設ミニサム型配置問題は、施設の位置（変数）から各需要点までの距離と付随する重みを乗じたものの総和を最小化する問題である。まず、需要点および重みをパラメータとみなし、需要点の不確実性を有界不確実性集合として表し、重みの不確実性を区間不確実性集合として表した。そして、変数に関して最小化しパラメータに関して最大化するミニマックス問題とマクシミン問題の関係を考察した。定理１として、ミニマックス問題の最適解および最適値を与えた。定理３として、マクシミン問題の最適値とミニマックス問題の最適値が一致する条件を与え、そのときのマクシミン問題の最適解を与えた。さらに、定理３の条件がみたされないとき、マクシミン問題の最適値とミニマックス問題の最適値が一致しない例を与えた。

参考文献

[1] A. A. Aly and J. A. White, Probabilistic formulations of the multifacility Weber problem, Naval Research Logistics Quarterly, Vol.25, No.3, 1978, pp.531–547.

[2] A. Ben-Tal, L. El Ghaoui and A. Nemirovski, Robust Optimization, Princeton University Press, 2009.

[3] L. Cooper, A random locational equilibrium problem, Journal of Regional Science, Vol.14, No.1, 1974, pp.47–54.

[4] L. Cooper, Bounds on the Weber problem solution under conditions of uncertainty, Journal of Regional Science, Vol.18, No.1, 1978, pp.87–93.

[5] Z. Drezner, Bounds on the optimal location to the Weber problem under conditions of uncertainty, Journal of the Operations Research Society, Vol.30, 1979, pp.923–931.

[6] Z. Drezner and G. O. Wesolowsky, The asymmetric distance location problem, Transportation Science, Vol.23, No.3, 1989, pp.201–207.

[7] R. L. Francis, L. F. McGinnis, Jr. and J. A. White, Facility Layout and Location: An Analytical Approach (Second Edition), Prentice Hall, 1992.

[8] A. Jamalian and M. Salahi, Robust solutions to multi-facility Weber location problem under interval and ellipsoidal uncertainty, Applied Mathematics and Computation, Vol.242, 2014, pp.179–186.

[9] H. Juel, A note on bounds on the Weber problem solution under conditions of uncertainty, Journal of Regional Science, Vol.20, No.4, 1980, pp.523–524.

[10] H. Juel, Bounds in the generalized Weber problem under locational uncertainty, Operations Research, Vol.29, No.6, 1981, pp.1219–1227.

[11] I. N. Katz and L. Cooper, Optimal facility location for normally and exponentially distributed points, Journal of Research of the National Bureau of Standards, Vol.80B, No.1, 1976, pp.53–73.

[12] M. Kon and S. Kushimoto, A single facility minisum location problem under the A-distance, Journal of the Operations Research Society of Japan, Vol.40, No.1, 1997, pp.10-20.

[13] R. F. Love, J. G. Morris and G. O. Wesolowsky, Facilities Location: Models & Methods, North-Holland, New York, 1988.

[14] J. E. Ward, R. E. Wendell, A new norm for measuring distance which yields linear location problems, Operations Research, Vol.28, No.3, 1980, pp.836–844.

[15] J. E. Ward, R. E. Wendell, Using block norms for location modeling, Operations Research, Vol.33, No.5, 1985, pp.1074–1090.

[16] G. O. Wesolowsky, The Weber problem with rectangular distances and randomly distributed destinations, Journal of Regional Science, Vol.17, No.1, 1977, pp.53–60.

[17] L. Zhang and S. Wu, Robust solutions to Euclidean facility location problems with uncertain data, Journal of Industrial and Management Optimization, Vol.6, No.4, 2010, pp.751-760.