レベル依存のある区分的に決定的なマルコフ過程における拡散過程の定常分布について

東海大学・理学部情報数理学科　小林 正弘 *
Masahiro Kobayashi
Department of Mathematical Sciences, School of Science
Tokai University

1　本研究のモデル

本研究では，レベル依存のある区分的に決定的なマルコフ過程の定常分布について考える．区分的に決定的であるマルコフ過程は，連続でない点の集合が高々可算である確率過程であり，M/G/1 待ち行列や GI/GI/1 待ち行列など多くの確率モデルを包括するマルコフ過程である．一般的には区分的に決定的であるマルコフ過程の定常分布を解析的な表現で求めるのは難しい．そのため，安定条件や保存則などの別の評価量が求められている研究などがある．一方，その拡散近似を行った拡散過程についての解析も行われている．文献 [3] では，GI/GI/1 待ち行列の拡散過程の定常分布が指数分布になることを示している．また，拡張したモデルにおいて，拡散過程とその定常分布に関する研究がなされてきた（文献 [1, 2, 4, 5, 6] やそれらの参考文献など）．レベル依存のあるモデルに対しては，文献 [7] があり，拡散過程（SRBM）についての定常分布が求められている．本研究では，レベル依存のある区分的に決定的なマルコフ過程の定常分布の拡散近似について考えていく．

本研究の確率過程を紹介する．そのため，以下の集合を使う．$\mathbb{R}$ を実数全体の集合，$\mathbb{Z}$

* 〒259-1292 神奈川県平塚市北金目 4-1-1 m_kobayashi@tokai.ac.jp

を整数全体の集合とし，

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\}, \qquad \mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\},$$
$$\mathbb{Z}_+ = \{x \in \mathbb{Z}; x \geq 0\}, \qquad \mathbb{N} = \{x \in \mathbb{Z}; x > 0\}$$

とする．$i \in \mathbb{N}$ として，各 i に対して $\{\boldsymbol{X}^{(i)}(t) = (X^{(i)}(t), X_+^{(i)}(t)X_-^{(i)}(t)) \in \mathbb{R}_+^3; t \in \mathbb{R}_+\}$ を連続時間確率過程，$\{T_+^{(i)}(n) \in \mathbb{R}_{>0}; n \in \mathbb{N}\}$ と $\{T_-^{(i)}(n) \in \mathbb{R}_{>0}; n \in \mathbb{N}\}$ を同一分布に従いかつすべてと互いに独立である離散時間確率過程とし， $\{T_+^{(i)}(n)\}$ と $\{T_-^{(i)}(n)\}$ と同一分布となる確率変数をそれぞれ $T_+^{(i)}, T_-^{(i)}$ とする．また，$X_+^{(i)}(0), X_-^{(i)}(0) \in \mathbb{R}_{>0}$ を仮定する．N をある正の整数，$\ell_1^{(i)}, \ell_2^{(i)}, \dots \ell_N^{(i)}$ を $\ell_1^{(i)} < \ell_2^{(i)} < \cdots < \ell_N^{(i)}$ を満たす正の整数とし，

$$\begin{aligned}
&L_0^{(i)} = \{x \in \mathbb{Z}_+; 0 \leq x \leq \ell_1^{(i)}\},\\
&L_k^{(i)} = \{x \in \mathbb{Z}_+; \ell_k^{(i)} + 1 \leq x \leq \ell_{k+1}^{(i)}\}, \qquad k = 1, 2, \dots, N-1,\\
&L_N^{(i)} = \{x \in \mathbb{Z}_+; \ell_N^{(i)} + 1 \leq x < \infty\}.
\end{aligned}$$

とする．$k = 0, 1, 2, \dots, N$ に対して，$L_k^{(i)}$ はレベル k と呼ばれる．本研究における確率過程 $\{\boldsymbol{X}^{(i)}(t)\}$ は (1.1)–(1.3) で与えられるとする．

$$X_+^{(i)}(t) = X_+^{(i)}(0) + \sum_{n=1}^{N_+^{(i)}(t)} T_+^{(i)}(n) - \sum_{k=0}^{N} \int_0^t c_{+,k}^{(i)} 1_{\{X^{(i)}(u) \in L_k^{(i)}\}} du, \tag{1.1}$$

$$X_-^{(i)}(t) = X_-^{(i)}(0) + \sum_{n=1}^{N_-^{(i)}(t)} T_-(n) - \sum_{k=0}^{N} \int_0^t c_{-,k}^{(i)} 1_{\{X^{(i)}(u) > 0, X^{(i)}(u) \in L_k^{(i)}\}} du, \tag{1.2}$$

$$X^{(i)}(t) = X^{(i)}(0) + N_+^{(i)}(t) - N_-^{(i)}(t), \tag{1.3}$$

ただし，$k = 0, 1, 2 \dots, N$ に対して $c_{+,k}^{(i)}$ と $c_{-,k}^{(i)}$ は k に依存してもよい正の実数，$\{N_+^{(i)}(t); t \in \mathbb{R}_+\}$ と $\{N_-^{(i)}(t); t \in \mathbb{R}_+\}$ は，$u \in \mathbb{R}_{>0}$ に対して，$X_+^{(i)}(u-) = 0$ と $X_-^{(i)}(u-) = 0$ となる u の回数に関する計数過程とする，すなわち，

$$N_+^{(i)}(t) = \sum_{u \in (0,t]} 1_{\{X_+^{(i)}(u-) = 0\}}, \qquad N_-^{(i)}(t) = \sum_{u \in (0,t]} 1_{\{X_-^{(i)}(u-) = 0\}}, \qquad t \in \mathbb{R}_{>0}.$$

このとき，$\{\boldsymbol{X}^{(i)}(t)\}$ の標本路の例は図 1 のようになる．

図 1 を見て分かる通り，$\{\boldsymbol{X}^{(i)}(t)\}$ は過去に依存せず，区分的に決定的なマルコフ過程である．さらに，レベルによって $\{X_+^{(i)}(t)\}$ と $\{X_-^{(i)}(t)\}$ の減少が異なっており，それにより $\{X^{(i)}(t)\}$ の挙動も変化する．各 $i \in \mathbb{N}$ に対して，$\{\boldsymbol{X}^{(i)}(t)\}$ をレベル依存のある区

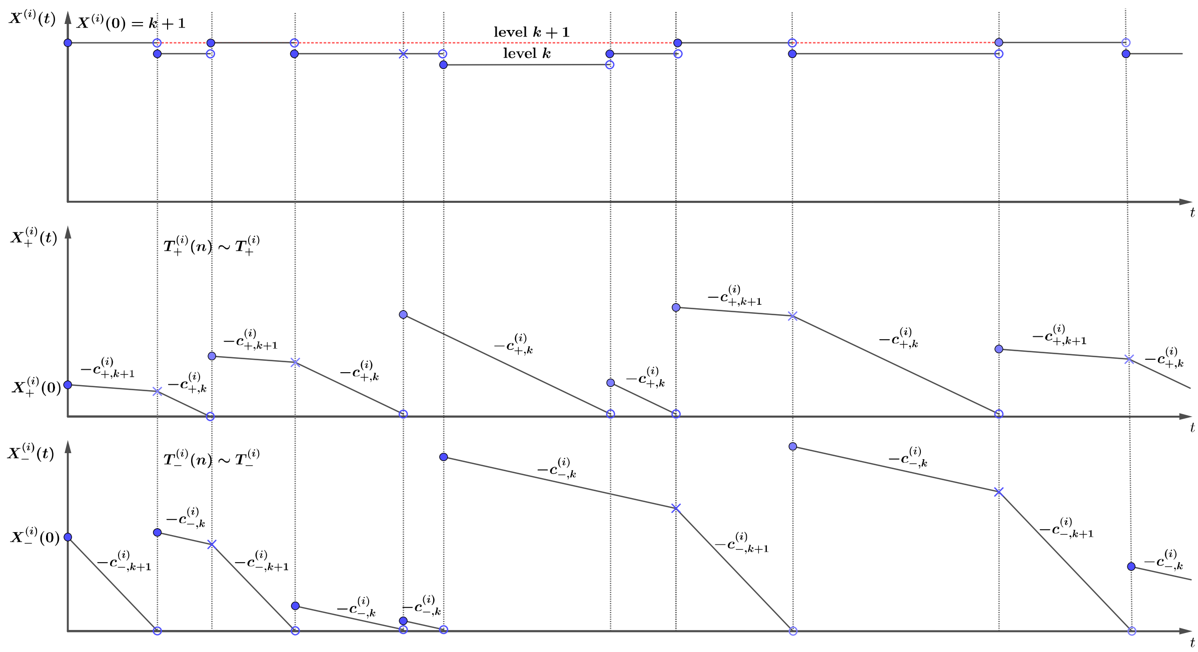

図 1　本研究の標本路

分的に決定的なマルコフ過程と呼ぶ．本研究における $\{\boldsymbol{X}^{(i)}(t)\}$ は，$X^{(i)}(t)=0$ であると，$X_-^{(i)}(t)$ は減少しない．また，任意の $t\in\mathbb{R}_+$ に対して，$X_+^{(i)}(t)\neq 0$ と $X_-^{(i)}(t)\neq 0$ であるが，左極限 $X_+^{(i)}(t_1-)=0, X_-^{(i)}(t_2-)=0$ となる $t_1,t_2\in\mathbb{R}_{>0}$ が存在することに注意する．また，$X_+^{(i)}(t-)=X_-^{(i)}(t-)=0$ である $t\in\mathbb{R}_{>0}$ が存在してもよい．

2　本研究の結果

本研究の結果である定常分布の拡散近似について述べていく．そのためにはいくつかの仮定が必要である．定常分布を考えるため，まずは本研究の安定性を仮定していく．定義より $\{X_+^{(i)}(t)\}$ と $\{X_-^{(i)}(t)\}$ は連続な点では狭義単調減少であるため，必ず安定である．$m_+^{(i)}$ と $m_-^{(i)}$ を確率変数 $T_+^{(i)}$ と $T_-^{(i)}$ の期待値とする．$\{X^{(i)}(t)\}$ の安定性はレベル N における平均変化時間で表され，レベル N における $\{X^{(i)}(t)\}$ が増加する平均時間は $\dfrac{m_+^{(i)}}{c_{+,N}^{(i)}}$，減少する平均時間は $\dfrac{m_-^{(i)}}{c_{-,N}^{(i)}}$ であるため，以下を満たすとき $\{\boldsymbol{X}^{(i)}(t)\}$ は安定である．

$$\frac{m_-^{(i)}}{c_{-,N}} < \frac{m_+^{(i)}}{c_{+,N}}. \tag{2.1}$$

本研究では安定条件である (2.1) を仮定し，定常分布を $\pi^{(i)}$ とする．(2.1) の仮定のもとで，定常過程が存在する．その定常過程に関して，シフト関数 $\{\Theta_t^{(i)}; t \in \mathbb{R}_+\}$ に関する定常性も同時に仮定しておく．

(i) $A \in \mathcal{F}_t^{(i)}$ に対して, $(\Theta_s^{(i)})^{-1}A \in \mathcal{F}_{s+t}^{(i)}$. ただし，$\mathcal{F}_t^{(i)} = \sigma(\{\boldsymbol{X}^{(i)}(t); 0 \le u \le t\})$.

(ii) $t, s \in \mathbb{R}_+$ に対して, $\boldsymbol{X}^{(i)}(t) \circ \Theta_s^{(i)} = \boldsymbol{X}^{(i)}(t+s)$, $N_+^{(i)}(t) \circ \Theta_s^{(i)} = N_+^{(i)}(t+s) - N_+^{(i)}(s), N_-^{(i)}(t) \circ \Theta_s^{(i)} = N_-^{(i)}(t+s) - N_-^{(i)}(s)$.

さらに，拡散近似における標準的な仮定をする．$(\sigma_+^{(i)})^2$ と $(\sigma_-^{(i)})^2$ をそれぞれ $T_+^{(i)}$ と $T_-^{(i)}$ の分散，$\mu_+^{(i)} = (m_+^{(i)})^{-1}$，$\mu_-^{(i)} = (m_-^{(i)})^{-1}$ とする．また，

$$\rho_k^{(i)} = \frac{c_{+,k}^{(i)} m_-^{(i)}}{c_{-,k}^{(i)} m_{+,k}^{(i)}} = \frac{c_{+,k}^{(i)} \mu_+^{(i)}}{c_{-,k}^{(i)} \mu_-^{(i)}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, N$$

とする．明らかに，以下の (2.2) は (2.1) と同値である．

$$\rho_N^{(i)} < 1. \tag{2.2}$$

$\{r_i; i \in \mathbb{N}\}$ を $r_i > 0$ かつ $\lim_{i\to\infty} r_i = 0$ を満たす実数列とする．これらから以下を仮定する．

(iii) 任意の $i \in \mathbb{N}$ に対して, $\left(T_+^{(i)}\right)^3$ と $\left(T_-^{(i)}\right)^3$ の期待値が共に有界である．

(iv) $\{\mu_+^{(i)}; i \in \mathbb{N}\}, \{\mu_-^{(i)}; i \in \mathbb{N}\}, \{\sigma_+^{(i)}; i \in \mathbb{N}\}, \{\sigma_-^{(i)}; i \in \mathbb{N}\}, \{c_{+,k}^{(i)}; i \in \mathbb{N}\}, \{c_{-,k}^{(i)}; i \in \mathbb{N}\}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, N)$ の i についての極限が存在する． それらの極限をそれぞれ $\mu_+, \mu_-, \sigma_+, \sigma_-, c_{+,k}, c_{-,k}$ とする．

(v) $k = 0, 1, \ldots, N-1$ に対して，$b_k \in \mathbb{R}$ があり，

$$\rho_k^{(i)} = 1 - r_i b_k + o(r_i), \quad i \to \infty$$

を満たすとする． 同様に $b_N \in \mathbb{R}_{>0}$ があり，

$$\rho_N^{(i)} = 1 - r_i b_N + o(r_i), \quad i \to \infty$$

を満たすとする．

(vi) $k = 1, 2, \ldots, N$ に対して，

$$r_i \ell_k^{(i)} = \ell_k + o(r_i), \quad i \to \infty$$

を満たすとする．

(iv) と (v) 条件から，すべての $k = 0, 1, 2, \ldots, N$ に対して，$c_{+,k}\mu_+ = c_{-,k}\mu_-$ が成立する．これらの条件を仮定すると，定常分布の拡散近似を得ることができる．

本研究の結果を述べていく．$\alpha_+^{(i)} = \mathbb{E}(N_+^{(i)}(1))$ とし，定常分布 $\pi^{(i)}$ に従う確率ベクトルを $\boldsymbol{X}^{(i)} = (X^{(i)}, X_+^{(i)}, X_-^{(i)})$ とする．さらに，$\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ を $\mathbb{R}_+$ 上のボレル集合体，$\nu^{(i)} : \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \to [0, 1]$ を

$$\nu^{(i)}(B) = \mathbb{P}(r_i X^{(i)} \in B), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), i \in \mathbb{N}$$

とする．$k = 0, 1, 2, \ldots, N$ に対して, $\nu_k^{(i)}$ を

$$\nu_k^{(i)}(B) = \mathbb{P}(r_i X^{(i)} \in B, X^{(i)} \in L_k), \qquad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$$

とする．このとき，$\nu^{(i)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \nu_k^{(i)}$ であり，$\nu^{(i)}$ は $\nu_k^{(i)}$ の周辺確率分布である．また，以下の条件付き確率分布を定義する．

$$\nu_{|k}^{(i)}(B) = \mathbb{P}(r_i X^{(i)} \in B | X^{(i)} \in L_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, N, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+).$$

さらに，$\sigma^2 = \mu_+^2 \sigma_+^2 + \mu_-^2 \sigma_-^2$, $k = 0, 1, 2, \ldots, N$ に対して $\beta_k = \dfrac{2b_k}{\sigma_k^2}$ とし，$x \in \mathbb{R}_+$ に対して,

$$h_{|k}(x) = \delta_{L_k}(x) \times \begin{cases} \dfrac{1}{\ell_{k+1} - \ell_k}, & b_k = 0,\ k = 0, 1, 2, \ldots, N-1, \\ \dfrac{\beta_k}{e^{-\beta_k \ell_k} - e^{-\beta_k \ell_{k+1}}} e^{-\beta_k x}, & b_k \neq 0,\ k = 0, 1, 2, \ldots, N-1, \\ \beta_N e^{-\beta_N (x - \ell_N)}, & k = N \end{cases}$$

とする．ただし，$\ell_0 = 0$ であり，δ_{L_k} は以下のデルタ関数である．

$$\delta_{L_k}(x) = \begin{cases} 1, & x \in L_k, \\ 0, & \text{その他}. \end{cases}$$

各 $k = 0, 1, 2, \ldots, N$ に対して, $h_{|k}$ は確率密度関数であり，$h_{|k}$ が確率密度関数である確率分布を $\nu_{|k}$ とする．

$$\nu_{|k}(B) = \int_B h_{|k}(x)\, dx, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, N, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+).$$

以下が本研究の結果である．

定理 2.1 本研究の仮定のもとで，$k = 0, 1, 2, \ldots, N$ に対して，$\lim_{i\to\infty} \nu_k^{(i)}(\mathbb{R}_+) > 0$ が成立するとき，

$$\lim_{i\to\infty} \nu_{|k}^{(i)}(B) = \nu_{|k}(B), \qquad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+).$$

さらに，$\{\alpha_+^{(i)}; i \in \mathbb{N}\}$ が収束列であるとき，$\nu^{(i)}$ が弱収束する確率分布 ν が存在する，すなわち，

$$\lim_{i\to\infty} \nu^{(i)}(B) = \nu(B), \qquad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+).$$

また，以下の系を得る．

系 2.1 $c_{+,0} = c_{+.1} = \cdots = c_{+,N}$ が成立するもしくは $i \in \mathbb{N}$ に対して，$T_-^{(i)}$ が指数分布に従うのであれば．$\{\alpha_+^{(i)}; i \in \mathbb{N}\}$ は収束列である．

謝辞

本研究は京都大学の国際共同利用・共同研究拠点である数理解析研究所の支援と JSPS 科研費 JP19K11845 の助成を受けたものです．

参考文献

[1] Chen, H. and Yao, D. D. (2000). *Fundamnetal of Queueing Networks. Springer-Verlag*, New York.

[2] Harrison, J. M. (2013). *Brownian Models of Performance and Control. Cambridge University Press*, New York.

[3] Kingman, J. F. C. (1961). The single server queue in heavy traffic. *Mathematica Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **57**, 902–904.

[4] Kingman, J. F. C. (1962). On queues in heavy traffic. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B*, **24**, 383–392.

[5] Mandelbaum, A. and Pats, G. (1998). State-dependent stochastic networks. part I: approximations and applications with continuous diffusion limits. *Annals of Applied Probability*, **8**, 569–646.

[6] Miyazawa, M. (2017). A unified approach for large queue asymptotics in a heterogeneous multiserver queue. *Advances in Applied Probability*, **49**, 182–220.

[7] Miyazawa, M. (2024). Multi-level reflecting Brownian motion on the half line and its stationary distribution. *Journal of the Indian Society for Probability and Statistics*, **25**, 543–574.