

休暇を伴う単一窓口待ち行列における 到着客の戦略的意思決定

防衛大学校 サイバー・情報工学科 * 佐久間 大
Yutaka Sakuma

Department of Computer Science, National Defense Academy of Japan

1 はじめに

本研究では、単一窓口をもつ待ち行列における到着客の意思決定について考察する。特に、到着客が待ち行列に到着した際、待ち行列の状態（窓口のサービス状況や待ち人数）を観測し、系内滞在時間を見積もることで、待ち行列へ加入するか否かを意思決定する状況に注目する。待ち行列における系内滞在時間は、到着してから窓口を退去するまでの時間であり、到着客が窓口でサービスを完了する価値と比較して評価される重要な指標である。この指標は、到着客が待ち行列に加入するかどうかを決定する上で重要な役割を果たす。例えば、銀行の窓口や空港のチェックインカウンターのように、到着客がサービス完了までに待ち時間を経験する場面では、系内滞在時間を予測することが意思決定に影響を与える。待ち行列において、到着客が系内滞在時間を見積もる際、前方の待ち客数だけでなく、窓口の状態も考慮する必要がある。窓口の状態としては、客をサービス中である場合や休暇状態である場合などが挙げられる。

ここでは、休暇を伴う単一窓口待ち行列 ($M_n/G_n/1$ 待ち行列) における到着客の意思決定について、確率的に加入・非加入を行うモデルを用いて分析する。ここで、 M_n および G_n の添え字は、それぞれ到着やサービス時間が待ち客数に依存することを意味する。待ち行列理論の分野では、休暇がある待ち行列は古くから研究されており（例えば、文献 [7] 参照）、その後、到着客の意思決定に関する研究も近年活発に行われている。

文献 [3] は、到着客が確率的に加入・非加入を行う $M_n/G/1$ 待ち行列について、到着時に観測される待ち客数を条件としたラプラス変換の再帰式を導出した。また、このラプラス変換が、到着時に観測した待ち客数以下の加入確率によって特徴づけられることを示した。その後、文献 [1] は、サービス時間分布が待ち客数に依存する $M_n/G_n/1$ 待ち行列への一般化を行い、補助変数法を用いた解析を行った。さらに、文献 [6] は、窓口の休暇を伴うモデルへの拡張を行い、レベルクロッシング論法（文献 [2]）の延長形（文献 [5]）を用いて、文献 [3] と類似の結果を得た。

本研究では、これらの先行研究とは異なるより簡潔なアプローチを採用し、休暇を伴う $M_n/G_n/1$ 待ち行列の解析を目指す。そのためここでは、サービス時間分布を待ち客数に依存する相型分布（ PH_n と表記）とした休暇を伴う $M_n/PH_n/1$ 待ち行列について、マルコフ連鎖の初等的性質を用いた解析手法について述べる。その結果を、休暇を伴う $M_n/PH/1$ 待ち行列へ適用することで、先行研究と同様に、到着客の期待系内滞在時間と加入確率の依存関係について明らかにする。

2 複数休暇を伴う $M_n/PH_n/1$ 待ち行列

ここでは、到着客の待ち行列への加入およびサービス時間が待ち客数に依存し、窓口は全処理方式に従い客のサービスを行い、サービス完了時に客数 0 を観測したときには、複数休暇をとる単一窓口の待ち行列を考える。この待ち行列について、連続時間型マルコフ連鎖としての推移構造を示し、それが状態依存型の推移をもつ準出生死滅過程であることを述べる。

2.1 モデルの仮定

客の到着について、率 λ のポアソン過程に従い客が到着し、待ち客数 $n \geq 0$ （待ち客数はサービス中の客数を含まない）、サービス中の客数 $k \in \{0, 1\}$ を観測したとき、到着客は確率 $p_{n,k}$ で待ち行列に加入するものとする（ $p_{n,k}$ を加入確率と呼ぶ）。客のサービス時間（確率変数 X ）については、待ち客数 n の状態で窓口がサービスを開始するとき、サービス時間は表現 (α_n, \mathbf{T}_n) （ここで、 \mathcal{X}_n を有限集合とし、 α_n はサイズ \mathcal{X}_n 上の確率分布を表すベクトル、 \mathbf{T}_n は一時的な連続時間型マルコフ連鎖の $\mathcal{X}_n \times \mathcal{X}_n$ 推移速度行列）の相型分布に従うものとする、つまり、 X の確率分布は、

$$\Pr(X \leq x) = 1 - \alpha_n^\top \exp(x\mathbf{T}_n)\mathbf{1}, \quad x \geq 0, \quad (1)$$

で与えられる（文献 [4] 参照）。ここで、 $\mathbf{1}$ は全ての要素が 1 であるベクトルを表し、そのサイズは文脈によって決まるものとする。最後に、窓口の休暇について、ここでは、複数休暇（multiple vacations）を仮定し、1 休暇あたりの時間の長さは、表現 (β, \mathbf{U}) の相型分布（ここで、 \mathcal{Y} を有限集合とし、 β は \mathcal{Y} 上の確率分布、 \mathbf{U} は一時的な連続時間型マルコフ連鎖の $\mathcal{Y} \times \mathcal{Y}$ 推移速度行列）に従うものとする。つまり、窓口がサービス完了時に待ち客数 0 を観測した際には、直ちに表現 (β, \mathbf{U}) の相型分布に従う休暇時間に入る。その後、窓口が休暇から復帰した際、待ち客がない場合には、再度、同一の分布に従う休暇時間に入る。一方、休暇から復帰した窓口が待ち客数 $n + 1$ を観測した際には、先頭の待ち客に対して表現 (α_n, \mathbf{T}_n) の相型分布に従うサービスを開始し、待ち客がいなくなるまで窓口はサービスし続ける（exhaustive service）。この待ち行列モデルを、複数休暇を伴う $M_n/PH_n/1$ 待ち行列と呼ぶ。

2.2 モデルの推移構造

複数休暇を伴う $M_n/PH_n/1$ 待ち行列の連続時間型マルコフ連鎖としての推移構造について述べる。時刻 t におけるサービス中の客を含まない待ち客数を $N_q(t) \geq 0$ 、サービス中の客数を $S(t) \in \{0, 1\}$ ($S(t) = 0$ は窓口が休暇中であることに等価) で表す。さらに、窓口の休暇もしくはサービス時間の状態を $Z(t)$ で表す。このとき、連続時間型マルコフ連鎖 $(N_q(t), S(t), Z(t))$ の状態空間および推移構造は以下で与えられる。休暇を伴うモデルの仮定から、待ち客数 $N_q(t) = n \geq 0$ で窓口が休暇中（つまり、 $S(t) = 0$ ）であるときは、 $(N_q(t), S(t), Z(t)) \in \mathcal{L}_n := \{n\} \times \{0\} \times \mathcal{Y}$ である。一方、待ち客数 $N_q(t) = n \geq 0$ で窓口がサービス中（つまり、 $S(t) = 1$ ）のときは、 $(N_q(t), S(t), Z(t)) \in \mathcal{U}_n := \{n\} \times \{1\} \times (\cup_{k=0}^n \mathcal{X}_k)$ である。窓口がサービス中であるときの部分状態が \mathcal{U}_n で与えられることは、サービス時間分布がサービス開始時の客数に依存するモデルの仮定から従う。このマルコフ連鎖の状態推移図を図 1 に示す。図中の矢印は対応する部分状態間での推移があることを意味し、それらの（部分）推移速度行列は以下の通り与えられる。まず、窓口が休暇中である状態間の推移、もしくは、休暇中からサービス状態への推移は、以下の通りである： $\mathbf{u} := -\mathbf{U}\mathbf{1}$ とし、さらに、 \mathbf{I} および \mathbf{O} はそれぞれ文脈に合わせたサイズをもつ単位行列および零行列として、

$$\mathbf{Q}_{\mathcal{L}_0\mathcal{L}_0} = \mathbf{U} + \mathbf{u}\beta^\top - \lambda p_{0,0}\mathbf{I}, \quad \mathbf{Q}_{\mathcal{L}_n\mathcal{L}_n} = \mathbf{U} - \lambda p_{n,0}\mathbf{I} \quad (n \geq 1), \quad (2)$$

$$\mathbf{Q}_{\mathcal{L}_n\mathcal{L}_{n+1}} = \lambda p_{n,0}\mathbf{I} \quad (n \geq 0), \quad \mathbf{Q}_{\mathcal{L}_n\mathcal{U}_{n-1}} = (\mathbf{O}, \mathbf{u}\alpha_{n-1}^\top) \quad (n \geq 1) \quad (3)$$

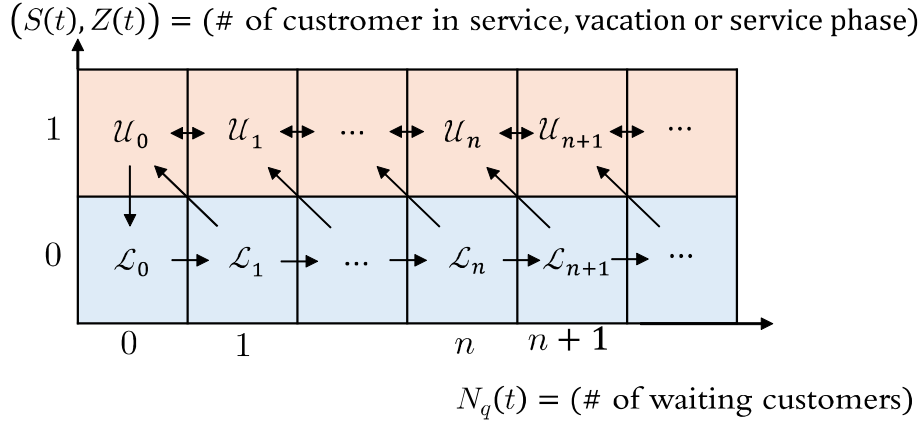


図1 複数休暇を伴う $M_n/PH_n/1$ 待ち行列の状態推移

である。同様にして、窓口がサービス中である状態間の推移、もしくは、サービス中から休暇状態への推移は以下の通りである： $t_n := -T_n \mathbf{1}$ とし、

$$Q_{u_n u_n} = \begin{pmatrix} T_0 - \lambda p_{n,1} \mathbf{I} & & \\ & \ddots & \\ & & T_n - \lambda p_{n,1} \mathbf{I} \end{pmatrix} \quad (n \geq 0), \quad (4)$$

$$Q_{u_n u_{n+1}} = \begin{pmatrix} \lambda p_{n,1} \mathbf{I} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda p_{n,1} \mathbf{I} & \mathbf{O} \end{pmatrix} \quad (n \geq 0), \quad (5)$$

$$Q_{u_n u_{n-1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & t_0 \alpha_{n-1}^\top \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{O} & t_n \alpha_{n-1}^\top \end{pmatrix} \quad (n \geq 1), \quad Q_{u_0 \mathcal{L}_0} = t_0 \beta^\top \quad (6)$$

である。

2.3 定常分布

これ以降、待ち行列は定常分布 ($\boldsymbol{\pi}^\top = (\boldsymbol{\pi}_{\mathcal{L}_n}^\top, \boldsymbol{\pi}_{u_n}^\top; n \geq 0)$ で表記) をもつと仮定して、定常分布 $\boldsymbol{\pi}$ の計算方法について述べる。その計算方法は、マルコフ連鎖の初等的性質に基づき、以下3つの手順に分けられる。

1. \mathcal{L}_0 上のセンサー過程に注目し、部分ベクトル $\boldsymbol{\pi}_{\mathcal{L}_0}$ (の定数倍) を計算する。
2. \mathcal{L}_{n-1} と \mathcal{L}_n ($n \geq 1$) の推移関係に注目し、部分ベクトル $\boldsymbol{\pi}_{\mathcal{L}_n}$ を $\boldsymbol{\pi}_{\mathcal{L}_{n-1}}$ で表す。
3. 部分状態 $\{\cup_{k=0}^n (\mathcal{L}_k \cup u_k)\} \cup \mathcal{L}_{n+1}$ 上のセンサー過程を考え、部分ベクトル $\boldsymbol{\pi}_{u_n}$

を $\pi_{u_{n-1}}$ および $\pi_{\mathcal{L}_{n+1}}$ で表す。

手順 1 について。 \mathcal{L}_0 上のセンサー過程の推移について、部分状態 \mathcal{L}_0 から離脱したのち、 u_0 から再び \mathcal{L}_0 に戻る際には、窓口の状態は確率分布 β^\top に従い再生する（休暇時間が相型分布に従うため）。よって、 \mathcal{L}_0 上のセンサー過程の推移速度行列は、

$$Q_{\mathcal{L}_0\mathcal{L}_0} + Q_{\mathcal{L}_0\mathcal{L}_1}\mathbf{1}\beta^\top \quad (7)$$

で与えられる。よって、部分ベクトル $\pi_{\mathcal{L}_0}$ の定数倍は、連立方程式

$$\pi_{\mathcal{L}_0}^\top (Q_{\mathcal{L}_0\mathcal{L}_0} + Q_{\mathcal{L}_0\mathcal{L}_1}\mathbf{1}\beta^\top) = \mathbf{0}^\top, \quad \pi_{\mathcal{L}_0}^\top \mathbf{1} = 1 \quad (8)$$

の解として計算される。

補題 2.1 部分ベクトル $\pi_{\mathcal{L}_0}$ の定数倍は連立方程式 (8) の解として計算される。

手順 2 について、部分状態 \mathcal{L}_n への直接的な推移は \mathcal{L}_{n-1} からの推移に限られるため（図 1 参照）、マルコフ連鎖の初等的性質により部分ベクトル $\pi_{\mathcal{L}_n}$ は以下の通り帰納的に計算される：

$$\pi_{\mathcal{L}_n}^\top = \pi_{\mathcal{L}_{n-1}}^\top Q_{\mathcal{L}_{n-1}\mathcal{L}_n} (-Q_{\mathcal{L}_n\mathcal{L}_n})^{-1}, \quad n \geq 1. \quad (9)$$

補題 2.2 部分ベクトル $\pi_{\mathcal{L}_n}$ ($n \geq 1$) の定数倍は式 (9) で計算される。

手順 3 について。部分状態 $\{\cup_{k=0}^n (\mathcal{L}_k \cup u_k)\} \cup \mathcal{L}_{n+1}$ 上のセンサー過程において、部分状態 u_n への推移（推移の元は u_n , \mathcal{L}_{n+1} および u_{n-1} の 3 つである）に注目する。このセンサー過程の推移速度行列について、 u_n から u_n への直接的な推移速度部分行列は、

$$Q_{u_n u_n} + Q_{u_n u_{n+1}} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1}\alpha_n^\top \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}\alpha_n^\top \end{pmatrix} \quad (10)$$

であり、 \mathcal{L}_{n+1} から u_n への直接的な推移速度部分行列は、

$$Q_{\mathcal{L}_{n+1}u_n} + Q_{\mathcal{L}_{n+1}\mathcal{L}_{n+2}} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1}\alpha_n^\top \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}\alpha_n^\top \end{pmatrix} \quad (11)$$

であり、 u_{n-1} から u_n への直接的な推移速度部分行列は $Q_{u_{n-1}u_n}$ である。よって、マルコフ連鎖の初等的性質により、部分ベクトル π_{u_n} は以下の通り帰納的に計算される：

$$\pi_{u_n}^\top = \left\{ \pi_{u_{n-1}}^\top Q_{u_{n-1}u_n} + \pi_{\mathcal{L}_{n+1}}^\top (\text{Eq.11}) \right\} \{-(\text{Eq.10})\}^{-1}, \quad n \geq 0, \quad (12)$$

ここで、 $\pi_{u_{-1}} := \mathbf{0}$ とする。

補題 2.3 部分ベクトル π_{u_n} ($n \geq 0$) の定数倍は式 (12) で計算される。

これらの補題と正規化条件により、定常分布は次の通り計算される。

定理 2.1 複数休暇を伴う $M_n/PH_n/1$ 待ち行列の定常分布 $\pi^\top = (\pi_{\mathcal{L}_n}^\top, \pi_{u_n}^\top; n \geq 0)$ は、補題 2.1–2.3 から計算した各部分ベクトルを、 $\sum_{n=0}^{\infty} (\pi_{\mathcal{L}_n} \mathbf{1} + \pi_{u_n} \mathbf{1})$ で除算（正規化）することで数値計算される。

3 サービス時間分布が同一 ($PH_n = PH$) である場合

これ以降、サービス時間が独立かつ同一な表現 (α, \mathbf{T}) （ここで、 \mathcal{X} を有限集合とし、 α は \mathcal{X} 上の確率分布、 \mathbf{T} は一時的な連続時間型マルコフ連鎖のサイズ $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ の推移速度行列）の相型分布として前節の結果を、複数休暇を伴う $M_n/PH/1$ 待ち行列に適用する。サービス時間分布の単純化により、サービス開始時の待ち客数に関する情報の保持が不要となり、モデルの推移構造（推移速度行列）は以下の通り単純化される。ここでは、2.2 節と比較して、形状が変わる推移速度部分行列のみを示す： $\mathbf{t} := -\mathbf{T}\mathbf{1}$ とし、

$$Q_{\mathcal{L}_n u_{n-1}} = \mathbf{u}\alpha^\top \quad (n \geq 1), \quad Q_{u_n u_n} = \mathbf{T} - \lambda p_{n,1} \mathbf{I} \quad (n \geq 0), \quad (13)$$

$$Q_{u_n u_{n+1}} = \lambda p_{n,1} \mathbf{I} \quad (n \geq 0), \quad Q_{u_n u_{n-1}} = \mathbf{t}\alpha^\top \quad (n \geq 1), \quad Q_{u_0 \mathcal{L}_0} = \mathbf{t}\beta^\top. \quad (14)$$

3.1 定常分布

この待ち行列（複数休暇を伴う $M_n/PH/1$ 待ち行列）の定常分布について、それらを構成する部分ベクトルの定数倍の計算手順を以下に述べる。このために、

$$\mathbf{F}(p) := \mathbf{T} - \lambda p \mathbf{I} + \lambda p \mathbf{1}\alpha^\top, \quad (15)$$

$$\mathbf{G}(p) := \mathbf{u}\alpha^\top + \lambda p \mathbf{1}\alpha^\top, \quad (16)$$

$$\mathbf{H}(p) := \mathbf{U} - \lambda p \mathbf{I} \quad (17)$$

とおく。

補題 3.1 複数休暇を伴う $M_n/PH/1$ 待ち行列の定常分布について、それを構成する部分ベクトル $\pi_{\mathcal{L}_0}$ の定数倍は、連立方程式

$$\pi_{\mathcal{L}_0}^\top (\mathbf{U} + \mathbf{u}\beta^\top - \lambda p_{0,0} \mathbf{I} + \lambda p_{0,0} \mathbf{1}\beta^\top) = \mathbf{0}^\top, \quad \pi_{\mathcal{L}_0}^\top \mathbf{1} = 1 \quad (18)$$

の解である。さらに、部分ベクトル $\pi_{\mathcal{L}_n}$ ($n \geq 1$) および $\pi_{\mathcal{U}_n}$ ($n \geq 0$) の定数倍は、それぞれ、

$$\pi_{\mathcal{L}_n}^\top = \pi_{\mathcal{L}_0}^\top \prod_{i=0}^{n-1} \lambda p_{i,0} (-\mathbf{H}(p_{i+1,0}))^{-1}, \quad n \geq 1, \quad (19)$$

$$\pi_{\mathcal{U}_n}^\top = \sum_{i=0}^n \pi_{\mathcal{L}_{i+1}}^\top \mathbf{G}(p_{i+1,0}) \left\{ \prod_{j=i}^{n-1} \lambda p_{j,1} (-\mathbf{F}(p_{j,1}))^{-1} \right\} (-\mathbf{F}(p_{n,1}))^{-1}, \quad n \geq 0 \quad (20)$$

で計算される。

証明. 式 (18) は補題 2.1 から直ちに得る。式 (19) について、補題 2.2 (式 (9)) から、部分ベクトル $\pi_{\mathcal{L}_n}$ の定数倍は、以下の通り帰納的に計算される：

$$\pi_{\mathcal{L}_n}^\top = \pi_{\mathcal{L}_{n-1}}^\top \lambda p_{n-1,0} \{-\mathbf{H}(p_{n,0})\}^{-1}, \quad n \geq 1. \quad (21)$$

式 (21) を繰り返し適用すれば、式 (19) を得る。式 (20) について、補題 2.3 (式 (12)) から、部分ベクトル $\pi_{\mathcal{U}_n}$ の定数倍は、以下の通り帰納的に計算される：

$$\pi_{\mathcal{U}_n}^\top = \left\{ \lambda p_{n-1,1} \pi_{\mathcal{U}_{n-1}}^\top + \pi_{\mathcal{L}_{n+1}}^\top \mathbf{G}(p_{n+1,0}) \right\} \{-\mathbf{F}(p_{n,1})\}^{-1}, \quad n \geq 0. \quad (22)$$

式 (22) を繰り返し適用すれば、式 (20) を得る。□

3.2 到着客が観測する条件付き窓口状態分布

ここでは、到着客が観測する 2 状態 (待ち客数 n , サービス中の客数 k) を与えた下で、窓口状態 (休暇状態もしくはサービス状態) の条件付き確率分布を求める。この条件付き確率分布は、到着客が待ちに加入した後の、期待系内滞在時間を見積もる上で必要となる。以下では、1 サービス時間あたりの期待値を $\mu^{-1} = \boldsymbol{\alpha}^\top (-\mathbf{T})^{-1} \mathbf{1}$, 到着客が (待ち客数, サービス中の客数) = (n, k) を観測して待ちに加入したときの条件付き期待系内滞在時間を $w_{n,k}$ で表記するものとする。

定理 3.1 到着時に (待ち客数, サービス中の客数) = (n, k) を観測して待ちに加入した到着客にとって、窓口状態 (休暇状態もしくはサービス状態) の条件付き確率分布は、 $k = 0$ のときは $\pi_{\mathcal{L}_n}^\top / \pi_{\mathcal{L}_n}^\top \mathbf{1}$, $k = 1$ のときは $\pi_{\mathcal{U}_n}^\top / \pi_{\mathcal{U}_n}^\top \mathbf{1}$ で与えられる。そして、条件付き期待

系内滞在時間 $w_{n,k}$ は以下の通り与えられる：

$$w_{n,0} = \frac{\boldsymbol{\pi}_{\mathcal{L}_n}^\top}{\boldsymbol{\pi}_{\mathcal{L}_n}^\top \mathbf{1}} (-\mathbf{U})^{-1} \mathbf{1} + (n+1)\mu^{-1}, \quad (23)$$

$$w_{n,1} = \frac{\boldsymbol{\pi}_{\mathcal{U}_n}^\top}{\boldsymbol{\pi}_{\mathcal{U}_n}^\top \mathbf{1}} (-\mathbf{T})^{-1} \mathbf{1} + (n+1)\mu^{-1}. \quad (24)$$

これらの条件付き期待系内滞在時間がどの加入確率に依存するかについては、 $w_{n,0}$ は加入確率 $\{p_{i,0}; 0 \leq i \leq n\}$ にのみ依存し、一方、 $w_{n,1}$ は加入確率 $\{p_{i,0}; 0 \leq i \leq n+1, p_{j,1}; 0 \leq j \leq n\}$ にのみ依存する。

証明. PASTA (Poisson Arrivals See Time Average, 文献 [8]) から、到着時に状態 (n, k) を観測して待ちに加入した到着客にとって、窓口状態の条件付き確率分布は、 $k=0$ のときは $\boldsymbol{\pi}_{\mathcal{L}_n}^\top / \boldsymbol{\pi}_{\mathcal{L}_n}^\top \mathbf{1}$ 、 $k=1$ のときは $\boldsymbol{\pi}_{\mathcal{U}_n}^\top / \boldsymbol{\pi}_{\mathcal{U}_n}^\top \mathbf{1}$ で与えられる。

到着客が状態 $(n, 0)$ を観測後、待ちに加入したときの期待系内滞在時間 $w_{n,0}$ は以下3要素の和からなる。1つ目は、この到着客にとって、窓口状態の条件付き確率分布は $\boldsymbol{\pi}_{\mathcal{L}_n}^\top / \boldsymbol{\pi}_{\mathcal{L}_n}^\top \mathbf{1}$ で与えられること、さらに、1休暇時間は表現 $(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{U})$ の相型分布に従うことに注意する。よって、到着時点での残り休暇時間は表現 $(\boldsymbol{\pi}_{\mathcal{L}_n}^\top / \boldsymbol{\pi}_{\mathcal{L}_n}^\top \mathbf{1}, \mathbf{U})$ の相型分布に従うことになり、その期待値は、

$$\frac{\boldsymbol{\pi}_{\mathcal{L}_n}^\top}{\boldsymbol{\pi}_{\mathcal{L}_n}^\top \mathbf{1}} (-\mathbf{U})^{-1} \mathbf{1} \quad (25)$$

で与えられる。2つ目は、この到着客にとって、前方に並ぶ待ち客の総サービス時間の期待値は $n\mu^{-1}$ で与えられる。3つ目は、この到着客自身の窓口での期待サービス時間は μ^{-1} である。以上のことから式 (23) を得る。式 (24) の導出も同様である。

条件付き期待系内滞在時間と加入確率との依存関係について、式 (23) における条件付き確率分布 $\frac{\boldsymbol{\pi}_{\mathcal{L}_n}^\top}{\boldsymbol{\pi}_{\mathcal{L}_n}^\top \mathbf{1}}$ は、式 (18) および (19) から、加入確率 $\{p_{i,0}; 0 \leq i \leq n\}$ にのみ依存する。一方、式 (24) における条件付き確率分布 $\frac{\boldsymbol{\pi}_{\mathcal{U}_n}^\top}{\boldsymbol{\pi}_{\mathcal{U}_n}^\top \mathbf{1}}$ は、式 (18)–(20) から、加入確率 $\{p_{i,0}; 0 \leq i \leq n+1, p_{j,1}; 0 \leq j \leq n\}$ にのみ依存する。よって、定理の最後の主張を得る。□

3.3 ナッシュ均衡における到着客の加入確率

ここでは、客がサービス完了による利得と系内滞在時間の差により定義される効用について、その最大化を目指して戦略的に振舞う（加入確率を決める）場合を考え、ナッシュ均衡における到着客の加入確率の計算手順について述べる。

このために、客が待ちに加入してサービス完了したときの利得を $R > 0$ で表す。到着客が状態 (n, k) を観測した下での条件付き期待系内滞在時間は式 (23) および (24) で計算されるため、この客が待ちに加入したときの期待効用は、

$$R - w_{n,k} \quad (26)$$

で与えられる（待ちに加入しなかった場合の効用は 0 とする）。また、全客が戦略 \mathbf{p} を採用しているとき、ある到着客が状態 (n, k) を観測して加入した場合の期待系内滞在時間を $w_{n,k} |_{\text{戦略 } \mathbf{p}}$ のように戦略 \mathbf{p} を明記する。

定義 3.1 到着客の加入に関する戦略 $\mathbf{p}^* = (p_{n,k}^*; n \geq 0, k \in \{0, 1\})$ がナッシュ均衡であるとは、

$$p_{n,k}^* \in \operatorname{argmax}_{p \in [0,1]} p \{R - w_{n,k} |_{\text{戦略 } \mathbf{p}^*}\} \quad (27)$$

を満たすときのことを指す。ここで、式 (27) における $p \{R - w_{n,k} |_{\text{戦略 } \mathbf{p}^*}\}$ は、ある到着客が状態 (n, k) を観測して加入確率 p を選択した場合の期待効用を表す。

定理 3.1 の最後の主張（条件付き期待系内滞在時間と加入確率の依存関係）から、ナッシュ均衡における加入確率は以下の手順で計算される。

補題 3.2 加入確率 \mathbf{p}^* の計算手順は、まず、窓口が休暇中のとき、式 (27) を満たすように $\{p_{n,0}^*; 0 \leq n < \infty\}$ が昇順で求まる。ここで、期待系内滞在時間が利得 R を超えるある観測待ち客数については、それ以降の加入確率は 0 となる。次に、窓口がサービス中であるとき、加入確率 $p_{n,1}$ は、 $\{p_{i,0}; 0 \leq i \leq n+1\}$ および $\{p_{i,1}; 0 \leq i \leq n-1\}$ が定まった後、式 (27) を満たすように求まる。

4 まとめ

本稿では、休暇を伴う $M_n/PH_n/1$ 待ち行列について、状態依存型の準出生死滅過程で表現することで、マルコフ連鎖の初等的性質を用いた解析を行った。その結果を、サービス時間分布が同一な場合に適用し (3 節参照)、休暇を伴う $M_n/PH/1$ 待ち行列において、到着客の条件付き期待系内滞在時間と加入確率の依存関係を明らかにし、戦略的な客のナッシュ均衡における加入確率の計算手順について示した。なお、2 節の解析方法は、他の代表的な休暇もしくは類似規則（単一休暇、セットアップ時間、N-政策、閾値付きの複数休暇）にも適用が可能であることを注意する。

参考文献

- [1] Abouee-Mehrizi, H., & Baron, O. (2015). State-dependent $M/G/1$ queueing systems. *Queueing Systems: Theory and Applications*, 82, 121–148.
- [2] Brill, P.H., & Posner, M.J.M. (1977). Level crossing in point processes applied to queues: single server case. *Operations Research*, 25, 662–674.
- [3] Kerner, Y. (2008). The conditional distribution of the residual service time in the $M_n/G/1$ queue. *Stochastic Models*, 24, 364–375.
- [4] Latouche, G. , & Ramaswami, V. (1999). *Introduction to matrix analytic methods in stochastic modeling*. SIAM.
- [5] Oz, B., Adan, I., & Haviv, M. (2017). A rate balance principle and its application to queueing models. *Queueing Systems: Theory and Applications*, 87, 95–111.
- [6] Oz, B., Adan, I., & Haviv, M. (2019). The $M_n/G_n/1$ queue with vacations and exhaustive service. *European Journal of Operational Research*, 277, 945–952.
- [7] Takagi, H. (1991). *Queueing analysis: a foundation of performance evaluation, vol. 1 : vacation and priority systems*. North-Holland.
- [8] Wolff, R.W. (1982). Poisson arrivals see time averages. *Operations Research*, 30, 223-231.