

双行列ゲームの戦略空間上の写像の性質

兵庫県立大学 菊田健作 *

Kensaku Kikuta

University of Hyogo

1 はじめに

プレイヤーの利得が双行列で表されるとき、プレイヤー間の協力を想定するならば、(1) 固定された交渉の基準点に関する Nash 交渉解、(2) Shapley の NTU 値および (3) 交渉の基準点を 1 人提携の値とした TU 標準解、の 3 つの解が考えられる。双行列が 2×2 型のときは 3 つの解が利得空間内の単一の双曲線上に位置することがある。この双曲線は Nash 交渉解や Shapley の NTU 値の考え方を反映している。それでは、 2×2 型の双行列で表現される非協力ゲーム（以後、 2×2 ゲームと呼ぶ）の (Nash) 均衡利得ベクトル同士の間には幾何学的な関係はあるのだろうか。一般に、戦略ベクトルが戦略空間内の線分上を動くとき、対応する利得ベクトルは放物線上を動く。均衡点が複数個あり、線分の両端点が均衡点であれば対応する利得ベクトルは利得ベクトル空間内の放物線にある。しかも、その線分がある性質を満たせば、利得ベクトル空間内の放物線は何がしかの意味を持つかもしれない。

さて、非協力ゲームの均衡点に対しては、ブラウアーの不動点定理を用いた存在証明が与えられている ([10])。そこでは、不動点を定義するために、戦略空間上の写像が与えられている。以後、この写像を T で表すことにする[†]。 2×2 ゲームの写像 T の解析の状況

* E-mail address: kenkikuta@gmail.com

[†] 文献 [1] では Nash map, [14] では Nash 写像と呼ばれている。

が文献 [3] にまとめられている． 2×2 ゲームが coordination game や anticoordination game ([12]) の場合には均衡点が 3 個あり，写像 T の性質が文献 [2] に詳しく報告されている．また， 2×2 ゲームが cyclic game ([12]) の場合には文献 [1] において写像 T が解析されている．

本稿では， 2×2 ゲームにおいて，均衡点同士を結ぶ線分上の点の写像 T による像に焦点を当てる．一般に，戦略空間内の任意の点を始点として写像 T を繰り返し適用したときの点列の挙動を解析することは，戦略空間の全ての点の写像 T の像を調べることと同じことであることに留意しつつ，第 2 節において，coordination game や anticoordination game の場合に，写像 T を繰り返し適用して得られる点列が直線上にあるような 2×2 ゲームの類を与える．第 3 節において，写像 T を繰り返し適用して得られる点列が均衡点同士を結ぶ直線上にあるような 2×3 ゲームや 3×3 ゲームの数値例を検討する．本稿の議論は進化ゲーム（レプリケーター動学）と密接に関連しているように思われる．興味のある読者は文献 [12] や [15], [5] を参照されたい．

2 2×2 ゲーム

本節では 2×2 ゲーム（各プレイヤーがそれぞれ 2 個の戦略を有する 2 人非協力ゲーム）を扱う．行列 $G = (g_{ij})$ が 2×2 型であるとき， $\sigma(G) \equiv g_{11} + g_{22} - g_{12} - g_{21}$ とおく．2 人のプレイヤー 1, 2 がいる．プレイヤー $i = 1, 2$ の（純）戦略集合は $S_i = \{1, 2\}$, $i = 1, 2$ である．戦略 1, 2 を確率 p , $0 \leq p \leq 1$, と $1 - p$ でとるようなプレイヤー 1 の混合戦略を p で表す．戦略 1, 2 を確率 q , $0 \leq q \leq 1$, と $1 - q$ でとるようなプレイヤー 2 の混合戦略を q で表す．戦略の組 (p, q) の集合を S と表すことにする． $S = [0, 1] \times [0, 1]$ である．プレイヤー 1, 2 がそれぞれ戦略 i, j をとったときのプレイヤー 1, 2 の利得をそれぞれ a_{ij}, b_{ij} と表す．第 (i, j) 成分がそれぞれ a_{ij}, b_{ij} であるような行列をそれぞれ A, B とする． $[A, B] = \begin{bmatrix} a_{11}, b_{11} & a_{12}, b_{12} \\ a_{21}, b_{21} & a_{22}, b_{22} \end{bmatrix}$ と書き， 2×2 （双行列）ゲームと呼ぶ． 2×2 ゲーム $[A, B]$ において，戦略の組 $(p, q) \in S$ がとられたとき，プレイヤー 1, 2 の期待利得 $x(p, q), y(p, q)$

はそれぞれ

$$\begin{aligned} x(p, q) &\equiv [p, 1-p]A[q, 1-q]^\top = \sigma(A)pq + (a_{12} - a_{22})p + (a_{21} - a_{22})q + a_{22}, \\ y(p, q) &\equiv [p, 1-p]B[q, 1-q]^\top = \sigma(B)pq + (b_{12} - b_{22})p + (b_{21} - b_{22})q + b_{22}. \end{aligned}$$

定義 2.1 戦略の組 $(p, q) \in S$ は次の性質を満たすとき均衡点であるという.

$$\begin{aligned} x(p, q) &\geq x(p', q), \forall p' \in [0, 1], \\ y(p, q) &\geq y(p, q'), \forall q' \in [0, 1]. \end{aligned}$$

文献 [10] ではブラウアーの不動点定理を応用して均衡点の存在が証明されている. そのために戦略集合 S 上の写像 $T: (p, q) \rightarrow (s, t)$ が定義されている.

$$\begin{aligned} c_i^1 &\equiv c_i^1(p, q) \equiv \max\{x(2-i, q) - x(p, q), 0\}, i = 1, 2, \\ c_i^2 &\equiv c_i^2(p, q) \equiv \max\{y(p, 2-i) - y(p, q), 0\}, i = 1, 2, \\ s &\equiv s(p, q) \equiv \frac{p + c_1^1}{1 + c_1^1 + c_2^1}, \quad t \equiv t(p, q) \equiv \frac{q + c_1^2}{1 + c_1^2 + c_2^2}. \end{aligned} \tag{1}$$

写像 T の不動点が均衡点である. それでは S 内の任意の点 (p_0, q_0) に対して写像 T を繰り返して適用するとどのような点列が得られるのだろうか. 生成される点列を $\{(p_k, q_k), k = 0, 1, 2, \dots\}$ とすると, $p_{k+1} = s(p_k, q_k), q_{k+1} = t(p_k, q_k)$ である. ただし, 点 (p_0, q_0) が均衡点であれば, $s(p_0, q_0) = p_0, t(p_0, q_0) = q_0$ であるから, すべての $k = 1, 2, \dots$ に対し $p_k = p_0, q_k = q_0$ となり, 複数個の点からなる点列は得られない. 以後, 点 (p_0, q_0) は均衡点でないとする.

さて, 次の性質 (2) を満たす 2×2 ゲーム $[A, B]$ を以後 coordination ゲームということにする (文献 [12]).

$$a_{11} > a_{21}, a_{22} > a_{12}, b_{11} > b_{12}, b_{22} > b_{21}. \tag{2}$$

補題 2.2 は coordination ゲームの均衡点の様子を述べている.

補題 2.2 coordination ゲーム $[A, B]$ においては 2 個の (純戦略) 均衡点 $P_1 \equiv (0, 0), P_2 \equiv (1, 1)$ と 1 個の (完全混合) 均衡点 $Q \equiv (p^*, q^*)$ が存在する. ここに,

$$p^* = \frac{b_{22} - b_{21}}{\sigma(B)}, q^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{\sigma(A)}. \tag{3}$$

容易に得られる次の補題は均衡点 Q と P_1 との繋がり (connection) を述べている*.

補題 2.3 coordination ゲーム $[A, B]$ について, 補題 2.2 に示された均衡点 Q に対して始点 $(p_0, q_0) \in S$ が $0 < p_0 < p^*$ および $0 < q_0 < q^*$ を満たすとする. 写像 T によって生成される点列 $\{(p_k, q_k), k = 0, 1, 2, \dots\}$ は次の性質を満たす.

- (i) $p^* > p_0 > p_1 > \dots > p_k > p_{k+1} > \dots$,
- (ii) $q^* > q_0 > q_1 > \dots > q_k > q_{k+1} > \dots$,
- (iii) $\lim_{k \rightarrow \infty} p_k = 0, \lim_{k \rightarrow \infty} q_k = 0$.

同様にして, 均衡点 Q と P_2 との繋がりを述べることができる.

補題 2.4 coordination ゲーム $[A, B]$ について, 補題 2.2 に示された均衡点 Q に対して始点 $(p_0, q_0) \in S$ が $0 < 1 - p_0 < 1 - p^*$ および $0 < 1 - q_0 < 1 - q^*$ を満たすとする. 写像 T によって生成される点列 $\{(p_k, q_k), k = 0, 1, 2, \dots\}$ は次の性質を満たす.

- (i) $p^* < p_0 < p_1 < \dots < p_k < p_{k+1} < \dots$,
- (ii) $q^* < q_0 < q_1 < \dots < q_k < q_{k+1} < \dots$,
- (iii) $\lim_{k \rightarrow \infty} p_k = 1, \lim_{k \rightarrow \infty} q_k = 1$.

補題 2.3 と 2.4 とから,

命題 2.5 coordination ゲーム $[A, B]$ について,

- (i) 条件 $0 < p_0 < p^*$ と $0 < q_0 < q^*$ を満たす任意の点 $(p_0, q_0) \in S$ を始点とし写像 T によって生成される点列は P_1 に収束する.
- (ii) 条件 $p^* < p_0 < 1$ と $q^* < q_0 < 1$ を満たす任意の点 $(p_0, q_0) \in S$ を始点とし写像 T によって生成される点列は P_2 に収束する.

命題 2.5 から次のことがわかる. つまり, coordination ゲーム $[A, B]$ について, 均衡点 Q に十分近い点を始点とする (写像 T により生成される) 点列で, 均衡点 P_1 あるいは P_2 に収束するものがある. このことから, 均衡点 Q と P_i とを結ぶ曲線 C で写像 T の

* coordination game に関する詳細な議論は文献 [2] を参照. ただし, [2] では対象とする 2×2 ゲームが定理 2.7(iii) を満たしていることに注意.

下で不変, つまり, $(p, q) \in C$ ならば $(s, t) \in C$, であるようなものの存在が予想される. そこで次の定義をおく.

定義 2.6 2×2 ゲーム $[A, B]$ において 3 個の均衡点 (2 個の純戦略均衡点 P_1, P_2 , 1 個の完全混合均衡点 Q) が存在するとする. 戦略空間内の点 P_i と Q を結ぶ曲線 C で次の性質を満たすものの全体の集合を $\mathcal{C}(P_i, Q)$ と定義する.

1. $(p, q) \in C$ ならば $(s(p, q), t(p, q)) \in C$ である (写像 T の下で不変である).
2. $P_i \in C, Q \in C$ である.
3. C 上で、写像 T は 1 対 1 かつ上への写像である.

定理 2.7 coordination ゲーム $[A, B]$ について, 2 個の純戦略均衡点を P_1, P_2 , 1 個の完全混合均衡点を Q とする. 次の (i), (ii), (iii) はそれぞれ同値である.

- (i) 集合 $\mathcal{C}(P_1, Q)$ は点 Q と P_1 を結ぶ線分を含む.
- (ii) 集合 $\mathcal{C}(P_2, Q)$ は点 Q と P_2 を結ぶ線分を含む.
- (iii) $\sigma(A) = \sigma(B)$.

2×2 ゲーム $[A, B]$ が $A = B$ (games with identical intersets, 文献 [9]) であるならば定理 2.7 の (iii) を満たす. また, 文献 [2] で扱われている 2×2 ゲームは定理 2.7(iii) を満たしている.

例 2.8 coordination ゲーム

$$[A, B] = \begin{bmatrix} 4, 2 & 1, 1 \\ 1, 1 & 2, 3 \end{bmatrix}$$

を考える. 2 個の純戦略均衡点は $P_1 = (1, 1), P_2 = (0, 0)$, 1 個の完全混合均衡点は $Q = (1/4, 2/3)$ である. $\sigma(A) = 4 \neq 3 = \sigma(B)$ であるから, 定理 2.7 の (i) も (ii) も成立しない. 戦略空間におけるシミュレーションの結果 (図 1) は P_i と Q を結ぶ曲線 $C \in \mathcal{C}(P_i, Q)$ (定義 2.6) の存在を示唆している. ただし, 戦略空間内の $\alpha q(2 - 3p) = \beta p(1 - 4q)$, (α, β は定数) の形の曲線 $C \in \mathcal{C}(P_1, Q)$ あるいは $C \in \mathcal{C}(P_2, Q)$ で図 1 に出現している曲線らしいものを表すようなものは存在しないことが解析の結果か

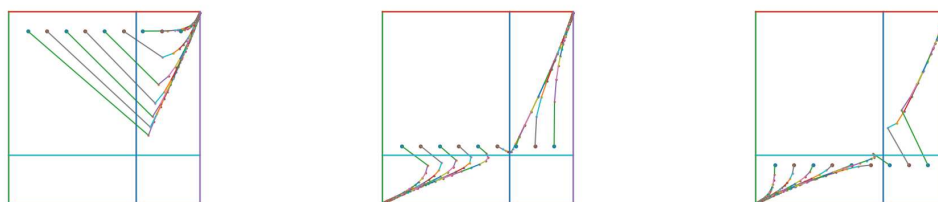


図 1 各始点からそれぞれ 300 個弱の移動

らわかる．曲線の式の追求は今後の検討課題である（文献 [2] 参照）．

注意 2.9 次の例は均衡点が 1 個（完全混合均衡点）のみの場合（Cyclic game [12]）に写像 T により生成される点列を考えている．文献 [1] で与えられている詳細な分析は図 2 を見るときに参考になるであろう．

例 2.10 2×2 ゲーム

$$[A, B] = \begin{bmatrix} 0, 1 & 1, 0 \\ 1, 0 & 0, 1 \end{bmatrix}$$

の均衡点は 1 個 $(1/2, 1/2)$ である．均衡点に近い所，遠い所のそれぞれを始点として，写像 T により生成される点列を描くと図 2（中と右）が得られる．これは定和ゲームである

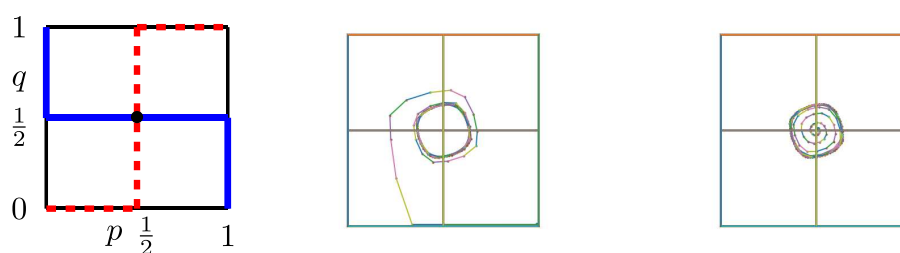


図 2 最適反応曲線（左）と始点が円状図の内側（右）と外側（中）

が非定和ゲームでも状況は変わらない．つまり，均衡点が 1 個（完全混合均衡点）のみとすることを満たしつつ利得行列を変えてみると，図 2 と比べて歪みが大きい円状図が得られ（数値例は略する），写像 T により生成される点列は均衡点に収束しない．

3 双行列ゲーム

本節では、 2×3 型や 3×3 型の双行列で表される非協力ゲーム（ 2×3 ゲームと 3×3 ゲーム）の数値例を与えることにより第 2 節の定理 2.7 を $m \times n$ ゲーム（ $m, n \geq 2$ ）に拡張する研究の端緒としたい．なお，双行列ゲームの定義は略する．

例 3.1 2×3 ゲーム

$$[A, B] = \begin{bmatrix} 1, 1 & 5, 5 & 3, 3 \\ 6, 6 & 2, 2 & 4, 4 \end{bmatrix}$$

の均衡点は表 1 の通りである．プレイヤー 1, 2 の混合戦略はそれぞれ 2 次元, 3 次元の確率ベクトルで表される． L は点 $L_1 \equiv ([1/2, 1/2], [0, 1/4, 3/4])$ と点 $L_2 \equiv ([1/2, 1/2], [3/8, 5/8, 0])$ を結ぶ線分である．点 P_1, P_2 および線分 L の端点 L_1, L_2 は,

表 1 均衡点と均衡利得

均衡点	均衡点の座標	均衡利得
P_1	$[1, 0], [0, 1, 0]$	$(5, 5)$
P_2	$[0, 1], [1, 0, 0]$	$(6, 6)$
L	$[1/2, 1/2], [q, q + 1/4, 3/4 - 2q], 0 \leq q \leq 3/8$	$(7/2, 7/2)$

それぞれ相関均衡全体の集合の端点である ([11])．図 3 では，プレイヤー 1, 2 の混合戦略をそれぞれ $[p, 1 - p], [q_1, q_2, 1 - q_1 - q_2]$ として，戦略空間を (p, q_1, q_2) で表している．戦略空間における写像 T によって生成される点列の動きを概観するために，均衡点 P_1, P_2, L と，4 個の始点からの点列をそれぞれ示している．それぞれの点列が P_1 または P_2 に近づいている．なお，図 3 内の三角形 $P_1 L_1 L_2$ は写像 T の下で不変である．

例 3.2 3×3 ゲーム

$$[A, B] = \begin{bmatrix} 1, 1 & 0, 0 & c, c + \alpha \\ 0, 0 & 1, 1 & c, c + \alpha \\ b + \alpha, b & b + \alpha, b & 1, 1 \end{bmatrix}$$

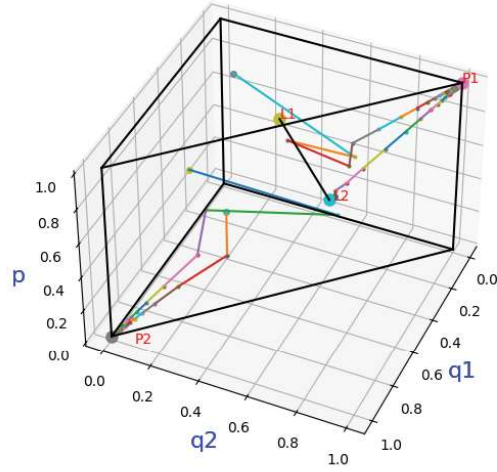


図3 均衡点と4個の点列

の7個の均衡点が表2に示されている。ただし,

$$X \equiv 3 - 2c - 2b - 2\alpha, Y \equiv 2 - c - b - \alpha, b + \alpha < \frac{1}{2}, c + \alpha < \frac{1}{2}, b < 1, c < 1 \quad (4)$$

とする。図4はプレイヤー1の戦略空間である。均衡点を戦略空間内で直線で結ぶと、プレイヤー1の戦略の部分は図4のようになる。プレイヤー2でも同様である。 $b = c$ であれば、均衡点同士を結ぶ各線分は写像 T の下で不変である。

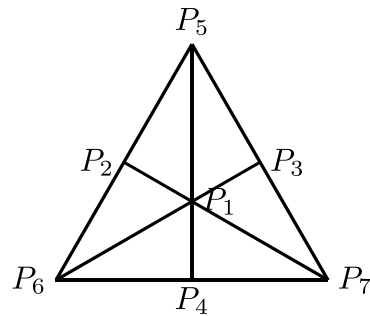


図4 均衡点間の繋がり

表 2 均衡点と均衡利得

均衡点	均衡点の座標	利得
P_1	$[\frac{1-b}{X}, \frac{1-b}{X}, \frac{1-2c-2\alpha}{X}], [\frac{1-c}{X}, \frac{1-c}{X}, \frac{1-2b-2\alpha}{X}]$	略
P_2	$[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0], [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0]$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
P_3	$[\frac{1-b}{Y}, 0, \frac{1-c-\alpha}{Y}], [\frac{1-c}{Y}, 0, \frac{1-b-\alpha}{Y}]$	略
P_4	$[0, \frac{1-b}{Y}, \frac{1-c-\alpha}{Y}], [0, \frac{1-c}{Y}, \frac{1-b-\alpha}{Y}]$	略
P_5	$[1, 0, 0], [1, 0, 0]$	$(1, 1)$
P_6	$[0, 1, 0], [0, 1, 0]$	$(1, 1)$
P_7	$[0, 0, 1], [0, 0, 1]$	$(1, 1)$

4 おわりに

今後の検討課題として,

1. 定理 2.7 を $m \times n$ ゲーム ($m, n \geq 2$) に拡張すること,
2. 写像 T によって生成される点列のかわりに, 仮想プレイによって生成される点列を考えたときに定理 2.7 の類似を与えること,

の 2 点が挙げられる. 文献 [4],[6],[7] は最近興味を持ったものである. 例 4.1 は, 写像 T によって生成される点列と仮想プレイによって生成される点列を比較している. 文献 [8] に紹介されている例に関しては, 写像 T により生成される点列は均衡点に収束する.

例 4.1

$$[A, B] = \begin{bmatrix} 1, 0 & 0, 0 & 0, 1 \\ 0, 1 & 1, 0 & 0, 0 \\ 0, 0 & 0, 1 & 1, 0 \end{bmatrix}$$

仮想プレイによって均衡点に収束しない例として文献 [13] で紹介されている. 図 5 において, 外枠の三角形はプレイヤー 1 の戦略空間, 内側の小三角形 (破線状) は写像 T のシ

ミュレーションによるもの，小三角形内の6個の丸点は仮想プレイによるもの ([13])，+マークは均衡点，外枠の三角形と小三角形の間の点列は x マークを始点として写像 T によって生成された点列の初期のものである．写像 T によっても収束しないことが推測される．

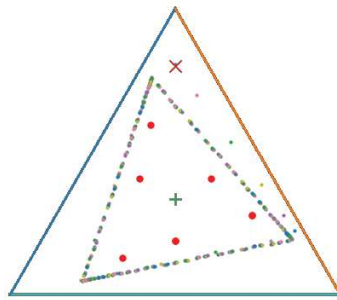


図 5 仮想プレイで収束しない例

参考文献

- [1] R.A. Becker, S.K. Chakrabarti, W. Geller, B. Kitchens and M. Misiurewicz, Dynamics of the Nash map in the game of matching pennies. *Journal of Differential Equations and Applications* 13(2007), 223-235.
- [2] R.A. Becker, S.K. Chakrabarti, W. Geller, B. Kitchens and M. Misiurewicz, Hyperbolic dynamics in Nash maps. In *Discrete Dynamics and Difference Equations* Proceedings of the ICDEA 2007, Edited by: S. N. Elaydi, H. Oliveira, J. M. Ferreira, and J. F. Alves. (2010) World Scientific.
- [3] R.A. Becker, S.K. Chakrabarti, W. Geller, B. Kitchens and M. Misiurewicz, The Dynamics of the Nash Map for 2 By 2 Games. In: M. Peixoto, A. Pinto, D. Rand (eds) *Dynamics, Games and Science II*. Springer Proceedings in Mathematics, vol 2. Springer, Berlin, Heidelberg. (2011)

- [4] E.Braggion, N. Gatti, R. Lucchetti, T. Sandholm and B.Stengel, Strong Nash equilibria and mixed strategies, *International Journal of Game Theory* 49(2020), 699-710.
- [5] J.Hofbauer and K. Sigmund, *Evolutionary games and population dynamics*, Cambridge university press. (1998) (竹内・佐藤・宮崎訳「進化ゲームと微分方程式」現代数学社, 2001 年)
- [6] M. Kitti and H. Salonen, A Note on Nash Equilibrium and Fixed Point Theorems, Aboa Centre for Economics Discussion paper No. 131 Turku 2019.
- [7] E.Kohlberg and J-F. Mertens, On the strategic stability of equilibria, *Econometrica*, 54(1986),1003-1037.
- [8] D.Monderer and A.Sela, A 2×2 game without the fictitious play property, *Games and Economic Behavior* 14(1996), 144-148.
- [9] D.Monderer and L.S.Shapley, Fictitious play property for games with identical interests, *Journal of Economic Theory* 1 258-265, (1996).
- [10] J.Nash, Non-cooperative games, *Annals of Mathematics* 54(1951), 286-295.
- [11] R.F. Nau, S. Gomez Canovas and P. Hansen, On the Geometry of Nash Equilibria and Correlated Equilibria. *International Journal of Game Theory*. 32(2004). 443-453.
- [12] M. Pangallo¹, J. B. T. Sanders, T. Galla, and J. D. Farmer, Towards a taxonomy of learning dynamics in 2×2 games, *Games and Economic Behavior* 132(2022), 1-21.
- [13] L.S.Shapley, Some topics in two-person games, *Annals of Mathematics Studies*, 52, 1-28, (1964).
- [14] 高尾健朗、ナッシュ均衡集合の基本構造とナッシュ写像の性質、「経営学論集」, 第 16 巻 第 1 号、1-23,2005
- [15] B. Zhang and J. Hofbauer, Equilibrium selection via replicator dynamics in 2×2 coordination games, *International Journal of Game Theory* 44(2015), 433-448.