メタ巡回群をシロー部分群にもつ有限群の主ブロック上の加群の相対射影被覆

東京理科大学大学院・理学研究科数学専攻 田口 宏明
Hiroaki Taguchi
Department of Mathematics
Tokyo University of Science

1 はじめに

本稿は功刀直子氏との共同研究に基づく.
有限群のモジュラー表現論において, Broué によって提出された重要な予想がある.

予想 1.1 ([2])**.** B を kG のブロックとし, D をその不足群とする. このとき, D が可換であれば, B と, それと Brauer 対応する $kN_G(D)$ のブロックの間には導来同値が存在するのではないか?

この Broué 予想は様々な有限群や, 不足群について検証され, 複数のケースで成り立つことが示されている. その成立例の一つとして, 不足群が巡回群の場合がある. 一方で, Rouquier によって Broué 予想の非可換版とも言える予想が述べられた.

予想 1.2 ([7])**.** B を kG のブロックとし, D をその不足群とする. このとき, D の超焦点部分群 $\tilde{D}$ が可換であれば, B と, それと Brauer 対応する $kN_G(\tilde{D})$ のブロックの間には導来同値が存在するのではないか?

D が G のシロー p 部分群の場合は, D の超焦点部分群は $D \cap O^p(G)$ となる. ただし, $O^p(G)$ は G の正規部分群のうち, G との指数が p べきとなる最小のものである.

この Rouquier の予想の仮定を満たす例として, p が奇素数であり, 有限群 G が非可換メタ巡回群 $C_{p^a} \rtimes C_p (2 \leq a)$ に同型なシロー p 部分群 P を持つ場合がある. この G は, 指数 p の正規部分群 G_0 と位数 p の部分群 Q をもち, $G = G_0 \rtimes Q$ となる. 加えて G_0 のシロー p 部分群 P_0 は位数が C_{p^a} の巡回群となる. また, $B_0(kG)$ の不足群は P であり, $O^p(G) = G_0$ となるため, P の超焦点部分群は G_0 のシロー p 部分群 P_0 となる. したがって P は可換な超焦点部分群を持つ.

さらに, P_0 の G 上の正規化群 $N_G(P_0)$ は $N_G(P_0) = N_{G_0}(P_0) \rtimes Q$ となる. G_0 は巡回群 P_0 をシロー p 部分群に持ち, $B_0(kG_0)$ の不足群は P_0 となるため, $B_0(kG_0)$ と, それと Brauer 対応する $B_0(kN_{G_0}(P_0))$ は Broué 予想の成立が確認されている場合となっている. すなわち, $B_0(kG_0)$ と $B_0(kN_{G_0}(P_0))$ の間には導来同値が存在する. それゆえ, $B_0(kG)$ と $B_0(kN_G(P_0))$ の間の導来同値の成立が期待されている.

ブロック間の導来同値を考察する手法の一つとして, 森田型安定同値を構成し, 導来同値へ持ち上げるというものがある [5]. また, 局所的な情報を貼り合わせて, 主ブロック間の森田型安定同値を構成する方法が Rouquier[7] によって示され, Okuyama はこの方法を用いて $B_0(kG)$ と $B_0(kN_G(P_0))$ の間の森田型安定同値を構成した [6]. そこでは相対射影被覆が重要な役割を担っている. 加えて, 構成された森田型安定同値を導来同値へ持ち上げる上でも重要な鍵となっている. 本研究はこのような動機のもとで相対射影被覆について考察を行った.

2 相対射影加群と相対射影被覆

本節では相対射影加群と相対射影被覆を定義する. G を有限群, k を正標数 p の代数閉体とし, p が G の位数を割り切るものを考える.

定義 2.1. H を G の部分群とする. このとき, kG 加群 M が相対 H 射影的であるとは, ある kH 加群 N に対して, M が $N\uparrow^G = kG \otimes_{kH} N$ の直和因子となることをいう.

同値な条件の一つとして, $M\downarrow_H\uparrow^G$ の直和因子に M が現れるというものがある. 部分群 H が単位元からなる自明な部分群 $\{1\}$ の場合, $M\downarrow_{\{1\}}\uparrow^G$ は射影加群となる. したがって, M が射影的であることと, 相対 $\{1\}$ 射影的であることは同値である.

次に相対射影被覆を定義する.

定義 2.2. H を G の部分群, M を kG 加群とする. このとき, 次の kG 加群の完全列

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow X \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

が次の 3 つの条件を満たすとき, M の相対 H 射影被覆という.

(1) X は相対 H 射影的である.
(2) この完全列は kH 加群の完全列として分裂する.
(3) N はゼロでない相対 H 射影的な直和因子を持たない.

簡単に, X を M の相対 H 射影被覆ともいう. 相対射影性の場合と同様にして, H が単位元からなる自明な部分群のとき, 相対 H 射影被覆は射影被覆と一致する. G の部分群 H に対して, kG 加群 M の相対 H 射影被覆は常に存在し, 同型の違いを除いて一意に定まる. また, X が直既約の場合, (1) と (2) が成り立つならば (3) も自動的に成り立つ.

誘導加群 $k_H\uparrow^G$ の直既約因子のうち, 自明加群 k_G への全射準同型が存在するものが, ただひとつ存在する. この直既約因子を Scott 加群とよび, $\mathrm{Sc}(G,H)$ と書く. $\mathrm{Sc}(G,H)$ から k_G への全射準同型を ϕ とすると, 完全列

$$0 \longrightarrow \ker\phi \longrightarrow \mathrm{Sc}(G,H) \longrightarrow k_G \longrightarrow 0$$

は k_G の相対 H 射影被覆である.

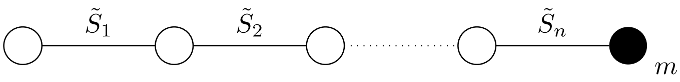
3 非可換メタ巡回群をシロー部分群に持つ有限群とその群環

今節以降, メタ巡回群をシロー部分群にもつ群として, 次の群たちを考える.

q_0 をある素数のべきとする. また, n を p を法とする q_0 の乗法的位数とする. すなわち, $0 \leq n' \lneq n$ に対し, $p \nmid q_0^{n'} - 1$ かつ $p \mid q_0^n - 1$ となっているとする. さらに, $q = q_0^p$ とし, G_0 を一般線形群 $GL(n,q)$ とする. このとき, G_0 は巡回シロー p 部分群をもつ. それを P_0 とする.

$Q = \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_{q_0})$ とすると, これは位数 p の巡回群であり, 成分ごとの作用で G に作用している. この作用による半直積 $G_0 \rtimes Q$ を G とする. このとき G のシロー p 部分群は $P_0 \rtimes Q$ となる. この設定の下で, $B_0(kG)$ に属する単純加群たちの相対 Q 射影被覆たちを調べていく. G_0 は巡回シロー p 部分群をもつため, $B_0(kG_0)$

は Braue tree algebra となっている．加えて, [3] から, その Braur tree は次の通りである．

$B_0(kG_0)$:


ただし, $\tilde{S}_1, \ldots, \tilde{S}_n$ は $B_0(kG_0)$ に属する単純加群の同型類の代表系である．その代表系からなる集合を $\mathrm{IBr}(B_0(kG_0))$ と表す．さらに, $\tilde{S}_1$ は自明 kG_0 加群である．m は例外重複度を表す．

また, $H = N_G(P_0), H_0 = N_{G_0}(P_0)$ とすると, $H = H_0 \rtimes Q$ と表すことができる．$B_0(kH_0)$ も n 個の相異なる単純加群たちを持つ Brauer tree algebra である．その Brauer tree は star 型であり, 中心に例外重複度 m をもつ．

[4, Lemma2.2] から, 次がわかる．

補題 3.1. 次の一対一対応が存在する:

(1)

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{IBr}(B_0(kG)) & \longrightarrow & \mathrm{IBr}(B_0(kG_0)) \\ \uplus & & \uplus \\ S & \longmapsto & S\downarrow_{G_0} \end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{IBr}(B_0(kH)) & \longrightarrow & \mathrm{IBr}(B_0(kH_0)) \\ \uplus & & \uplus \\ T & \longmapsto & T\downarrow_{H_0} \end{array}$$

$T_1, \ldots, T_n$ を $B_0(kH)$ に属する相異なる単純 kH 加群全体とする．各 T_i はすべて 1 次元であり,

$$P_Q(T_i) \coloneqq \mathrm{Sc}(H, Q) \otimes T_i$$

は T_i の相対 Q 射影被覆となる．特に, 次がわかる．

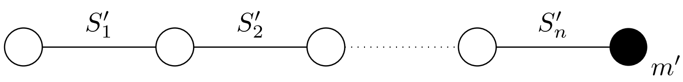
補題 3.2. $P_Q(T_1), \ldots, P_Q(T_n)$ が $B_0(kH)$ に属する相異なる $k_Q\uparrow^H$ の直既約因子全体である．

加えて, これらが射影的でない, すなわち, Q をバーテックスにもつこともわかる．

4 kG の主ブロックに属する単純加群とその相対 Q 射影被覆たち

[1, (3, 2)] から $B_0(kG)$ に属する Q をバーテックスに持つ自明なソースを持つ加群たちと $B_0(kC_{G_0}(Q))$ に属する直既約射影加群たちの間には 1 対 1 対応が存在する．

今, Q の固定体は $\mathbb{F}_{q_0}$ であるため, $C_{G_0}(Q) = GL(n, q_0)$ となる．したがって, [3] から, $B_0(kC_{G_0}(Q))$ の Brauer tree は次の通りである．

$B_0(kC_{G_0}(Q))$:


ただし, $\{S'_1, \ldots S'_n\} = \mathrm{IBr}(B_0(kC_{G_0}(Q)))$ であり, m' は重複度を表す．加えて, S'_1 は自明 $kC_{G_0}(Q)$ 加群である．注意として, $C_{G_0}(Q)$ のシロー p 部分群は P_0 の真部分群となるため, $m \neq m'$ となっている．

X_i を $B_0(kG)$ に属する Q をバーテックスに持つ自明なソースを持つ加群のうち, $P(S'_i)$ に対応するものとする．これらに対し, 次の補題を示した．

補題 4.1. $1 \leq i \leq n-1$ に対して, $X_i \downarrow_{G_0}$ は直既約射影加群である.

これを用いて次の結果を示した.

定理 4.2. $1 \leq i \leq n$ に対して, X_i は S_i の相対 Q 射影被覆となる.

G_0 が本稿で考察している群 $GL(n,q)$ に限らず, 一般にメタ巡回群 $C_{p^a} \rtimes C_p$ をシロー部分群にもつ群 $G = G_0 \rtimes Q$ について, $B_0(kG_0)$ と $B_0(kC_{G_0}(Q))$ の Brauer tree がどちらも line 型であれば, 補題 4.1 の内容を仮定することで, 定理 4.2 を示すことができる.

参考文献

[1] M. Broué. On Scott modules and p-permutation modules: an approach through the Brauer morphism. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 93(3):401–408, 1985.

[2] M. Broué. Equivalences of blocks of group algebras. In *Finite-dimensional algebras and related topics (Ottawa, ON, 1992)*, Vol. 424 of *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C: Math. Phys. Sci.*, pp. 1–26. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1994.

[3] P. Fong and B. Srinivasan. Brauer trees in GL(n, q). *Math. Z.*, 187(1):81–88, 1984.

[4] M. Holloway, S. Koshitani, and N. Kunugi. Blocks with nonabelian defect groups which have cyclic subgroups of index p. *Arch. Math. (Basel)*, 94(2):101–116, 2010.

[5] T. Okuyama. Some examples of derived equivalent blocks of finite groups. *preprint*, 1997.

[6] T. Okuyama. Relative projective covers and the brauer construction over finite group algebras (cohomology theory of finite groups and related topics). 第 1784 巻, pp. 77–95. 京都大学数理解析研究所, 3 2012.

[7] R. Rouquier. Block theory via stable and Rickard equivalences. In *Modular representation theory of finite groups (Charlottesville, VA, 1998)*, pp. 101–146. de Gruyter, Berlin, 2001.