微分 Zygmund 環上の積分作用素と等距離作用素について

横浜国立大学・工学研究院　植木 誠一郎 *

Sei-Ichiro Ueki,
Department of Mathematical Science,
Yokohama National University

1 Introduction

Banach 空間のある構造を保存する作用素は長らく研究されている．例えば, 単位円板 $\mathbb{D}$ 上の有界な解析関数から構成される Hardy 空間 H^∞ は上限ノルムに関して可換 Banach 環である．この H^∞ に作用する環準同型写像 S は $\mathbb{D}$ から $\mathbb{D}$ への等角写像 φ を用いて合成作用素 $Sf = f \circ \varphi$ の形で表され, かつ H^∞ の環準同型写像はこの形で完全に決定される．このような作用素の研究対象として距離を保つ等距離作用素は自然に研究が行われてきた．Banach 自身がコンパクト距離空間 Q, K 上で定義される実数値連続関数空間 $C(Q)$ と $C(K)$ の間の全射な等距離作用素 T の特徴づけを与えており, 絶対値が 1 であるような K 上の実数値連続関数 h と K から Q への同相写像 φ を用いて, T は,

$$Tf(t) = h(t)f(\varphi(t)) \quad (t \in K)$$

と表されることを示した．これと同様の結果が Lebesgue 空間 $L^p[0,1]$ 上でも成り立つと Banach は言及しているが, それを一般的な σ-有限な測度空間上の Lebesgue 空間 $L^p(\Omega)$ で示したのが Lamperti である (cf.[7])．等距離作用素 T を特徴づける荷重合成作用素の形は Canonical Form と呼ばれる．その後, H^∞ の等距離作用素の決定が Nagasawa [8] と deLeew-Rudin-Wermer [1] によって行われ, deLeew-Rudin-Wermer は Hardy 空間 H^1 の等距離作用素の構造についても明らかにしている．Forelli [4] は deLeew-Rudin-Wermer の H^1-等距離作用素の結果を一般の Hardy 空間 H^p $(1 \leq p < \infty, p \neq 2)$ へと拡張した．これらの研究により, Hardy 空間の等距離作用素も Canonical Form をもつことが明らかにされている．この辺りの背景については Fleming-Jamison の著書 [7] の中に詳しく記述されている．

Novinger と Oberlin [9] は Hardy 空間 H^p $(1 \leq p < \infty)$ に関係する解析関数空間として S^p を導入した：

$$S^p = \{f \in H(\mathbb{D}) : f' \in H^p\}.$$

S^p-空間上のノルムの定義はいくつ考えられるが, ここでは,

$$\|f\|_p = |f(0)| + \|f'\|_{H^p}$$

を採用する．Novinger-Oberlin は, このノルムから定まる距離に関する S^p の線形等距離作用素 T が, H^p-線形等距離作用素 τ と $|\lambda| = 1$ である定数 λ を用いて,

$$Tf(z) = \lambda \left[f(0) + \int_0^z \tau(f')(w)\, dw \right]$$

* 本研究は JSPS 科研費 JP21K03301 の助成を受けたものである．

と表現されることを示した. τ は H^p-等距離作用素であるから, $p \neq 2$ の場合には Forelli の結果により, S^p-等距離作用素は, ある内部関数 Φ と $\Psi := \tau(1)$ を用いて,

$$Tf(z) = \lambda \left[f(0) + \int_0^z \Psi(w) f'(\Phi(w)) dw \right]$$

となることがしたがう.

Hardy 空間と同様に, Nevanlinna 空間に属する解析関数空間として, 次の Smirnov 空間 $N^1 \equiv N^*$ と Privalov 空間 N^p $(1 < p < \infty)$ が知られている:

$$f \in N^1 \Leftrightarrow \lim_{r \to 1^-} \int_{\mathbb{T}} \log(1 + |f(r\zeta)|) d\sigma(\zeta) = \sup_{0 \leq r < 1} \int_{\mathbb{T}} \log(1 + |f(r\zeta)|) d\sigma(\zeta),$$
$$f \in N^p \Leftrightarrow \sup_{0 \leq r < 1} \int_{\mathbb{T}} \{\log(1 + |f(r\zeta)|)\}^p d\sigma(\zeta) < \infty.$$

これらの解析関数空間には境界値関数を用いて,

$$d_{N^p}(f,g) = \|f - g\|_{N^p} := \left[\int_{\mathbb{T}} \{\log(1 + |f(\zeta) - g(\zeta)|)\}^p d\sigma(\zeta) \right]^{1/p}$$

により距離関数が定義される. Hardy 空間や Privalov 空間は Hardy-Orlicz 空間の特別な場合としても考えられる. $\varphi(t)/t \to \infty$ $(t \to \infty)$ を満たす単調増加な正値凸関数 φ の集合を $\mathcal{SC}$ とする. $\varphi \in \mathcal{SC}$ に対して, Hardy-Orlicz 空間 H_φ は,

$$f \in H_\varphi \Leftrightarrow \sup_{0 \leq r < 1} \int_{\mathbb{T}} \varphi(\log(1 + |f(r\zeta)|)) d\sigma(\zeta) < \infty$$

と定義される. $\varphi(t) = e^{pt}$ の場合が H^p であり, $\varphi(t) = t^p$ の場合が N^p である. また,

$$\bigcup_{q > 0} H^q \subset N^p \subset \bigcup_{\varphi \in \mathcal{SC}} H_\varphi = N_*$$

が成り立つ. 別の Hardy-Orlicz 空間として, Zygmund F-algebra $N\log N$ がある. これは, $\varphi(t) = \varphi_e(t) := t\log(e + t)$ として得られる Hardy-Orlicz 空間 H_{φ_e} であり, Zygmund の著書 [13] の中で言及されているが, Eminyan [3] が位相線形空間としての性質を研究した解析関数空間である. $f \in N\log N$ は Smirnov 空間に属するため, H^p, N^p と同様に $\mathbb{T}$ の殆んど全ての点で境界値が存在する. この境界値関数（便宜上, 同じ記号 f で表す）を用いて,

$$\|f\|_{N\log N} = \int_{\mathbb{T}} \varphi_e(\log(1 + |f(\zeta)|)) d\sigma(\zeta)$$

と定める. このとき, $N\log N$ は $d_{N\log N}(f,g) := \|f - g\|_{N\log N}$ に関して F-algebra となる.

Novinger-Oberlin に倣い, 新しい解析関数空間 $S_{N\log N}$ を導入する：

$$S_{N\log N} = \{f \in H(\mathbb{D}) : f' \in N\log N\}, \quad d(f,g) = |f(0) - g(0)| + \|f' - g'\|_{N\log N}.$$

本稿では, $S_{N\log N}$ を微分 Zygmund 環と呼ぶことにする. この微分 Zygmund 環 $S_{N\log N}$ 空間の等距離作用素の構造を決定することが本研究の目的である.

2 $N\log N$ 上の積分作用素

前節で紹介した Zygmund F-algebra $N\log N$ では,

$$\|fg\|_{N\log N} \le 2(\|f\|_{N\log N} + \|g\|_{N\log N})$$

が成り立つため, $N\log N$ は多元環となっている. 一方で, 微分 Zygmund 環 $S_{N\log N}$ では,

$$\begin{aligned}\|fg\| &= |f(0)g(0)| + \|(fg)'\|_{N\log N}\\ &\le |f(0)g(0)| + 2(\|f'\|_{N\log N} + \|g\|_{N\log N} + \|f\|_{N\log N} + \|g'\|_{N\log N})\end{aligned}$$

であるため, $fg \in S_{N\log N}$ を導くためには,

$$f \in S_{N\log N} \text{ ならば, } f \in N\log N \tag{$\star$}$$

が成り立たなくてはならない. ここで, 次のような積分作用素を考える:

$$\mathcal{I}[f](z) := \int_0^z f(w)dw \quad (f \in H(\mathbb{D}),\ z \in \mathbb{D}).$$

このとき, $f = \mathcal{I}[f'] + f(0)$ であるから,

$$f' \in N\log N\ (\Leftrightarrow f \in S_{N\log N}) \text{ ならば, } \mathcal{I}[f'] \in N\log N$$

がわかれば, $(\star)$ が成り立つので, $S_{N\log N}$ も積に関して閉じていることがしたがう. つまり, 積分作用素 $\mathcal{I}$ の $N\log N$ における連続性が問題となる. このことに関しては, 次の結果が成り立つ.

Theorem 1. *$f \in N\log N$ ならば,*

$$\int_{\mathbb{T}} \varphi_e(\log(1 + |\mathcal{I}[f](\zeta)|))d\sigma(\zeta) \lesssim \int_{\mathbb{T}} \varphi_e(\log(1 + |f(\zeta)|))d\sigma(\zeta)$$

が成り立つ.

この定理の証明には, Bergman 型の解析関数空間が利用される. $\alpha > -1$ に対して, $dA_\alpha(z) = (\alpha+1)(1-|z|^2)^\alpha dA(z)$ とおく. ここで, dA は $\mathbb{D}$ 上の正規化された Lebesgue 測度である. $F \in C(\overline{\mathbb{D}})$ に対して,

$$\lim_{\alpha\downarrow -1} \int_{\mathbb{D}} F(z)dA_\alpha(z) = \int_{\mathbb{T}} F(\zeta)d\sigma(\zeta)$$

が成り立つ. 各 $r \in (0,1)$ に対して, $f_r \in C(\overline{\mathbb{D}})$ であり, $\|f_r - f\|_{N\log N} \to 0\ (r \to 1^-)$ と合わせると,

$$\lim_{\alpha\downarrow -1} \int_{\mathbb{D}} \varphi_e(\log(1 + |f(z)|))dA_\alpha(z) = \int_{\mathbb{T}} \varphi_e(\log(1 + |f(\zeta)|))d\sigma(\zeta)$$

を得る. したがって,

$$\int_{\mathbb{D}} \varphi_e(\log(1 + |\mathcal{I}[f](z)|))dA_\alpha(z) \lesssim \int_{\mathbb{D}} \varphi_e(\log(1 + |f(z)|))dA_\alpha(z) \tag{$*$}$$

の不等式が得られれば, $\alpha \downarrow -1$ として, 結論を得ることになる. 不等式 $(*)$ の導出には多少の関数論を用いる. $\varphi_e(\log(1+|f|))$ は $\mathbb{D}$ 上で劣調和関数であるから, 劣平均値不等式により,

$$\varphi_e(\log(1 + |f(z)|)) \lesssim_{r,\alpha} \int_{\phi_z(r\mathbb{D})} \frac{\varphi_e(\log(1 + |f(w)|))}{(1-|w|^2)^{\alpha+2}} dA_\alpha(w)$$

が $z \in \mathbb{D}$ に関して一様に成り立つ. ここで, ϕ_w は $\mathbb{D}$ の Möbius 変換 : $\phi_w(z) = \frac{z-w}{1-\overline{w}z}$ である. $w \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ に対して, $\phi_w(r\mathbb{D})$ は Carleson 集合 $S(w/|w|, R) := \{\zeta \in \mathbb{T} : |\zeta - w/|w|| < R\}$ で覆うことができ, また, 重み付き測度 dA_α は Carleson 測度であるため,

$$A_\alpha(S(w/|w|, R)) \lesssim_{r,\alpha} (1-|w|^2)^{\alpha+2}$$

が成り立つ. これらの評価不等式を用いると,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}} \varphi_e(\log(1+|\mathcal{I}[f](z)|))dA_\alpha(z) &\lesssim \int_{\mathbb{D}} \sup_{0\le t\le 1} \chi_{\phi_w(r\mathbb{D})}(tz)dA_\alpha(z) \int_{\mathbb{D}} \frac{\varphi_e(\log(1+|f(w)|))}{(1-|w|^2)^{\alpha+2}} dA_\alpha(w) \\ &\lesssim \int_{\mathbb{D}} \varphi_e(\log(1+|f(w)|)) \frac{A_\alpha(S(w/|w|, R))}{(1-|w|^2)^{\alpha+2}} dA_\alpha(w) \\ &\lesssim_{r,\alpha} \int_{\mathbb{D}} \varphi_e(\log(1+|f(w)|))dA_\alpha(w)\end{aligned}$$

が得られる. $(*)$ の評価には r と α に依存する定数が含まれるが, $-1 < \alpha < 0$ としてその定数を明示すると,

$$\int_{\mathbb{D}} \varphi_e(\log(1+|\mathcal{I}[f](z)|))dA_\alpha(z) \le \frac{2^{2\alpha+4}r^2(1+r)^{\alpha+2}}{(1-r)^{2(\alpha+2)}} \int_{\mathbb{D}} \varphi_e(\log(1+|f(w)|))dA_\alpha(w).$$

である. $\alpha \downarrow -1$ とすると,

$$\int_{\mathbb{T}} \varphi_e(\log(1+|\mathcal{I}[f](\zeta)|))d\sigma(\zeta) \le \frac{4r^2(1+r)}{(1-r)^2} \int_{\mathbb{T}} \varphi_e(\log(1+|f(\zeta)|))d\sigma(\zeta)$$

となる.

この Theorem 1 により, $S_{N\log N}$ は単なる多元環ではなく, 距離関数 $d(f,g)$ に関して積 : $(f,g) \mapsto fg$ が連続であることもしたがう. すなわち, $(S_{N\log N}, d)$ は F-algebra であることがわかる.

3 線形等距離作用素

まず, 線形等距離作用素について述べる. 著者の先行研究 [10] において, $N\log N$ の線形等距離作用素 T は $\mathbb{D}$ の内部関数 $\{\Psi, \Phi\}$ を用いて,

$$Tf(z) = \Psi(z)f(\Phi(z))$$

と決定されることが示されている. ここで用いられている手法は, $N\log N$-等距離作用素 T を部分空間である H^1 に制限することで, この制限作用素が H^1-等距離作用素になり, Forelli, Rudin の結果に帰着させることが可能となる. したがって, T は H^1-等距離作用素として Canonical Form で表される. この表現を $N\log N$ 空間へ拡張することで, 上記の表現が得られる. ここでは, $S_{N\log N}$ が S^1 の部分空間であることから上述と同様な手法を踏襲することで, $S_{N\log N}$-等距離作用素の S^1 への制限が S^1-等距離作用素になることが示される. このことから, Novinger-Oberlin による S^1-等距離作用素の結果と Forelli, Rudin による H^1-等距離作用素の Canonical Form に帰着させることが可能となる. $f \in S_{N\log N}$ は dilated function $f_r \in S^1$ により $d(f_r, f) \to 0$ as $r \to 1^-$ と近似できることから, T の積分表現が $S_{N\log N}$ 全体へ拡張される. また, S^1 の場合とは異なり, $\Psi = \tau(1)$ が内部関数であることまでわかるので, 結果として次を得る :

Theorem 2. T を $S_{N\log N}$ の線形な等距離作用素とする. このとき, $\mathbb{D}$ の内部関数の組 $\{\Psi, \Phi\}$ と $|\lambda| = 1$ である $\lambda \in \mathbb{C}$ が存在し,

(a) Φ の境界値関数は $\mathbb{T}$ で測度保存条件を満たす.

(b) T は次のように表される：

$$Tf(z) = \lambda \left[f(0) + \int_0^z \Psi(w) f'(\Phi(w))\, dw \right].$$

$S_{N\log N}$ の全射な線形等距離作用素については次のような特徴づけが得られる：

Theorem 3. T を $S_{N\log N}$ の全射な線形等距離作用素とする．このとき, 定数 $\{\lambda, \kappa, \nu\} \subset \mathbb{T}$ が存在して,

$$Tf(z) = \lambda\{(1-\kappa)f(0) + \kappa f(\nu z)\}$$

が成り立つ.

4 乗法的等距離作用素

本稿の第 2 節において, $S_{N\log N}$ が多元環になることが示されている．したがって, $S_{N\log N}$ に作用する乗法的作用素を考えることができる．ここで, 作用素 T が $S_{N\log N}$ で乗法的であるとは, $T(fg) = (Tf)(Tg)$ を満たすことをいう．$S_{N\log N}$ の全射な乗法的等距離作用素の構造を決定することもこの研究の目的である．ただし, 線形性は仮定しないものとする．Smirnov 空間 N^1 も多元環であり, N^1 の全射な乗法的等距離作用素の構造決定問題は Hatori-Iida [5] により解決されている．Hatori-Iida によると, N^1 の全射な乗法的等距離作用素は $\mathbb{D}$ の自己同型写像による合成作用素として表現される．この結果は, N^p でもやはり成立することが Hatori-Iida-Stević-Ueki [6] において考察されている．$S_{N\log N}$ の全射な乗法的等距離作用素 T は 1/2-同次性をもつ, つまり, $f \in S_{N\log N}$ に対して, $T(f/2) = T(f)/2$ on $\mathbb{D}$ を満たすことが示される．この性質は T の S^1 への制限が $T(0) = 0$ を満たす（S^1 での）全射な等距離作用素であることを保証する．これにより T に Mazur-Ulam の定理が適用できるので, この制限作用素は S^1 上の実線形な等距離作用素であることがわかる．この実線形性は f_r による近似を用いることで $S_{N\log N}$ まで拡張することができ, $T(i) = i$ が T の $S_{N\log N}$ 上の複素線形性を, $T(i) = -i$ が T の共役線形性を導く．Theorem 3 で得られた全射な線形等距離作用素の形を用いれば, この T の構造を次のように決定することができる.

Theorem 4. T を $S_{N\log N}$ の乗法的な全射等距離作用素とする．ただし, T の線形性は仮定しない．このとき, $|\nu| = 1$ である $\lambda \in \mathbb{C}$ が存在し, T は次の何れかの形で表すことができる：$f \in S_{N\log N}$, $z \in \mathbb{D}$ に対して,

$$Tf(z) = f(\nu z) \quad \text{or} \quad Tf(z) = \overline{f(\overline{\nu z})}.$$

5 Remark

Novinger-Oberlin は S^p 空間に 2 種類のノルム

$$\|f\|_p = |f(0)| + \|f'\|_{H^p},$$
$$\|f\|_p = \|f\|_\infty + \|f'\|_{H^p}$$

を導入し, これらに関する線形等距離作用素について考察している．Hardy 空間 H^p $(p \geq 1)$ の場合, $f' \in H^p$ ならば, f はディスク環の関数であることが知られている (cf. Duren [2, p.42, Theorem 3.11])．したがっ

て, $f \in S^p$ に対して定義される「第 2 のノルム」は意味を持つ. 本稿の第 2 節で示したように, $f \in S_{N\log N}$ に対して, $f \in N\log N$ であることは判明しているが, $f \in H^\infty$ であるかどうかはわかっていない. このため, $f \in S_{N\log N}$ に対して,

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_{N\log N}$$

を導入することに意義があるのかどうかはわからない.

また, 重み付き測度 dA_α に関して, $\varphi_e(\log(1 + |f'|))$ が $\mathbb{D}$ において可積分である Bergman 型の解析関数空間が考えられるため, この関数空間の等距離作用素についても本稿と同様な結果が成り立つことが想定される. それは, $S_{N\log N}$ での議論を Bergman 型の関数空間に適合するように適宜修正すれば良い. その際には, 著者の先行研究 [11, 12] を参照していただきたい.

参考文献

[1] K. deLeeuw, W. Rudin and J. Wermer, *The isometries of some function spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **11** (1960), 694–698.

[2] P. Duren, Theory of H^p spaces, DOVER Publications, 2000.

[3] O.M. Eminyan, *Zygmund F-algebras of holomorphic functions in the ball and in the polydisk*, Doklady Math. **65** (2002), 353–355.

[4] F. Forelli, *The isometries of H^p*, Canad. J. Math., **16** (1964), 721–728.

[5] O. Hatori and Y. Iida, *Multiplicative isometries on the Smirnov class*, Cent. Eur. J. Math., **9** (2011), 1051–1056.

[6] O. Hatori, Y. Iida, S. Stević and S. Ueki, *Multiplicative isometries on F-algebras of holomorphic functions*, Abstr. Appl. Anal., 2012, ArticleID:125987.

[7] R.J. Fleming and J.E. Jamison, Isometries on Banach spaces: Function Spaces, Chapman & Hall/CRC, New York (2003).

[8] M. Nagasawa, *Isomorphism between commutative Banach algebras with an application to rings of analytic functions*, Kodai Math. Sem. Rep. **11** (1959), 182–188.

[9] W.P. Novinger and D.M. Oberlin, *Linear isometries of some normed spaces of analytic functions*, Can. J. Math., **37** (1985), 62–74.

[10] S. Ueki, *Isometries of the Zygmund F-algebra*, Proc. Amer. Math. Soc. **140** (2012), 2817–2824.

[11] S. Ueki, *Isometries of analytic function spaces with N^p-derivative*, Integral Equations Operator Theory **92** (2020), Article:20, 12pages.

[12] S. Ueki, *Isometries of analytic Besov-type Bergman-Orlicz spaces on the unit disk*, Mediterr. J. Math. **20** (2023), Article:19, 17pages.

[13] A. Zygmund, Trigonometric series, vol.2, Cambridge University Press, 1959.