$L^\infty(\mathbb{R})$ の調和解析

都留文科大学教育学部　　国定　亮一
Ryoichi Kunisada
Faculty of Liberal Arts,
Tsuru University

1　序言

本稿では $L^\infty(\mathbb{R})$ の調和解析について $L^1(\mathbb{R})$-加群という視点から論ずることを試みる. $L^\infty(\mathbb{R})$ の調和解析に関連するよく知られたテーマとして, 例えば以下のようなものが挙げられる.

- Tauber 型定理 (Wiener's Tauberian theorem, spectral synthesis)
- 概周期関数 (almost periodic functions in the sense of Bohr, Stepanoff, Weyl, Besicovitch, etc.)
- $H^\infty(\mathbb{R})$ (the bounded analytic functions on the half plane)

これらにはいずれも $L^\infty(\mathbb{R})$ の $L^1(\mathbb{R})$-部分加群の構造が関係している. 本稿では Tauber 型定理のみ取り上げる. 特に Lorentz の概収束と呼ばれる極限の一般化概念の調和解析的な観点からの取り扱いについて論じ, 著者により最近得られた複素 Tauber 型定理を紹介する.

2　双対性

以下, 実数のなす加群 $\mathbb{R}$ に対して $\hat{\mathbb{R}}$ をその双対群を表わすことにする. もちろん $\mathbb{R}$ と $\hat{\mathbb{R}}$ は位相群として同型であるが, 両者を区別し違う記号で表わした方がこれから出てくる種々の概念を理解するのに都合がよいためである. 以下では, $\phi \in L^\infty(\mathbb{R})$ に対してその Schwartz の超関数の意味での Fourier 変換 $\hat{\phi}$ を考える. すなわち, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ を急減少関数のクラスとしたとき, ϕ はその双対空間 $\mathcal{S}(\mathbb{R})^*$ の元である. また, $\hat{\phi}$ は $\mathcal{S}(\hat{\mathbb{R}})^*$ の元と見なせる. $\hat{\phi}$ は擬測度 (pseudomeasure) と呼ばれる. またその全体を $\mathcal{F}L^\infty(\hat{\mathbb{R}}) = \{\hat{\phi} : \phi \in L^\infty(\mathbb{R})\}$ と表す. また $A(\hat{\mathbb{R}}) := \{\hat{f} : f \in L^1(\mathbb{R})\}$ を $\hat{\mathbb{R}}$ 上の Wiener 代数とする. すると $\mathcal{F}L^\infty(\hat{\mathbb{R}})$ は $A(\hat{\mathbb{R}})$ の双対空間と見なせる. 実際, $\langle L^1(\mathbb{R}), L^\infty(\mathbb{R})\rangle$ は対応

$$\langle f, \phi\rangle \mapsto \int f(-t)\phi(t)dt$$

により双対ペアであり, 形式的に

$$\langle L^1, L^\infty\rangle \cong \langle \widehat{L^1}, \widehat{L^\infty}\rangle \cong \langle A(\hat{\mathbb{R}}), \mathcal{F}L^\infty(\hat{\mathbb{R}})\rangle \ (\langle \hat{f}, \hat{\phi}\rangle = \langle f, \phi\rangle)$$

と考えればよい. また, $A(\hat{\mathbb{R}})$ と $\mathcal{F}L^\infty(\hat{\mathbb{R}})$ のノルムをそれぞれ $\|\hat{f}\| = \|f\|_1, \|\hat{\phi}\| = \|\phi\|_\infty$ で定義する.

特に本稿において重要なのは以下で定義される $L^\infty(\mathbb{R})$ の $L^1(\mathbb{R})$-加群の構造である.

$$L^1(\mathbb{R}) \times L^\infty(\mathbb{R}) \ni (f, \phi) \mapsto f * \phi \in L^\infty(\mathbb{R})$$

この構造を形式的に Fourier 変換で移すことにより擬測度のなす空間 $\mathcal{F}L^\infty(\hat{\mathbb{R}})$ は $A(\hat{\mathbb{R}})$-加群の構造をもつ.

$$A(\hat{\mathbb{R}}) \times \mathcal{F}L^\infty(\hat{\mathbb{R}}) \ni (\hat{f}, \hat{\phi}) \mapsto (f * \phi)\hat{} = \hat{f}\hat{\phi} \in \mathcal{F}L^\infty(\mathbb{R})$$

重要なのは合成積による $L^1(\mathbb{R})$ の $L^\infty(\mathbb{R})$ への作用が, Fourier 変換によって, 通常の point-wise product による作用に移ることである.

$S(\mathbb{R}) \subseteq L^\infty(\mathbb{R})$ が $L^\infty(\mathbb{R})$ の $L^1(\mathbb{R})$-部分加群であるとは $L^\infty(\mathbb{R})$ の部分空間であり, さらに $L^1(\mathbb{R})$ の作用で閉じていることをいう:

$$S(\mathbb{R}) + S(\mathbb{R}) \subseteq S(\mathbb{R}), \quad L^1(\mathbb{R}) \cdot S(\mathbb{R}) \subseteq S(\mathbb{R}).$$

この $S(\mathbb{R})$ を Fourier 変換した集合を $\mathcal{F}S(\hat{\mathbb{R}})$ とすると, これは $\mathcal{F}L^\infty(\hat{\mathbb{R}})$ の $A(\hat{\mathbb{R}})$-部分加群である.

$$\mathcal{F}S(\hat{\mathbb{R}}) + \mathcal{F}S(\hat{\mathbb{R}}) \subseteq \mathcal{F}S(\hat{\mathbb{R}}), \quad A(\hat{\mathbb{R}}) \cdot \mathcal{F}(\hat{\mathbb{R}}) \subseteq \mathcal{F}S(\hat{\mathbb{R}}).$$

重要な $L^\infty(\mathbb{R})$ の部分空間の多くは $L^1(\mathbb{R})$-部分加群の構造を持っている. 例えば以下のような例がある.

- $C_{bu}(\mathbb{R})$ ($\mathbb{R}$ 上の有界一様連続関数のなす空間)
- $C_{ap}(\mathbb{R})$ ($\mathbb{R}$ 上の概周期関数のなす空間)
- $L_0^\infty(\mathbb{R}) := \{h \in L^\infty(\mathbb{R}) : \lim_{|x|\to\infty} h(x) = 0\}$ (収束する関数のなす空間)

一般に $L^\infty(\mathbb{R})$ の $L^1(\mathbb{R})$-部分加群 $S(\mathbb{R})$ に対して, その Fourier 変換のなす空間を $\mathcal{F}S(\hat{\mathbb{R}})$ と書くことにする. 例えば, 上記の例に対してはその Fourier 変換を以下のように表わされる.

- $\mathcal{F}C_{bu}(\hat{\mathbb{R}})$
- $\mathcal{F}C_{ap}(\hat{\mathbb{R}})$
- $\mathcal{F}L_0^\infty(\hat{\mathbb{R}})$ (擬関数のなす空間)

特に $L_0^\infty(\mathbb{R})$ を Fourier 変換して得られる空間 $\mathcal{F}L_0^\infty(\hat{\mathbb{R}})$ の元は擬関数と呼ばれる.

3　$\mathbb{R}$ 上の有界関数の概収束

本節では有界可測関数 $\phi \in L^\infty(\mathbb{R})$ の概収束を導入する．これはある種の Cesàro 収束であり, 関数の収束を一般化した概念になっている．

定義 3.1 ($\phi \in L^\infty(\mathbb{R})$ の概収束)**.** $\phi \in L^\infty(\mathbb{R})$ が $\alpha \in \mathbb{C}$ に概収束するとは

$$\lim_{\theta\to\infty} \left\| \frac{1}{2\theta} \int_{x-\theta}^{x+\theta} \phi(t)dt - \alpha \right\|_\infty = 0$$

が成り立つことである．またこのとき, $\phi \xrightarrow{ac} \alpha$ とかく．

概収束の概念は一般の amenable な局所コンパクト位相群に対して同様に定義される．元々は Lorentz ([9]) により非負整数のなす加法半群に対して定義された．その後 Raimi により $\mathbb{R}$ 上の類似物が導入され, さらに Chow は一般の amenable な局所コンパクト位相群に対して一般化している ([1, 2, 10, 11])．概収束は概周期関数のなす空間上の不変積分を与えるなど, L^∞ の調和解析において重要な役割を果たす概念である．

$\phi \in L^\infty(\mathbb{R})$ が $\alpha \in \mathbb{C}$ に強概収束するとは $|\phi - \alpha| \xrightarrow{ac} 0$ が成り立つことと定める．またこのとき, $\phi \xrightarrow{sac} \alpha$ とかく．0 に強概収束する関数全体のなす空間を $L^\infty_{sac0}(\mathbb{R})$ とかく．これも $L^\infty(\mathbb{R})$ の閉 $L^1(\mathbb{R})$-部分加群になっている．また, その Fourier 変換 $\mathcal{F}L^\infty_{sac0}(\hat{\mathbb{R}})$ は $\hat{\mathbb{R}}$ 上の連続測度のなす空間 $M_c(\hat{\mathbb{R}})$ の一般化になっている．すなわち, $\mu \in M_c(\hat{\mathbb{R}})$ ならば $\mu \in \mathcal{F}L^\infty_{sac0}(\hat{\mathbb{R}})$ である ([6])．そこで, $\mathcal{F}L^\infty_{sac0}(\hat{\mathbb{R}})$ の元を擬連続測度と呼ぶことにする．定義から以下の包含関係が成立している:

$$L^\infty_0(\mathbb{R}) \subseteq L^\infty_{sac0}(\mathbb{R}) \subseteq L^\infty(\mathbb{R}) \longleftrightarrow \mathcal{F}L^\infty_0(\hat{\mathbb{R}}) \subseteq \mathcal{F}L^\infty_{sac0}(\hat{\mathbb{R}}) \subseteq \mathcal{F}L^\infty(\hat{\mathbb{R}}).$$

4　加群の局所化

$S(\mathbb{R})$ を $L^\infty(\mathbb{R})$ の閉 $L^1(\mathbb{R})$-部分加群とする． このとき, その Fourier 変換 $\mathcal{F}S(\hat{\mathbb{R}})$ は $\mathcal{F}L^\infty(\hat{\mathbb{R}})$ の閉 $A(\hat{\mathbb{R}})$-部分加群になるのであった． $\hat{\phi} \in \mathcal{F}L^\infty(\hat{\mathbb{R}})$ が局所的に $\mathcal{F}S(\hat{\mathbb{R}})$ の元であるということを以下のように定義する．

定義 4.1 (局所的な $\mathcal{F}S(\hat{\mathbb{R}})$-加群)**.** $\hat{\phi} \in \mathcal{F}L^\infty(\hat{\mathbb{R}})$ が $\xi_0 \in \hat{\mathbb{R}}$ において局所的に $\mathcal{F}S(\hat{\mathbb{R}})$ の元であるとは, ある $\hat{\phi}_1 \in \mathcal{F}S(\hat{\mathbb{R}})$ および $U \in \mathcal{N}(\xi_0)$ が存在して, 任意の $\hat{f} \in A(U)$ に対して $\langle \hat{f}, \hat{\phi} \rangle = \langle \hat{f}, \hat{\phi}_1 \rangle$ が成り立つことを言う． ここで, $\mathcal{N}(\xi)$ は ξ における近傍系で, $A(U) := \{\hat{f} \in A(\hat{\mathbb{R}}) : \mathrm{supp}\, \hat{f} \subseteq U\}$ である．

$\xi_0 \in \hat{\mathbb{R}}$ において局所的に $\mathcal{F}S(\hat{\mathbb{R}})$ の元である $\hat{\phi}$ の全体を $\mathcal{F}S(\xi_0)$ とかく．またそのノルム閉包を $\overline{\mathcal{F}S(\xi_0)}$ とかく．

与えられた $\phi \in L^\infty(\mathbb{R})$ に対して, $\phi \xrightarrow{ac} 0$ なるための必要十分条件を, ϕ を Fourier 変換して得られる超関数 $\hat{\phi}$ の局所的な挙動を使って特徴づけることが可能である．

定理 4.1. $\phi \in L^\infty(\mathbb{R})$ とする． $\phi \xrightarrow{ac} 0$ なるための必要十分条件は $\hat{\phi} \in \overline{\mathcal{F}L^\infty_{sac0}(0)}$ である．

上の結果を平行移動してやれば, より一般に次の結果が成立することが分かる．

系 1. $\phi \in L^\infty(\mathbb{R})$ とし, $\xi \in \hat{\mathbb{R}}$ とする. $\phi \cdot e^{-i\xi x} \xrightarrow{ac} 0$ なるための必要十分条件は $\hat{\phi} \in \overline{\mathcal{F}L^\infty_{sac0}(\xi)}$ である.

特に, $M_c(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{F}L^\infty_{sac0}(\hat{\mathbb{R}})$ であるから次が成立する.

系 2. $\phi \in L^\infty(\mathbb{R})$ とする. $\hat{\phi}$ が 0 において局所的に連続測度に一致しているならば, すなわち, ある $U \in \mathcal{N}(0)$ および, U に台をもつ $\hat{\mathbb{R}}$ 上の連続測度 μ が存在して

$$\langle \hat{f}, \hat{\phi} \rangle = \langle \hat{f}, \mu \rangle$$

が任意の $\hat{f} \in A(U)$ に対して成立するならば, $\phi \xrightarrow{ac} 0$ が成立する.

5　複素 Tauber 型定理

本節では定理 4.1 およびその系の複素 Tauber 型定理への応用を示す. これらの結果を用いることにより, 概収束に関する複素 Tauber 型定理が得られる. これは古典的な Tauber 型定理である Hardy-Littlewood の定理と Ingham の定理の中間に位置する結果と考えることができ, それなりに興味深いのではないかと思われる.

$\tau(x)$ を $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$ 上の局所可積分な関数とする. $\tau(x)$ の Laplace 変換を次で定義する:

$$\mathcal{L}\{\tau; s\} := \int_0^\infty e^{-st}\tau(t)dt.$$

一般に Laplace 変換はある右半平面上の正則関数になることが知られている ([3]). 以下, $\mathbb{C}^+ := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z > 0\}$ 上の正則関数全体のなす空間を $\mathrm{Hol}(\mathbb{C}^+)$ で表す. 関数 $\tau(x)$ の増大度に適当な制限をつけると, $\mathcal{L}\{\tau; s\} \in \mathrm{Hol}(\mathbb{C}^+)$ となる. 例えば, $\tau(x) = O(x^N)$ $(N \geq 0)$ とすると, $\mathcal{L}\{\tau; s\} \in \mathrm{Hol}(\mathbb{C}^+)$ であり, また, $\tau(x) \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R})$ である. このようなケースでは, $\tau(x)$ の Laplace 変換 $\mathcal{L}\{\tau; s\} = \mathcal{L}\{\tau : \sigma + it\}$ の $\sigma \to 0^+$ のときの動径極限 (radial limit) を考えると, これは $\mathcal{S}^*(\hat{\mathbb{R}})$ において, $\tau(x)$ の Fourier 変換 $\hat{\tau}$ に弱*収束する. 超関数の Fourier 変換の一意性により, $\hat{\tau}$ は τ で完全に決まるから, $\mathcal{L}\{\tau; s\}$ の $i\mathbb{R}$ における挙動から $\tau(x)$ に関する情報を導けることになる. 以下ではこの線に沿って具体的な結果をいくつか見ていく. まずは右半平面上の正則関数の超関数論的な境界挙動を定式化する. 以下, U を $\mathbb{R}$ の開集合とするとき, $\mathcal{D}(U)$ を U に台をもつ C^∞ 級関数のなす空間とする. また, その双対空間, すなわち, U 上の超関数のなす空間を $\mathcal{D}^*(U)$ で表す.

定義 5.1 (開集合上の局所的な超関数的境界挙動)**.** $f(s) \in \mathrm{Hol}(\mathbb{C}^+)$ が $(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subseteq i\mathbb{R}$ において超関数的境界挙動をもつとは, ある $\mu \in \mathcal{D}^*(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ が存在して以下が成立することをいう :

$$\lim_{\sigma \to 0^+} f(\sigma + it) = \mu \ (\textit{weak* convergence in } \mathcal{D}^*(t_0 - \delta, t_0 + \delta)).$$

言い換えると, 任意の $\varphi \in \mathcal{D}(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ に対して

$$\lim_{\sigma \to 0^+} \langle f(\sigma + it), \varphi \rangle = \langle \mu, \varphi \rangle$$

が成立する.

定義 5.2 (1 点における局所的な超関数的境界挙動)**.** $f(s) \in \mathrm{Hol}(\mathbb{C}^+)$ が $t_0 \in i\mathbb{R}$ において超関数的境界挙動をもつとは, t_0 のある開近傍 $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ が存在して, その上で $f(s)$ は超関数的境界挙動をもつことである.

定義 5.3 (開集合上の $\mathcal{F}S(\hat{\mathbb{R}})$-局所境界挙動)**.** $S(\mathbb{R})$ を $L^\infty(\mathbb{R})$ の $L^1(\mathbb{R})$-部分加群とする. $f(s) \in \mathrm{Hol}(\mathbb{C}^+)$ が開集合 $U \subseteq i\mathbb{R}$ 上で局所 $\mathcal{F}S(\hat{\mathbb{R}})$-境界挙動をもつとは, ある $\hat{\phi} \in \mathcal{F}S(\hat{\mathbb{R}})$ が存在して,

$$\lim_{\sigma \to 0^+} \langle f(\sigma + it), \varphi \rangle = \langle \hat{\phi}, \varphi \rangle \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(U)$$

が成立することである.

境界上の 1 点 $t_0 \in i\mathbb{R}$ における局所 $\mathcal{F}S(\hat{\mathbb{R}})$-境界挙動も同様に定義する. また特に $\mathcal{F}S(\hat{\mathbb{R}}) = \mathcal{F}L^\infty(\hat{\mathbb{R}}), \mathcal{F}L^\infty_{sac0}(\hat{\mathbb{R}}), \mathcal{F}L^\infty_0(\hat{\mathbb{R}})$ の場合, それぞれ局所擬測度境界挙動, 局所擬連続測度境界挙動, 局所擬関数境界挙動と呼ぶことにする.

特に, 擬関数境界挙動は以下のような古典的な境界挙動を含んでいる.

定義 5.4 ($f(s)$ が境界上に連続的 (解析的) に拡張可能な場合)**.** $f(s) \in \mathrm{Hol}(\mathbb{C}^+)$ が $i\mathbb{R}$ 上に連続的に拡張できる, すなわち極限

$$\lim_{\sigma \to 0^+} f(\sigma + it) = f(it)$$

が存在するならば, f は $i\mathbb{R}$ 上で局所擬関数境界挙動をもつ.

定義 5.5 (Local $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ behavior (Korevaar, 2004))**.** $f(s) \in \mathrm{Hol}(\mathbb{C}^+)$ が it_0 において, 局所的に H^1 であるとは, ある $\delta > 0$ および $F \in L^1(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ が存在して,

$$\lim_{\sigma \to 0^+} \int_{t_0 - \delta}^{t_0 + \delta} |f(\sigma + it) - F(t)| d\theta = 0.$$

が成立することをいう.

まず, 実用上重要になるのが $\tau(x)$ の有界性を保証する結果である. これに関しては最近 Debruyne と Vindas により証明された非常に一般的な結果がある. まずはそれを述べるために, 関数 $\tau(x)$ に関する次の概念を導入する.

定義 5.6 (boundedly decreasing functions)**.** $\tau : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ が有界減少 (boundedly decreasing) であるとは, ある正数 $K > 0$ および $\delta > 0$ が存在して, 任意の $t \in [0, \delta]$ に対して $\phi(x + t) - \phi(x) > -K$ が成立することである.

また, 複素数値関数 $\tau : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ が有界減少であることを実部と虚部がそれぞれ有界減少であることと定める.

以下の結果は様々な複素 Tauber 型定理を示す基礎となる結果である ([4]).

定理 5.1 (2019, Debruyne and Vindas)**.** $\tau(x)$ は有界減少とする. τ の Laplace 変換 $\mathcal{L}\{\tau; s\}$ が $t = 0$ において局所擬測度境界挙動をもつならば, $\tau(x)$ は有界である.

次に著者による概収束に関する複素 Tauber 型定理を紹介する ([8]).

定理 5.2 (Kunisada, 2024)**.** $\tau:\mathbb{R}_+\to\mathbb{C}$ は有界減少であり, Laplace 変換 $\mathcal{L}\{\tau;s\}$ が $t=0$ で局所擬連続測度境界挙動をもつならば, $\tau\xrightarrow{ac}0$.

系 3 (Kunisada, 2024)**.** $\tau:\mathbb{R}_+\to\mathbb{C}$ は有界減少とし，その Laplace 変換 $\mathcal{L}\{\tau;s\}$ とある $\alpha\in\mathbb{C}$ に対して

$$\mathcal{L}\{\tau;s\}-\frac{\alpha}{s}$$

が $z=0$ で局所擬連続測度境界挙動をもつならば, $\tau\xrightarrow{ac}\alpha$ が成立する.

系 3 と古典的な複素 Tauber 型定理である Ingham の定理を比較してみる ([5]). Ingham の定理は $\tau(x)$ の概収束ではなく収束を導く定理であり, そのためには $\tau(x)$ に, 以下で定義する緩減少と呼ばれる有界減少よりも強い仮定を置く必要がある.

定義 5.7 (slowly decreasing function)**.** $\tau:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ が緩減少 (slowly decreasing) であるとは任意の $\varepsilon>0$ に対して, ある $\delta>0$ および $x_0\geq 0$ が存在して, 任意の $t\in[0,\delta]$ と $x\geq x_0$ に対して $\tau(x+t)-\tau(x)\geq-\varepsilon$ が成立することである.

複素数値関数 $\tau:\mathbb{R}_+\to\mathbb{C}$ が緩減少であることを, 実部と虚部がそれぞれ緩減少であることと定める.

定理 5.3 (Ingham)**.** $\tau:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ は緩減少とする．その Laplace 変換 $\mathcal{L}\{\tau;s\}$ と $\alpha\in\mathbb{C}$ に対して

$$\mathcal{L}\{\tau;s\}-\frac{\alpha}{s}$$

が $i\mathbb{R}$ 上の各点で局所擬関数境界挙動をもつならば $\tau\xrightarrow{c}\alpha$ が成立する.

複素 Tauber 型定理において, $\tau(x)$ の $x\to\infty$ における挙動に関してより強い主張を導きたければ, その Laplace 変換 $\mathcal{L}\{\tau;s\}$ の境界挙動により強い仮定が必要になる．上の Ingham の定理のように $\lim_{x\to\infty}\tau(x)$ の存在を導きたければ, 正則関数 $\mathcal{L}\{\tau;s\}$ の境界軸 $i\mathbb{R}$ 全体に渡る性質を仮定する必要がある．一方で系 3 のように単なる概収束でよければ, 境界軸上の 1 点 $s=0$ の近傍における挙動のみを仮定すれば十分である．以下は系 3 と Ingham の定理の仮定と結論を比較した表である.

	Ingham	Kunisada
τの条件	有界振動	有界減少
$\mathcal{L}\{\tau;s\}-\frac{\alpha}{s}$の境界挙動	$\mathrm{Re}\,s=0$ 上で擬関数境界挙動	$s=0$ で擬連続測度境界挙動
結論	$\tau\xrightarrow{c}\alpha$ (収束)	$\tau\xrightarrow{ac}\alpha$ (概収束)

参考文献

[1] C. Chow, *On topologically invariant means on a locally compact group*, Trans. Amer. Math. Sot. 151 (1970), 443-456.

[2] C. Chow, *Weakly almost periodic functions and almost convergent functions on a group*, Trans. Amer. Math. Sot. 206 (1975), 175-200.

[3] D. V. Widder, *The Laplace transforms*, Princeton University Press (1941).

[4] G. Debruyne and J. Vindas, *Complex Tauberian theorems for Laplace transforms with local pseudofunction boundary behavior*, J. Anal. Math. 138 (2019), 799-833.

[5] A. E. Ingham, *On Wiener's method in Tauberian theorems*, Proc. Lond. Math. Soc. 38 (1935), 458–480.

[6] Y. Katznelson, L. Tzafriri, *On power bounded operators*, J. Funct. Anal. 68 (1986) 313-328.

[7] J. Korevaar, *Tauberian theory*, Springer, Berlin, 2004.

[8] R. Kunisada, *On Almost Convergence on Locally Compact Abelian Groups*, J Fourier Anal Appl 31, 5 (2025).

[9] G. G. Lorentz, *A contribution to the theory of divergent series*, Acta Math. 80 (1948), 167-190.

[10] R. A. Raimi, *Mean values and Banach limits*, Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957), 1029-1036.

[11] R. A. Raimi, *On Banach's generalized limits*, Duke Math. J. 26 (1959), 17-28.