半閉作用素のテンソル積と von Neumann 拡張

茨城大学大学院理工学研究科　平澤 剛

Go Hirasawa
Graduate School of Science and Engineering, Ibaraki University,
4-12-1 Nakanarusawa-cho, Hitachi-shi, Ibaraki, Japan

1. はじめに

無限次元複素 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の作用素[1]の理論に, Krein-von Neumann-Friedrichs 拡張論がある. 正値対称作用素を与えた際, 定義域を広げることにより, 正値性を保存したまま自己共役に拡張する, というものである. この拡張論において, 定義域が非稠密な可閉作用素が自然に登場する. それは, 正値自己共役拡張が存在するための必要十分条件が, 正値対称作用素の positively closable 条件だからである. 稠密に定義された正値対称作用素は positively closable 条件を満たすが, positively closable な正値対称作用素の定義域は稠密とは限らない. 従って, テンソル積 Hilbert 空間 $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ 上でこの拡張論を論じていくには, 定義域が非稠密な可閉作用素までテンソル積の定義の適用範囲を広げておく必要がある.

閉正値対称作用素の正値自己共役拡張の必要十分条件が positively closable であることを最初に特徴づけたのは T.Ando-K.Nishio ([1]) である. その後, [6], [13] において, 半閉な正値対称作用素や単なる正値対称作用素に対しても正値自己共役拡張を有する必要十分条件が positively closable であることが与えられている.

本稿では, まず, 作用素のテンソル積 $S \otimes T$ が非稠密な定義域をもつ可閉作用素 S, T に対しても定義可能であることを示す. そのアプローチとしては, 稠密に定義されているとは限らない半閉作用素のクラスに q-テンソル積 $\otimes_q$ なるものを導入し, 可閉作用素の閉包 $\overline{S}, \overline{T}$ は半閉かつ可閉であることから, それらの q-テンソル積 $\overline{S} \otimes_q \overline{T}$ も半閉かつ可閉となることで示される (Definition 3.3).

[1]線形作用素を単に作用素と呼ぶ. また, 作用素は可閉性, 半閉性, 正値性, 定義域の稠密性など, 満たすべき性質の状況に応じてその旨を記載したつもりであるため,（例えば）単に可閉作用素と書いてあるときは, 定義域が稠密とは限らないし, 半閉とも限らない.

次に, positively closable 条件を満たす半閉な正値対称作用素 S, T は, ある順序について最小な正値自己共役拡張（von Neumann 拡張）$S_{\mathcal{N}}, T_{\mathcal{N}}$ を有することになるので, 可閉である．よって, 上述した意味で $S \otimes T$ が定義される. このとき, 関係式 $S_{\mathcal{N}} \otimes T_{\mathcal{N}} = (S \otimes T)_{\mathcal{N}}$ が成り立つか否かの考察を報告する．先行研究 ([9]) として, 稠密に定義された閉正値対称作用素に対しては, この関係式が成り立つことがすでに示されているが, von Neumann 拡張が存在する必要十分条件である positively closable 条件のもとで, 成立の可否を考察することが学術的に重要であると考えた次第である.

2. 準備

$(\mathcal{H}, (x,y)_{\mathcal{H}})$, $(\mathcal{K}, (x,y)_{\mathcal{K}})$ で無限次元可分複素 Hilbert 空間を表わす. $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ は定義域 $\mathrm{dom}(\cdot)$ を $\mathcal{H}$ とする有界作用素の全体集合とする. 作用素 $S : \mathcal{H} \supseteq \mathrm{dom}(S) \to \mathcal{H}$ が可閉とは, 閉作用素 $\tilde{S}$ に拡張可能 $(S \subseteq \tilde{S})$ であることである．つまり, $Sx = \tilde{S}x, \quad x \in \mathrm{dom}(S) \subseteq \mathrm{dom}(\tilde{S})$. このとき, 閉包 $\overline{S}$ $(S \subseteq \tilde{S} \Longrightarrow \overline{S} \subseteq \tilde{S})$ が存在する.

Definition 2.1 ([7], [4] 作用素商の定義)**.** *$A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ (核条件 $\ker A \subseteq \ker B$) に対して, $B/A : Au \to Bu \quad (u \in \mathcal{H})$ で定義される（線形）作用素を B/A で表わす．B/A の定義域は $A\mathcal{H}$, 値域は $B\mathcal{H}$ である.*

Definition 2.2 (半閉部分空間の定義)**.** *部分空間 $M(\subseteq \mathcal{H})$ が半閉であるとは, M 上に Hilbert ノルム $\|\cdot\|_M$ が存在して次を満たすことである.*

$$\exists k > 0,\ \forall x \in M,\ \|x\| \le k\|x\|_M,\ \text{i.e., } (M, \|\cdot\|_M) \hookrightarrow \mathcal{H}$$

ある $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ で $M = A\mathcal{H}$ となることと同値である.

明らかに, 閉部分空間は, 直交射影作用素の値域となるので半閉である.

Definition 2.3 ([8] 閉・半閉作用素の定義)**.** *作用素 S が半閉（閉）とは, S のグラフが直積 Hilbert 空間において半閉（閉）なことである.*

Theorem 2.1 ([8] 半閉作用素の特徴づけ)**.** *作用素 $S : \mathcal{H} \supseteq \mathrm{dom}(S) \to \mathcal{H}$ について, 以下は同値である.*

(i) *S は半閉作用素である.*
(ii) *S は作用素商 $S = B/A$ である.*

$\mathcal{S}(\mathcal{H})$ で半閉作用素の全体集合を表わすとする．閉作用素のグラフは閉であるので, 半閉にもなっているため半閉作用素である. また, 半閉作用素の和, 積は半閉作用素である.

Definition 2.4 ([5] 弱共役性の定義)**.** $\mathcal{S}(\mathcal{H}) \ni S = B/A$ とする. このとき, 弱共役 $(B/A)^\times$ を次のグラフをもつ作用素とする.

$$\left\{(x,y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} : B^*x = A^*y,\ y \in (\ker A^*)^\perp\right\}$$

このグラフは, 作用素商の表現によらずに一通りに定まるため, これを $S^\times (= (B/A)^\times) : x \to y$ と表わすことができる. 定義から $\mathrm{ran}(S^\times) \subseteq \overline{\mathrm{dom}(S)}$ がすぐわかる. S が半閉作用素のとき, $S^\times$ は閉作用素であり, S が可閉な半閉作用素のとき, $S^\times$ は稠密に定義された閉作用素であることが知られている.

Definition 2.5 (正値性, 対称性, 自己共役性, 弱対称性)**.** $\mathcal{S}(\mathcal{H}) \ni S = B/A$ とする. 以下, d.d. = densely defined を意味する.

$$\begin{aligned}
S\text{が正値} &\overset{\text{def}}{\iff} (Sx,x)_\mathcal{H} \geq 0,\ x \in \mathrm{dom}(S) \\
&\iff A^*B = B^*A \geq 0 \\
S\text{が対称} &\overset{\text{def}}{\iff} (Sx,y)_\mathcal{H} = (x,Sy)_\mathcal{H},\ x,y \in \mathrm{dom}(S) \\
&\iff A^*B = B^*A \\
&\iff S \subseteq S^* \quad (\text{if } S \text{ is d.d.}) \\
\text{d.d.な}S\text{が自己共役} &\overset{\text{def}}{\iff} S = S^* \\
S\text{が弱対称} &\overset{\text{def}}{\iff} S \subseteq S^\times \\
&\iff B^*A = A^*B,\ B\mathcal{H} \subseteq \overline{A\mathcal{H}}
\end{aligned}$$

半閉作用素に限らないが, 作用素が正値ならば自動的に対称である. S が弱対称であることは, $(Sx,y)_\mathcal{H} = (x,Sy)_\mathcal{H}$, $x,y \in \mathrm{dom}(S)$ かつ $\mathrm{ran}(S) \subseteq \overline{\mathrm{dom}(S)}$ であることとも同値である.

3. 可閉作用素のテンソル積

稠密に定義されているとは限らない可閉作用素のテンソル積を定義していくのだが, まずは定義域が稠密な場合の定義を踏まえておく.

Definition 3.1 ([12] 稠密に定義された可閉作用素のテンソル積)**.** $S : \mathcal{H} \supseteq \mathrm{dom}(S) \to \mathcal{H},\ \ T : \mathcal{K} \supseteq \mathrm{dom}(T) \to \mathcal{K}$ を稠密に定義された可閉作用素とする. このとき, テンソル積 $S \otimes T$ を以下で定義する.

$$S \otimes T := \overline{S \odot T} \quad \text{(閉包)}$$

作用素 S, T の定義域が稠密のとき, 代数的テンソル積 $S \odot T$ が可閉となる理由は以下による. まず, 一般に

$$S \text{ が可閉} \iff \mathrm{dom}(S^*) \text{ が } \mathcal{H} \text{ で稠密}$$

が知られているので, 関係式 $(S \odot T)^* \supseteq S^* \odot T^*$ を合わせ考えると, 右辺の定義域が稠密であることがわかるので, 左辺の定義域も稠密となる. よって, $S \odot T$ も可閉である.
Question. 稠密に定義されていない可閉作用素 S, T のときは, テンソル積 $S \otimes T$ を定義できるのか？

そこで, Question に回答するために, 半閉作用素に対して q-テンソル積なるものを導入する. q-テンソル積は半閉性を保存するように定義している.

Definition 3.2 ([3] 半閉作用素の q-テンソル積)**.** *$S \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$, $T \in \mathcal{S}(\mathcal{K})$ に対して, $S \otimes_q T$ を以下で定義する.*

$$S \otimes_q T := (B \otimes D)/(A \otimes C) \in \mathcal{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$$

ただし, $S = B/A$, $T = D/C$.

核条件 $\ker(A \otimes C) \subseteq \ker(B \otimes D)$ が満たされることが確認でき, さらに $S \otimes_q T$ は, S と T の作用素商表現に依存しないことも確認されるため, well defined である. また, 代数的テンソル積とは以下の関連性がある.

$$S \odot T \subseteq S \otimes_q T, \quad S \in \mathcal{S}(\mathcal{H}), T \in \mathcal{S}(\mathcal{K})$$

Question の考察を行う. まず, 以下の２つの性質が知られている.
・$U \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ が可閉 $\iff \mathrm{dom}(U^\times)$ が稠密
・$(U \otimes_q V)^\times \supseteq U^\times \otimes_q V^\times$, $U \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$, $V \in \mathcal{S}(\mathcal{K})$
これらより, $U, V \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ が可閉ならば $\mathrm{dom}(U^\times)$, $\mathrm{dom}(V^\times)$ は稠密となることから, $\mathrm{dom}(U^\times \otimes_q V^\times)$ も稠密となる. よって, $\mathrm{dom}(U \otimes_q V)^\times$ も稠密となって, $U \otimes_q V \in \mathcal{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ は可閉となる. このことから, 作用素 S, T が可閉ならば明らかに $\overline{S} \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$, $\overline{T} \in \mathcal{S}(\mathcal{K})$ は可閉で, $\overline{S} \otimes_q \overline{T} \in \mathcal{S}(\mathcal{H} \times \mathcal{K})$ も可閉となり, 関係式 $S \odot T \subseteq \overline{S} \odot \overline{T} \subseteq \overline{S} \otimes_q \overline{T}$ から, $S \odot T$ は可閉であることがわかる. 従って, 次の定義を得る.

Definition 3.3 ([3] 可閉作用素のテンソル積)**.** *$S : \mathcal{H} \supseteq \mathrm{dom}(S) \to \mathcal{H}$, $T : \mathcal{K} \supseteq \mathrm{dom}(T) \to \mathcal{K}$ を定義域が稠密とは限らない可閉作用素とする. このとき, テンソル積 $S \otimes T$ を以下で定義する.*

$$S \otimes T := \overline{S \odot T}$$

S, T が可閉な半閉作用素ならば $S \odot T \subseteq S \otimes_q T \subseteq S \otimes T$ が成り立つ. 先に述べた関係式 $S \odot T \subseteq \overline{S} \odot \overline{T} \subseteq \overline{S} \otimes_q \overline{T}$ も合わせると, 次のような等式が得られることがわかる.

$$S \otimes T = \overline{S \odot T} = \overline{\overline{S} \odot \overline{T}} = \overline{S \otimes_q T} = \overline{\overline{S} \otimes_q \overline{T}}$$

4. Tensor Products and Extensions

正値対称作用素の正値自己共役拡張を考える際, 以下の順序が知られている. $S_i : \mathcal{H} \supseteq \mathrm{dom}(S_i) \to \mathcal{H}$ $(i = 1, 2)$ を正値自己共役とする.

$$S_1 \leq S_2 \overset{\text{def}}{\iff} \|S_1^{\frac{1}{2}} x\| \leq \|S_2^{\frac{1}{2}} x\|, \ x \in \mathrm{dom}(S_2^{\frac{1}{2}}) \subseteq \mathrm{dom}(S_1^{\frac{1}{2}})$$

正値自己共役作用素 S は作用素商 $W/(I - W)$ に一意的に表現できるため, この表現を用いて上の順序を特徴づけることもできる.

$$S_1 \leq S_2 \iff W_1 \leq W_2, \ S_1 = W_1/(I - W_1), \ S_2 = W_2/(I - W_2)$$

この順序において, 最小の正値自己共役拡張を von Neumann 拡張, 最大の正値自己共役拡張を Friedrichs 拡張と呼んでいる. 以下の定理は, 半閉な正値対称作用素で述べているが,（(iii) を除いて）単なる正値対称作用素で成り立つ.

Theorem 4.1 ([1], [13], [6])**.** *$\mathcal{S}(\mathcal{H}) \ni S = B/A$ を正値対称とする. 以下は同値である.*

(i) S *が正値自己共役作用素に拡張可能.*
(ii) S *は positively closable である：*

$$(Sx_n, x_n)_{\mathcal{H}} \to 0, \ Sx_n \to y \ \text{ならば} \ y = 0$$

(iii) $B/(B^*A)^{\frac{1}{2}}$ *は closable である.*
(iv) S *の von Neumann 拡張* $S_{\mathcal{N}}$ *が存在する.*

もし $\mathrm{dom}(S)$ が稠密ならば, 不等式 $|(Sx_n, z)_{\mathcal{H}}|^2 \leq (Sx_n, x_n)_{\mathcal{H}}(Sz, z)_{\mathcal{H}}$, $z \in \mathrm{dom}(S)$ を用いることで, (ii) を満たす（従って, (i), (iii), (iv) を満たす）ことがわかる. 実際, $(Sx_n, x_n)_{\mathcal{H}} \to 0$, $Sx_n \to y$ ならば $(y, z)_{\mathcal{H}} = 0$ が $z \in \mathrm{dom}(S)$ について成り立つので, $y = 0$ を得るからである. 従って, $\mathcal{S}(\mathcal{H}) \ni S$ が稠密に定義された正値対称ならば, von Neumann 拡張 $S_{\mathcal{N}}$ が存在することがわかるが, 実は Friedrichs 拡張 $S_{\mathcal{F}}$ も存在することが知られている. 以下の Theorem 4.2 においては, 半閉な正値対称作用素に対して記述されているが, 半閉でなくても単なる正値対称作用素でも成り立つ.

Theorem 4.2 ([6], [13], [11]). $\mathcal{S}(\mathcal{H}) \ni S = B/A$ を正値対称とする. 以下は同値である.

(i) $\mathrm{dom}(S)$ が稠密である

(ii) S の *Friedrichs* 拡張 $S_{\mathcal{F}}$ が存在する

さて, 目的の考察を行うのに, 先行研究の紹介をする.

Theorem 4.3 ([9]). $S : \mathcal{H} \supseteq \mathrm{dom}(S) \to \mathcal{H}$, $T : \mathcal{K} \supseteq \mathrm{dom}(T) \to \mathcal{K}$ を稠密に定義された閉な正値対称とする. このとき, 以下が成り立つ.

(i) $(S \otimes T)_{\mathcal{N}} = S_{\mathcal{N}} \otimes T_{\mathcal{N}}, \quad (S \otimes T)_{\mathcal{N}}^{\frac{1}{2}} = S_{\mathcal{N}}^{\frac{1}{2}} \otimes T_{\mathcal{N}}^{\frac{1}{2}}$

(ii) $(S \otimes T)_{\mathcal{F}} = S_{\mathcal{F}} \otimes T_{\mathcal{F}}, \quad (S \otimes T)_{\mathcal{F}}^{\frac{1}{2}} = S_{\mathcal{F}}^{\frac{1}{2}} \otimes T_{\mathcal{F}}^{\frac{1}{2}}$

我々は, von Neumann 拡張が存在する必要十分条件である positively closable 条件のもとで (i) の成立の可否を考察したい. 具体的には以下の条件を満たす正値対称作用素で考察する.

「positively closable・半閉・正値・弱対称 」

定義域が稠密なとき, 弱対称性は通常の意味の対称性と一致し, その対称性は正値性から得られるので, 定義域が稠密な場合は「正値・弱対称」は単に「正値」のことである. 次の定理が主結果である.

Theorem 4.4 ([3]). $S \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$, $T \in \mathcal{S}(\mathcal{K})$ とする.

(i) S, T ： 正値対称 $\Longrightarrow S \otimes_q T$: 正値対称

(ii) S, T ： 正値対称 かつ *positively closable*
$\Longrightarrow S \otimes_q T$：正値対称 かつ *positively closable*

(iii) S, T ： 弱対称 $\Longrightarrow S \otimes_q T$：弱対称

(iv) S, T ： 正値対称, *positively closable* かつ 弱対称

$$\Longrightarrow S \subseteq S_{\mathcal{N}} \subseteq S^{\times},\ T \subseteq T_{\mathcal{N}} \subseteq T^{\times},$$

$$S \otimes_q T \subseteq (S \otimes_q T)_{\mathcal{N}} \subseteq (S \otimes_q T)^{\times}$$

$$\Longrightarrow (S \otimes T)_{\mathcal{N}} = S_{\mathcal{N}} \otimes T_{\mathcal{N}},\ (S \otimes T)_{\mathcal{N}}^{\frac{1}{2}} = S_{\mathcal{N}}^{\frac{1}{2}} \otimes T_{\mathcal{N}}^{\frac{1}{2}}$$

補足説明をしておく. (iv) についてだが, 正値対称な $S \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ が稠密に定義されているときは, $S \subseteq S^*$ であり, その間に von Nuemann 拡張が入ってくる ($S \subseteq S_{\mathcal{N}} \subseteq S^*$). 別な言い方をすると, $S \subseteq S_{\mathcal{N}}$ の両辺の共役を取ることで $S \subseteq S_{\mathcal{N}} \subseteq S^*$ が得られる. ところが, 一般に, $U, V \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ が稠密に定義されていないときは, $U \subseteq V$ の両辺の弱共役を取っても $V^{\times} \subseteq U^{\times}$ とは限らない. つまり, 正値対称で positively closable な S に

ついて, $S \subseteq S_{\mathcal{N}}$ から $S_{\mathcal{N}} \subseteq S^{\times}$ が成り立つとは限らない. そこで, S に弱対称性 $S \subseteq S^{\times}$ も付しておくと, その間に von Nuemann 拡張が入ってくる ($S \subseteq S_{\mathcal{N}} \subseteq S^{\times}$). また, (i) から (iii) までと (iv) の途中の式までは, q-テンソル積で書かれているが, q-テンソル積の閉包を取れば (閉包が存在すれば), テンソル積となることに注意をしておく. 以下, (i), (ii) の証明[2]を述べる.

(i) : $S = B/A$, $T = D/C$ を正値対称とする. つまり, $A^*B = B^*A \geq 0$ および $C^*D = D^*C \geq 0$. すると,

$$\begin{aligned}(A \otimes C)^*(B \otimes D) &= A^*B \otimes C^*D \ (\geq 0) \\ &= B^*A \otimes D^*C \\ &= (B \otimes D)^*(A \otimes C)\end{aligned}$$

これは $S \otimes_q T = (B \otimes D)/(A \otimes C)$ が正値対称であることを意味する.

(ii) : $S = B/A$, $T = D/C$ を正値対称で positively closable とする. Theorem 4.1 によって, $S = B/A$ が positively closable $\Longleftrightarrow$ $B/(B^*A)^{\frac{1}{2}}$ が可閉である. さらに, $T = D/C$ が positively closable $\Longleftrightarrow$ $D/(D^*C)^{\frac{1}{2}}$ が可閉である, ことに注意する. すると, 可閉な半閉作用素の q-テンソル積は可閉な半閉作用素であることから, 以下のように $S \otimes_q T$ が positively closable であることがわかる.

$$\begin{aligned}&B/(B^*A)^{\frac{1}{2}} \otimes_q D/(D^*C)^{\frac{1}{2}} \text{ が可閉である} \\ \Longleftrightarrow\ &(B \otimes D)/\{(B^*A)^{\frac{1}{2}} \otimes (D^*C)^{\frac{1}{2}}\} \text{ が可閉である} \\ \Longleftrightarrow\ &(B \otimes D)/\{(B \otimes D)^*(A \otimes C)\}^{\frac{1}{2}} \text{ が可閉である} \\ \Longleftrightarrow\ &(B \otimes D)/(A \otimes C) \ \text{ が positively closable である} \\ \Longleftrightarrow\ &S \otimes_q T \ \text{ が positively closable である}\end{aligned}$$

最後に, Friedrichs 拡張についての結果も得られているので, 紹介だけして筆を置くこととする.

Theorem 4.5 ([3])**.** *$S \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$, $T \in \mathcal{S}(\mathcal{K})$ とする. S, T が稠密に定義された正値対称ならば以下が成り立つ.*

$$(S \otimes T)_{\mathcal{F}} = S_{\mathcal{F}} \otimes T_{\mathcal{F}}, \quad (S \otimes T)_{\mathcal{F}}^{\frac{1}{2}} = S_{\mathcal{F}}^{\frac{1}{2}} \otimes T_{\mathcal{F}}^{\frac{1}{2}}$$

[2]投稿中のため, (iii), (iv) の証明は省略する

References

[1] T.Ando and K.Nishio, *Positive self-adjoint extensions of positive symmetric operators*, Tôhoku Math. J., 22 (1970), 65–75.

[2] G.Hirasawa, *Extremal positive selfadjoint extensions of a positive symmetric quotient*, Acta Sci. Math. (Szeged) 65 (1999), 203–216.

[3] G.Hirasawa, *Tensor products of semiclosed operators and applications*, submitted.

[4] S.Izumino, *Quotients of bounded operators*, Proc. Amer. Math. Soc. vol.106 (1989), 427–435.

[5] S.Izumino, *Quotients of bounded operators and their weak adjoints*, J. Operator Theory vol.29 (1993), 83–96.

[6] S.Izumino and G.Hirasawa, *Positive symmetric quotients and their selfadjoint extensions*, Proc. Amer. Math. Soc. vol.129 (2001), 2987–2995.

[7] W. E. Kaufman, *Representing a closed operator as a quotient of continuous operators*, Proc. Amer. Math. Soc., 72 (1978), 531–534.

[8] W. E. Kaufman, *Semiclosed operators in Hilbert space*, Proc. Amer. Math. Soc., 76 (1979), 67–73.

[9] M.M.Nafalska, *Extremal extensions of nonnegative operators with applications*, Doctoral thesis, Technische Universtát Berlin, 2008.

[10] V.Prokaj and Z.Sebestyén, *On extremal positive operator extensions*, Acta Sci. Math. (Szeged) 62 (1997), 485–491.

[11] F.Riesz and B.Sz.-Nagy, *Functional Analysis*, Translated by Leo F. Boron, Frederick Ungar Publishing Co., New York, 1955.

[12] K.Schmüdgen, *Unbounded Self-adjoint Operators on Hilbert space*, Springer.

[13] Z.Sebestyén and E.Sikolya, *On Krein-von Neumann and Friedrichs extensions*, Acta Sci. Math. (Szeged) 69 (2003), 323–336.

Go Hirasawa

Graduate School of Sci. and Eng.

Ibaraki University

Nakanarusawa 4-12-1

Hitachi 316-8511 JAPAN

E-mail address: gou.hirasawa.529@vc.ibaraki.ac.jp