ℓ^p-ノルムが定義された連続関数空間からなる直積空間に関するTingley問題について

鶴岡工業高等専門学校
廣田　大輔 *1

概要

Tingley 問題とは 2 つの Banach 空間の単位球面上で定義された全射等距離写像は空間全体で定義された全射実線形等距離写像に拡張できるかを問う問題である．この問題は 1987 年に D. Tingley によって提唱された問題であり，現在まで様々な Banach 空間の場合では肯定的に解決されてきたが未だ一般の Banach 空間の場合では未解決のままである．今回の講演ではまだ解決されていない連続関数空間からなる直積空間で ℓ^p-ノルムが定義された Banach 空間に関する Tingley 問題について，研究の進捗状況について報告させていただく．

1　導入

本報告書では $(B_i, \|\cdot\|_i)$ を複素数体 $\mathbb{C}$ をスカラー体に持つ Banach 空間とする $(i = 1, 2)$．また，$\mathbb{T}$ を絶対値 1 の複素数全体からなる複素数体 $\mathbb{C}$ の部分集合とする．Banach 空間とは線型空間に完備なノルムが定義された空間であり，線形演算からなる代数構造やノルムから定義される距離構造をはじめ様々な数学的構造を持つ．2 つの Banach 空間 B_1 と B_2 の間で定義された写像 $T : B_1 \to B_2$ が以下の条件を満たすとき，写像 T は等距離写像であるという：

$$\|T(x) - T(y)\|_2 = \|x - y\|_1 \qquad (x, y \in B_1).$$

定義から等距離写像は 2 つの Banach 空間の距離構造を保存する写像であるといえる．Banach 空間上で定義された全射等距離写像に関する研究は古くから行われており，現在でも活発に研究されている．全射等距離写像に関する研究で最も重要な結果の 1 つとして Mazur–Ulam [2, Theorem1.3.5] の定理がある．この定理は 2 つの Banach 空間 B_1 と B_2 の間で定義された写像 $T : B_1 \to B_2$ が $T(0) = 0$ である全射等距離写像であるとき，自動的に実線形になるを主張している．これは Banach 空間の距離構造が保存されることで自動的に代数構造も一部保存されることを表している．他にも具体的な Banach 空間の場合，距離構造が保存されることで他の数学的構造も自動的に保存されることが知られている．X をコンパクト Hausdorff 空間とし，$C(X)$ を X 上で定義された複素数値連続関数からなる線形空間とする．任意の元 $f \in C(X)$ に対してそのノルムを

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)| \qquad (f \in C(X))$$

と定義することで，$(C(X), \|\cdot\|_\infty)$ は Banach 空間になる．2 つの連続関数空間 $C(X_1)$ と $C(X_2)$ の間で定義された全射等距離写像に関する定理で以下の Banach–Stone の定理 [1, VI Theorem 2.1] が知られている．

*1 〒 997-8511 山形県鶴岡市井岡字沢田 104　E-mail: dhirota@tsuruoka-nct.ac.jp

定理 1 (Banach–Stone の定理)
写像 $T : C(X_1) \to C(X_2)$ が全射複素線形等距離写像であるとき，連続関数 $\alpha : X_2 \to \mathbb{T}$ と同相写像 $\phi : X_2 \to X_1$ が存在し，写像 T は以下の形で表される：

$$T(f)(y) = \alpha(y)f(\phi(y)) \qquad (f \in C(X_1), y \in X_2). \tag{1}$$

特に写像 $T : C(X_1) \to C(X_2)$ が (1) の形であるとき，写像 T は荷重合成作用素と呼ばれる．Mazur–Ulam の定理により $T(0) = 0$ である全射等距離写像は自動的に実線形であることがわかる．一方で，Banach–Stone の定理では実線形よりも強い条件である複素線形を仮定している．ではその仮定である複素線形を外した場合どのような結果になるだろうか．この問いに対しては，新潟大学の三浦先生の結果 [4] を使うことで全射等距離写像 $T : C(X_1) \to C(X_2)$ の形を決定することができる．

定理 2 (Banach–Stone の定理 (実線形版))
写像 $T : C(X_1) \to C(X_2)$ が全射等距離写像であるとき，連続関数 $\alpha : X_2 \to \mathbb{T}$ と同相写像 $\phi : X_2 \to X_1$，開かつ閉部分集合 $K \subset X_2$ が存在し，写像 T は以下の形で表される：

$$T(f)(y) - T(0)(y) = \begin{cases} \alpha(y)f(\phi(y)) & (f \in C(X_1),\, y \in K) \\ \alpha(y)\overline{f(\phi(y))} & (f \in C(X_1),\, y \in X_2 \setminus K). \end{cases}$$

この定理の注目すべき点は全射等距離写像 $T : C(X_1) \to C(X_2)$ から同相写像 $\tau : X_2 \to X_1$ が誘導されている点である．これは連続関数空間の距離構造が保存されることで関数が定義されている位相空間の位相構造も自動的に保存されることを表しており，連続関数空間の距離構造は代数構造や位相構造などその他の数学的構造を決定したり，強い影響を及ぼしていると考えられる．現在でも様々な Banach 空間上の全射等距離写像が研究されており，同様な結果が得られることが知られている．参考文献として例えば [2] が挙げられる．

2　距離構造の本質的な情報

近年では Banach 空間の距離構造の本質的な情報はどこに存在しているのかを明らかにする研究も注目されている．1987 年に D. Tingley [5] は以下の問題を提唱した：

問題 1 (D. Tingley)
$(B_i, \|\cdot\|_i)$ を Banach 空間，$S_{B_i} = \{x \in B_i \mid \|x\|_i = 1\}$ とする $(i = 1, 2)$．写像 $\Delta : S_{B_1} \to S_{B_2}$ が全射等距離写像であるとき，全射実線形等距離写像 $T : B_1 \to B_2$ で S_{B_1} への制限 $T_{|S_{B_1}}$ が $T_{|S_{B_1}} = \Delta$ となるものは存在するか？

現在この問題は Tingley 問題と呼ばれており，Banach 空間 B の距離構造は B の単位球面 S_B に存在し，その距離構造が一致していれば全体の距離構造も一致することを主張している．これまで多くの具体的な Banach 空間の場合については肯定的に解決されてきたが，一般的な場合については未だ解決されていない．Ω を局所コンパクト Hausdorff 空間とし，$C_0(\Omega)$ を無限遠点で 0 に収束する Ω 上の複素数値連続関数からなる線型空間とする．任意の元 $f \in C_0(\Omega)$ に対してその sup ノルムを $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$ と定義することで，$(C_0(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ は Banach 空間になる．1994 年に R. Wang が [6] で Banach 空間 $C_0(\Omega)$ に関する Tingley 問題を肯定的に解決した．

定理 3
Ω_i を局所コンパクト Hausdorff 空間とし，$C_0(\Omega_i)$ を sup ノルムが定義された無限遠点で 0 に収束する Ω_i 上の連続関数からなる Banach 空間とする $(i = 1, 2)$．写像 $\Delta : S_{C_0(\Omega_1)} \to S_{C_0(\Omega_2)}$ が全射等距離写像である

とき，連続写像 $\alpha:\Omega_2\to\mathbb{T}$ と同相写像 $\tau:\Omega_2\to\Omega_1$，開かつ閉部分集合 $K\subset\Omega_2$ が存在して写像 Δ は以下の形で表される：

$$\Delta(f)(y)=\begin{cases}\alpha(y)f(\tau(y)) & (f\in S_{C_0(\Omega_1)},\, y\in K)\\ \alpha(y)\overline{f(\tau(y))} & (f\in S_{C_0(\Omega_1)},\, y\in\Omega_2\setminus K).\end{cases}\tag{2}$$

この結果の注目すべき点は単位球面上の全射等距離写像 $\Delta:S_{C_0(\Omega_1)}\to S_{C_0(\Omega_2)}$ が荷重合成作用素と同様な形をしていることに加えて，全射等距離写像 Δ から同相写像 $\tau:\Omega_2\to\Omega_1$ が誘導されている点である．このことは連続関数空間 $C_0(\Omega)$ では，単位球面の距離構造が一致することで関数が定義されている位相空間の構造も自動的に保存されることを表している．また，複数の連続関数空間からなる直積空間に関する Tingley 問題も研究されている．Λ を空でない集合とし，$\prod_{\lambda\in\Lambda}C_0(\Omega_\lambda)=\{\boldsymbol{f}:\Lambda\to\bigcup_{\lambda\in\Lambda}C_0(\Omega_\lambda)\,|\,\boldsymbol{f}(\lambda)\in C_0(\Omega_\lambda)\quad(\lambda\in\Lambda)\}$ とする．Λ の空でない有限部分集合全体を $\mathcal{F}(\Lambda)$ とし，

$$\ell^1_\Lambda(C_0(\Omega_\lambda))=\left\{\boldsymbol{f}\in\prod_{\lambda\in\Lambda}C_0(\Omega_\lambda)\mid\sup_{F\in\mathcal{F}(\Lambda)}\sum_{\lambda\in F}\|\boldsymbol{f}(\lambda)\|_\infty<\infty\right\}$$

とする．任意の元 $\boldsymbol{f}\in\ell^1_\Lambda(C_0(\Omega_\lambda))$ に対して ℓ^1-ノルムを $\|\boldsymbol{f}\|_1=\sup_{F\in\mathcal{F}(\Lambda)}\sum_{\lambda\in F}\|\boldsymbol{f}(\lambda)\|_\infty$ と定義することで $(\ell^1_\Lambda(C_0(\Omega_\lambda)),\|\cdot\|_1)$ は Banach 空間になる．以下表記を簡単にするために $\boldsymbol{f}\in\ell^1_\Lambda(C_0(\Omega_\lambda))$ と $\lambda\in\Lambda$ に対して，$\boldsymbol{f}(\lambda)=\boldsymbol{f}_\lambda$ とする．1995 年の Wang と Orihara の結果 [7] もしくは [3] から $(\ell^1_\Lambda(C_0(\Omega_\lambda)),\|\cdot\|_1)$ に関する Tingley 問題は肯定的に解決でき，以下の結果を得ることができる．

定理 4
$A_M=\ell^1_M(C_0(\Omega_\mu))$ と $A_N=\ell^1_N(C_0(\Omega_\nu))$ をノルム $\|\cdot\|_1$ が定義された Banach 空間とする．写像 $\Delta:S_{A_M}\to S_{A_N}$ が全射等距離写像であるとき，全単射 $\tau:M\to N$ と任意の元 $\mu\in M$ に対して連続写像 $\alpha_{\tau(\mu)}:\Omega_{\tau(\mu)}\to\mathbb{T}$ と同相写像 $\phi_{\tau(\mu)}:\Omega_{\tau(\mu)}\to\Omega_{\tau(\mu)}$，開かつ閉部分集合 $K_{\tau(\mu)}\subset\Omega_{\tau(\mu)}$ が存在し，

$$\Delta(\boldsymbol{f})_{\tau(\mu)}(\phi_{\tau(\mu)}(y))=\begin{cases}\alpha_{\tau(\mu)}(y)\boldsymbol{f}_\mu(\phi_{\tau(\mu)}(y)) & (y\in K_{\tau(\mu)})\\ \alpha_{\tau(\mu)}(y)\overline{\boldsymbol{f}_\mu(\phi_{\tau(\mu)}(y))} & (y\in\Omega_{\tau(\mu)}\setminus K_{\tau(\mu)})\end{cases}$$

が任意の $\boldsymbol{f}\in A_M$ に対して成り立つ．

この結果により連続関数空間からなる直積空間で ℓ^1-ノルムが定義された Banach 空間の距離構造が保存されることで，全射等距離写像 Δ はそれぞれの座標ごとの全射等距離写像になっており，荷重合成作用素の形をしていることがわかった．特に興味深い点は単位球面上で定義された全射等距離写像からそれぞれ対応している 2 つの連続関数空間の位相構造を保存する同相写像が誘導されている点である．これは単位球面の距離構造が保存されることでそれぞれ対応している 2 つの連続関数空間の位相構造も保存されることを示しており，Banach 空間の単位球面の距離構造には他の数学的構造を決定する重要な情報を含んでいることを示唆していると著者は考えている．また，[3] では連続関数空間のある部分空間である extremely C-regular subspace からなる直積空間の場合でも同様な結果が得られることを明らかにした．

3　現在取り組んでいる問題

連続関数空間からなる直積空間に ℓ^1-ノルムを定義した Banach 空間の場合，単位球面の距離構造が一致することでその他の数学的構造も保存されていることがわかった．では今度は p を $1<p<2,\,2<p<\infty$ を

満たす実数とした ℓ^p-ノルムを定義した場合にも同様な結果が得られるのか明らかにするために次の Banach 空間を考え，その Tingley 問題に着手することにした．Λ を空でない集合とし，

$$\ell^p_\Lambda(C_0(\Omega_\lambda)) = \left\{ \boldsymbol{f} \in \prod_{\lambda\in\Lambda} C_0(\Omega_\lambda) \mid \sup_{F\in\mathcal{F}(\Lambda)} \sum_{\lambda\in F} \|\boldsymbol{f}(\lambda)\|^p_\infty < \infty \right\}$$

とする．任意の元 $\boldsymbol{f} \in \ell^p_\Lambda(C_0(\Omega_\lambda))$ に対して ℓ^p-ノルムを

$$\|\boldsymbol{f}\|_p = \sup_{F\in\mathcal{F}(\Lambda)} \left(\sum_{\lambda\in F} \|\boldsymbol{f}(\lambda)\|^p_\infty \right)^{\frac{1}{p}}$$

と定義する．このとき，$(\ell^p_\Lambda(C_0(\Omega_\lambda)), \|\cdot\|_p)$ は Banach 空間になる．Wang と Orihara は [7] にて連続関数空間からなる直積空間に ℓ^p-ノルムが定義された Banach 空間に関する未解決問題を提唱した．著者はこの未解決問題の特別な場合である以下の問題について現在取り組んでいる．

問題 2 (Wang, Orihara)
M, N を空でない集合とし，$A^p_M = \ell^p_M(C_0(\Omega_\mu))$ と $A^p_N = \ell^p_N(C_0(\Omega_\nu))$ をノルム $\|\cdot\|_p$ が定義された Banach 空間とする．写像 $\Delta : S_{A^p_M} \to S_{A^p_N}$ が全射等距離写像であるとき，全射実線形等距離写像 $T : A^p_M \to A^p_N$ で $T_{|S_{A^p_M}} = \Delta$ を満たすものは存在するか？

今回の研究集会では次の結果まで明らかにすることができた．それを説明する前にいくつか記号を準備する．

定義 5
任意の $\boldsymbol{f} \in \ell^p_\Lambda(C_0(\Omega_\lambda))$ に対して，Λ の部分集合 $\mathrm{supp}(\boldsymbol{f})$ を

$$\mathrm{supp}(\boldsymbol{f}) = \{\lambda \in \Lambda \mid \boldsymbol{f}_\lambda \neq 0\}$$

と定める．

命題 6
写像 $\Delta : A^p_M \to A^p_N$ が全射等距離写像であるとき，任意の $\boldsymbol{f} \in A^p_M$ に対して，

$$\#(\mathrm{supp}(\Delta(\boldsymbol{f}))) = \#(\mathrm{supp}(\boldsymbol{f}))$$

が成り立つ．ただし，$\#(\mathrm{supp}(\Delta(\boldsymbol{f})))$ と $\#(\mathrm{supp}(\boldsymbol{f}))$ はそれぞれ $\mathrm{supp}(\Delta(\boldsymbol{f}))$ と $\mathrm{supp}(\boldsymbol{f})$ の濃度を表す．

この結果は任意の元 $\boldsymbol{f} \in A^p_M$ の台 (support) の濃度は全射等距離写像 $\Delta : A^p_M \to A^p_N$ により保存されることを表している．ここからどのように全射等距離写像の情報を抜き出すことができるのか現在模索中である．

謝　辞

This work was supported by JSPS KAKENHI Grant Number JP24K22845 and the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.

参 考 文 献

[1] J.B. Conway, A Course in Functional Analysis. Graduate Texts in Mathematics, vol. 96, 2nd edn. Springer, New York (1990).

[2] R.J. Fleming, J.E. Jamison, Isometries on Banach spaces: Function spaces. Chapman & Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. 129. Boca Raton, FL: Chapman and Hall/CRC. ix, 197 p. (2003).

[3] D. Hirota, *Tingley's problem for the direct sum of uniformly closed extremely C-regular subspaces with the ℓ^1-sum norm.* Adv. Oper. Theory 10, 38 (2025), https://doi.org/10.1007/s43036-025-00427-z.

[4] T. Miura, *Real-linear isometries between function algebras.* Cent. Eur. J. Math. 9, No. 4, 778–788 (2011).

[5] D. Tingley, *Isometries of the unit sphere.* Geom. Dedicata 22, No. 3, 371–378 (1987).

[6] R. Wang, *Isometries between the unit spheres of $C_0(\Omega)$ type spaces.* Acta Math. Sci. 14, No. 1, 82–89 (1994).

[7] R. Wang, A. Orihara, *Isometries on the ℓ^1-sum of $C_0(\Omega, E)$ type spaces.* J. Math. Sci., Tokyo **2**(1), 131–154 (1995).