単位的 C^* 環の positive definite cone 上の sequential product に関して不変な測度の構成について

新潟大学・理学部　大井　志穂
Shiho Oi
Department of Mathematics, Faculty of Science,
Niigata University

1. 導入

単位的 C^* 環 A に対して，A_{-1}^+ を A の正かつ可逆な元全体の集合とする。[1, 2] において Corach, Porta, Lecht により，A_{-1}^+ の微分幾何構造が研究されている。本稿において必要となる事実だけを下に紹介することにする。詳細については [1, 2] を参照されてほしい。$G(A)$ を A の可逆元全体からなる群とすると，群 $G(A)$ は，$L_g a = (g^*)^{-1} a g^{-1}$ $(g \in G(A), a \in A_{-1}^+)$ により A_{-1}^+ に作用している。A_{-1}^+ の接空間 $(TA_{-1}^+)_a$ $(a \in A_{-1}^+)$ は A の自己共役元全体とみなせるので，任意の $x \in (TA_{-1}^+)_a$ に対して，フィンスラー距離を $\|x\|_a = \|a^{-\frac{1}{2}} x a^{-\frac{1}{2}}\|$ で定めることが出来る。すると，任意の $a, b \in A_{-1}^+$ に対して，2 点の最短距離（以後，Thompson 距離と呼ぶ）は，$d(a,b) = \|\log(a^{-\frac{1}{2}} b a^{-\frac{1}{2}})\|$ で与えられる。さらに，$G(A) \curvearrowright A_{-1}^+$ は，このフィンスラー距離に対して，等距離な作用である。つまり，任意の $x \in (TA_{-1}^+)_a$ に対して，$\|L_g x\|_{L_g a} = \|x\|_a$ が成り立つ。よって，任意の $a, b \in A_{-1}^+$ の Thompson 距離も，作用 $G(A) \curvearrowright A_{-1}^+$ に関して不変である。すなわち

$$d(L_g a, L_g b) = d(a,b), \quad g \in G(A)$$

が成り立つ。
単位的 C^* 環 A の positive definite cone A_{-1}^+ に関する研究において，二つの C^* 環の positive definite cone の間の写像に着目した研究はこれまで多く行われてきた。なかでも，A_{-1}^+ の間の写像が，もとの単位的 C^* 環 A に拡張されることが示されている場合もある。例えば，次の定理はその代表的な例である。

Theorem 1.1 ([3]). *A, B* を単位的 C^* 環とする。全射写像 $T : A_{-1}^+ \to B_{-1}^+$ が *Thompson* 距離に関して等距離であったとする。このとき，*central projection* $p \in B$ と *Jordan* $*$-*isomorphism* $J : A \to B$ が存在して，

$$T(a) = T(1)^{\frac{1}{2}}(pJ(a) + (1-p)J(a^{-1}))T(1)^{\frac{1}{2}}, \quad a \in A_{-1}^+$$

が成り立つ。

単位的 C^* 環 A, B の間の作用素ノルムに関する全射等距離写像は，A_{-1}^+ と B_{-1}^+ の間の Thompson 距離に関する全射等距離写像を誘導することがよく知られている。よって，単

位的 C^* 環の距離構造に関しては，単位的 C^* 環全体における作用素ノルムから定まる距離と，positive definite cone における Thompson 距離は互いに同値であるとも言える。

一方，A_{-1}^+ の上の代数構造が，もとの単位的 C^* 環 A の代数構造を誘導するかということについては，まだ分かっていないことも多い。とりわけ，次の問題は一般の C^* 環に対しては未解決だと思われる。

Problem 1.2. *A, B を単位的 C^* 環とする。全射写像 $T : A_{-1}^+ \to B_{-1}^+$ が*

$$T(aba) = T(a)T(b)T(a), \quad a, b \in A_{-1}^+$$

をみたすとする。このとき，T は単位的 C^* 環全体上の Jordan triple isomorphism に拡張できるか?

Definition 1.3. 任意の $a, b \in A_{-1}^+$ に対して，$a \circ b = a^{\frac{1}{2}} b a^{\frac{1}{2}}$ で A_{-1}^+ 上の演算を定める。この演算を *sequential product* と呼ぶ。

Theorem 1.4 ([4])**.** *A を単位的 C^* 環とする。A_{-1}^+ は sequential product に関して，K-loop である。*

ここで，sequential product は可換ではなく，結合法則も一般には満たしていない。一方，次が成り立つ。$a, b \in A_{-1}^+$ に対して，あるユニタリー $u \in G(A)$ が存在して，

- $L_u(b \circ a) = a \circ b$
- 任意の $c \in A_{-1}^+$ に対して，$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ L_u(c)$

ただし，$u = (a^{\frac{1}{2}} b a^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}$ で与えられることが知られている。
最初に述べたような positive definite cone の微分幾何学的構造などを考慮すると，sequential product がもつ構造は，何かしらの良い性質があるのではないかと期待できる。そこで，positive definite cone 上の sequential product に関して平行移動不変になるような測度の構成が出来れば，positive definite cone の双対空間にあたるような空間が構成でき，positive definite cone 上の sequential product をはじめとする代数構造の理解が進むのではないかというのが本研究のモチベーションである。次節において，分かったことを紹介する。

2. positive definite cone 上の測度

以下では，自然数 n に対して，$A = M_n(\mathbb{C})$ とする。このとき，A_{-1}^+ は Thompson 距離で，局所コンパクト距離空間となることを注意しておく。局所コンパクトハウスドルフ空間 X に対して，コンパクト台をもつ X 上の複素数値連続関数全体を $C_c(X)$, そのうちの非負の実数値に値をとる関数の全体を $C_c^+(X)$ と書くことにする。

Lemma 2.1. 任意の $\varphi \in C_c^+(A_{-1}^+) \setminus \{0\}$, $f \in C_c^+(A_{-1}^+)$ に対して，$c_j > 0$, $s_j \in A_{-1}^+$, $u_j \in A$ (ユニタリー) が有限個 $(j = 1, \cdots, m)$ が存在し，

$$f(x) \leq \Sigma_{j=1}^m c_j \varphi(s_j \circ L_{u_j} x), \quad x \in A_{-1}^+$$

が成り立つ。

次の補題は一意性 (Theorem 2.4) を証明するときに必要である。

Lemma 2.2. $f \in C_c^+(A_{-1}^+) \setminus \{0\}$, $\epsilon > 0$ を任意にとって固定する。このとき次をみたすような 1 の開近傍 U が存在する。
$\varphi \in C_c^+(A_{-1}^+) \setminus \{0\}$ に対して，$\operatorname{supp} \varphi \subset U$ ならば，$t_j \in A_{-1}^+$ と $c_j > 0$ が有限個 $(j = 1, \cdots, m)$ が存在し，

$$|f(x) - \Sigma_{j=1}^m c_j \varphi(x \circ t_j)| < \epsilon, \quad x \in A_{-1}^+$$

が成り立つ。

ここで，上で述べたように sequential product は可換ではない。とくに，$x \circ t = t \circ L_u(x)$ となるようなユニタリー $u \in A$ が存在するかどうか，一般には分からない。そこで任意の $a, b \in A_{-1}^+$ に対して，ユニタリー元 $u \in A$ が存在して，$uau^* = b$ をみたすとき，同値関係 $a \sim b$ を定める。そのようにすると，任意の $x, t \in A_{-1}^+$ に対して，あるユニタリー $u \in A$ が存在して $x \circ t = L_u(t \circ x) = u(t \circ x)u^*$ となるので，

$$x \circ t \sim t \circ x$$

が成り立つ。また，A_{-1}^+ 上の Thompson 距離は作用 $G(A) \curvearrowright A_{-1}^+$ に関して不変であるので，この同値関係を用いて作られる商空間 $A_{-1}^+/\sim$ と上の二つの補題を適用すると，次の定理が証明できる。

Theorem 2.3. 次を満たす関数 $I : C_c^+(A_{-1}^+) \to \mathbb{R}$ が存在する。

(1) $I(f) \geq 0$ であり，$f \neq 0$ ならば $I(f) > 0$
(2) $I(f + g) = I(f) + I(g)$
(3) $I(\lambda f) = \lambda I(f)$, ただし $\lambda \geq 0$
(4) $I({}_a f) = I(f)$, ただし ${}_a f(x) = f(a \circ x)$, $a \in A_{-1}^+$

Theorem 2.4. 関数 $J : C_c^+(A_{-1}^+) \to \mathbb{R}$ が *Theorem 2.3* の条件 (1) ∼ (4) を満たしているならば，$c > 0$ が存在して，$J = cI$ が成立する。

一方，商空間 $A_{-1}^+/\sim$ を議論に用いたので，例えば，ユニタリー $u \in A$ に対して，$I(f) = I(f \circ L_u)$ が任意の $f \in C_c(A_{-1}^+)$ に対して，成り立ってしまう。ここが大きな問題点である。一方で，任意の $a \in A_{-1}^+$ に対して，ユニタリー群 $\{u \in G(A) \mid (u^{-1})^* a u^{-1} = a\}$ を U^a と定めると，$A_{-1}^+ = G(A)/U^a$ とみなせる。そのように考えると，ユニタリー群の商空間を考えることはなにかしらの意味があるのかもしれない。これらについては今後の研究課題としたい。

References

[1] G. Corach, H. A. Porta and L. A. Recht, Geodesics and operator means in the space of positive operators, Internat. J. Math. **4** (1993), no. 2, 193–202.

[2] G. Corach, H. A. Porta and L. A. Recht, Convexity of the geodesic distance on spaces of positive operators, Illinois J. Math. **38** (1994), no. 1, 87–94.

[3] O. Hatori and L. Molnár, Isometries of the unitary groups and Thompson isometries of the spaces of invertible positive elements in C^*-algebras, J. Math. Anal. Appl. **409** (2014), no. 1, 158–167.

[4] R. Beneduci and L. Molnár, On the standard K-loop structure of positive invertible elements in a C^*-algebra, J. Math. Anal. Appl. **420** (2014), no. 1, 551–562.