メビウスジャイロベクトル空間と写像に関する最近の結果について

新潟大学・自然科学系　渡邉　恵一

Keiichi Watanabe,
Institute of Science and Technology,
Niigata University

This work was supported by JSPS KAKENHI Grant Number JP21K03288. This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.

Introduction

これはおもに [6] の結果のアナウンスである。ヒルベルト空間の任意の元が完全正規直交系に関して直交展開されることや，2 元の直交展開の係数でそれら 2 元の差のノルムを表せることは関数解析における最も基礎的な事項のひとつである。

実ヒルベルト空間の開球がなす Möbius gyrovector space の任意の元が完全正規直交系に関して直交ジャイロ展開されること，その具体的な手続きが知られている（[5] を参照)。ここでは，2 元の直交ジャイロ展開の係数でそれら 2 元の Möbius の差のノルムを表すことについて述べる。

2 つの元の直交ジャイロ展開の係数で Möbius の差のノルムを表す問題

Gyrogroup や一般の real inner product gyrovector space の定義などについては Ungar[4] を参照していただきたい。Möbius gyrovector space とその最小限の事項を思い出そう。$\mathbb{V}$ を実内積空間とし，原点を中心とする半径 s の開球 $\{\boldsymbol{a} \in \mathbb{V} : \|\boldsymbol{a}\| < s\}$ を $\mathbb{V}_s$ と表す。

定義. [4, Definition 3.40, Definition 6.83] Möbius の和 $\oplus_{\mathrm{M}}$ と Möbius のスカラー倍 $\otimes_{\mathrm{M}}$

は

$$\boldsymbol{a} \oplus_{\mathrm{M}} \boldsymbol{b} = \frac{\left(1 + \frac{2}{s^2}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + \frac{1}{s^2}||\boldsymbol{b}||^2\right)\boldsymbol{a} + \left(1 - \frac{1}{s^2}||\boldsymbol{a}||^2\right)\boldsymbol{b}}{1 + \frac{2}{s^2}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + \frac{1}{s^4}||\boldsymbol{a}||^2||\boldsymbol{b}||^2}$$

$$r \otimes_{\mathrm{M}} \boldsymbol{a} = s\tanh\left(r\tanh^{-1}\frac{||\boldsymbol{a}||}{s}\right)\frac{\boldsymbol{a}}{||\boldsymbol{a}||} \quad (\text{if } \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}), \qquad r \otimes_{\mathrm{M}} \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$$

によって，任意の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{V}_s, r \in \mathbb{R}$ に対して定義される。

同じ記号を用いるが，（上記とは別の）和 $\oplus_{\mathrm{M}}$ とスカラー倍 $\otimes_{\mathrm{M}}$ が

$$a \oplus_{\mathrm{M}} b = \frac{a+b}{1 + \frac{1}{s^2}ab}$$

$$r \otimes_{\mathrm{M}} a = s\tanh\left(r\tanh^{-1}\frac{a}{s}\right)$$

によって，任意の $a, b \in (-s, s), r \in \mathbb{R}$ に対して定義される。$\mathbb{V} = \mathbb{R}$ の場合，これらとベクトルに対するものは一致する。

$\oplus_{\mathrm{M}}, \otimes_{\mathrm{M}}$ をそれぞれ $\oplus_s, \otimes_s$ と書く。

$\dim \mathbb{V} \geq 2$ ならば，Möbius の演算は一般に可換でも結合的でも分配的でもない：

$$\boldsymbol{a} \oplus_s \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{b} \oplus_s \boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{a} \oplus_s (\boldsymbol{b} \oplus_s \boldsymbol{c}) \neq (\boldsymbol{a} \oplus_s \boldsymbol{b}) \oplus_s \boldsymbol{c}$$

$$r \otimes_s (\boldsymbol{a} \oplus_s \boldsymbol{b}) \neq (r \otimes_s \boldsymbol{a}) \oplus_s (r \otimes_s \boldsymbol{b})$$

$$t(\boldsymbol{a} \oplus_s \boldsymbol{b}) \neq (t\boldsymbol{a}) \oplus_s (t\boldsymbol{b})$$

$$(\boldsymbol{a} \oplus_s \boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} \neq (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}) \oplus_{s^2} (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$$

次の命題は，線型解析の結果がジャイロ線型解析の対応物から復元され得ることを示唆している。

命題. [4, after Remark 3.41], [3, p.1054]

$$\boldsymbol{a} \oplus_s \boldsymbol{b} \to \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \quad (s \to \infty)$$

$$r \otimes_s \boldsymbol{a} \to r\boldsymbol{a} \quad (s \to \infty)$$

が任意の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{V}, r \in \mathbb{R}$ に対して成り立つ。

定義. [4, Definition 2.7, (2.1), (6.286), (6.293)] $\oplus_s$ に関する $\boldsymbol{a}$ の逆元はベクトルの和 $+$ に関する逆元 $-\boldsymbol{a}$ であることに注意しておく。通常のベクトル空間のように記号

$$\boldsymbol{a} \ominus_s \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \oplus_s (-\boldsymbol{b})$$

を用いる。さらに，Möbius gyrodistance function d_{M} と Poincaré distance function または Möbius metric h_{M} が

$$d_{\mathrm{M}}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = ||\boldsymbol{b} \ominus_s \boldsymbol{a}||, \qquad h_{\mathrm{M}}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \tanh^{-1}\frac{d_{\mathrm{M}}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{s}$$

によって定義される。

Ungar はジャイロ群や実内積ジャイロベクトル空間についてのいろいろな結果の中で次の定理を示した。

定理. [4, (6.294)] 三角不等式

$$h_{\mathrm{M}}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}) \leq h_{\mathrm{M}}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) + h_{\mathrm{M}}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}),$$

が任意の $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c} \in \mathbb{V}_s$ に対して成り立ち，$(\mathbb{V}_s, h_{\mathrm{M}})$ は距離空間である。$\mathbb{V}$ が実ヒルベルト空間ならば $(\mathbb{V}_s, h_{\mathrm{M}})$ は距離空間として完備である。

次の公式は定義からの容易な帰結である。これによって，$s=1$ の Möbius gyrovector space に対して得られた結果の多くが一般の $s>0$ に対する結果に容易に拡張される。

補題. $s>0$ とする。

(i) $||\boldsymbol{a} \oplus_s \boldsymbol{b}||^2 = \dfrac{||\boldsymbol{a}||^2 + 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + ||\boldsymbol{b}||^2}{1 + \frac{2}{s^2}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + \frac{1}{s^4}||\boldsymbol{a}||^2||\boldsymbol{b}||^2}$

(ii) $\dfrac{\boldsymbol{a}}{s} \oplus_1 \dfrac{\boldsymbol{b}}{s} = \dfrac{\boldsymbol{a} \oplus_s \boldsymbol{b}}{s}$

(iii) $r \otimes_1 \dfrac{\boldsymbol{a}}{s} = \dfrac{r \otimes_s \boldsymbol{a}}{s}$

が任意の $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b} \in \mathbb{V}_s$, $r \in \mathbb{R}$ に対して成り立つ。

直交条件が Möbius gyrovector space における結合性を許すことは重要である。

定理. [4, (3.147),(3.148)] もし $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{c}$ かつ $\boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{c}$ ならば，

$$\boldsymbol{a} \oplus_s (\boldsymbol{b} \oplus_s \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \oplus_s \boldsymbol{b}) \oplus_s \boldsymbol{c}$$

が成り立つ。

定理. [4, Theorem 8.33] もし $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n\} \subset \mathbb{V}_s$ が直交系ならば，

$$||\boldsymbol{a}_1 \oplus_s \cdots \oplus_s \boldsymbol{a}_n||^2 = ||\boldsymbol{a}_1||^2 \oplus_{s^2} \cdots \oplus_{s^2} ||\boldsymbol{a}_n||^2.$$

定義. [5, Definition 32] $\{\boldsymbol{a}_n\}_n$ を $\mathbb{V}_s$ 内の列とする。Möbius の和に関する級数

$$\Big(\big((\boldsymbol{a}_1 \oplus_s \boldsymbol{a}_2) \oplus_s \boldsymbol{a}_3\big) \oplus_s \cdots \oplus_s \boldsymbol{a}_n\Big) \oplus_s \cdots$$

が収束するとは，ある元 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{V}_s$ が存在して $h_{\mathrm{M}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_n) \to 0 \ (n \to \infty)$ が成り立つことである。ここで $\{\boldsymbol{x}_n\}_n$ は $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{a}_1$ および $\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x}_{n-1} \oplus_s \boldsymbol{a}_n$ によって帰納的に定義される列である。このとき，級数は $\boldsymbol{x}$ に収束するといい，

$$\boldsymbol{x} = \Big(\big((\boldsymbol{a}_1 \oplus_s \boldsymbol{a}_2) \oplus_s \boldsymbol{a}_3\big) \oplus_s \cdots \oplus_s \boldsymbol{a}_n\Big) \oplus_s \cdots$$

と表す。さらにもし列 $\{\boldsymbol{a}_n\}_n$ が直交系であるならば，

$$\boldsymbol{x} = \sum_{n=1}^{\infty}{}^{\oplus_s} \boldsymbol{a}_n$$

と表す。直交性によってカッコの記載を必要としないことに注意する。実数の開区間 $(-s, s)$ での $\oplus_s$ に関する級数についても同様に定義する。

ヒルベルト空間の任意の元が完全正規直交系に関して直交展開されるように，$\mathbb{V}$ が実ヒルベルト空間ならば，Möbius gyrovector space $\mathbb{V}_s$ の任意の元は完全正規直交系に関して直交ジャイロ展開される。その具体的な手続きも知られているがここでは省略する。

定理. [5, Theorem 35] $\{\boldsymbol{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\mathbb{V}$ の完全正規直交列とする。任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{V}_s$ は

$$\boldsymbol{x} = \sum_{n=1}^{\infty}{}^{\oplus_s} a_n \boldsymbol{e}_n$$

と直交ジャイロ展開される。係数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は具体的な手続きで計算することができる。

$\{\boldsymbol{e}_n\}$ を実ヒルベルト空間の完全正規直交列とし，

$$\boldsymbol{x} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \boldsymbol{e}_n, \qquad \boldsymbol{y} = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \boldsymbol{e}_n$$

を 2 元の通常の直交展開とすれば，いうまでもなく

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n) \boldsymbol{e}_n$$

であり，差のノルム $||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}||$（の 2 乗）はそれぞれの直交展開係数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ によって，きわめて単純明快に書き下すことができる：

$$||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^2. \tag{1}$$

そうすると，次を問題とすることはとても自然だろう。

問題. [6] $\{\boldsymbol{e}_n\}$ を実ヒルベルト空間 $\mathbb{V}$ の完全正規直交列とする。$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{V}_s$ に対して

$$\boldsymbol{x} = \sum_{n=1}^{\infty}{}^{\oplus_s} a_n \boldsymbol{e}_n, \qquad \boldsymbol{y} = \sum_{n=1}^{\infty}{}^{\oplus_s} b_n \boldsymbol{e}_n$$

を 2 元の直交ジャイロ展開とする。Möbius の差のノルム $||\boldsymbol{x} \ominus_s \boldsymbol{y}||$（の 2 乗）をそれぞれの直交ジャイロ展開係数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を用いて表せ。

ある直交条件を課した 4 つの元に関するノルム等式

$s = 1$ の場合を述べる。一般の $s > 0$ に拡張することは容易である。$\oplus_1, \ominus_1$ を単にそれぞれ $\oplus, \ominus$ と書く。

前セクションで述べた問題に現れるジャイロ級数の有限部分和を考える：

$$\boldsymbol{x}_n = a_1\boldsymbol{e}_1 \oplus \cdots \oplus a_n\boldsymbol{e}_n$$

$$\boldsymbol{y}_n = b_1\boldsymbol{e}_1 \oplus \cdots \oplus b_n\boldsymbol{e}_n$$

このとき

$$||\boldsymbol{x}_{n+1} \ominus \boldsymbol{y}_{n+1}||^2 = ||(\boldsymbol{x}_n \oplus a_{n+1}\boldsymbol{e}_{n+1}) \ominus (\boldsymbol{y}_n \oplus b_{n+1}\boldsymbol{e}_{n+1})||^2 \tag{2}$$

であるが，一般には結合法則が成り立たないため次へ等式でつなぐことができない：

$$||(\boldsymbol{x}_n \ominus \boldsymbol{y}_n) \oplus (a_{n+1}\boldsymbol{e}_{n+1} \ominus b_{n+1}\boldsymbol{e}_{n+1})||^2.$$

もしこれが可能だったとすれば問題は通常の直交展開のように自明的に解決しただろう。「ベクトルとして等しくないというだけでノルムは等しい，あるいは相応に役立つ不等式が成り立つのではないか？」という期待があってもおかしくはないが，実はそうでないことが分かる（[6] 参照)。(2) の右辺について

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{x}_n \qquad \boldsymbol{b} = a_{n+1}\boldsymbol{e}_{n+1}, \qquad \boldsymbol{c} = -\boldsymbol{y}_n, \qquad \boldsymbol{d} = -b_{n+1}\boldsymbol{e}_{n+1}$$

とおくと

$$||(\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b}) \ominus (\boldsymbol{c} \oplus \boldsymbol{d})||^2 \qquad \text{を} \qquad \boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{d}, \quad \boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{d} \qquad \text{の条件下で}$$

調べることになる。

定理. [6, Theorem 3.2] $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d} \in \mathbb{V}_1$ が直交条件

$$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{d}, \quad \boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{d}$$

を満たすと仮定する。このとき次の等式が成り立つ：

$$\begin{aligned} &||\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{c}||^2 \oplus ||\boldsymbol{b} \oplus \boldsymbol{d}||^2 \ominus ||(\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b}) \oplus (\boldsymbol{c} \oplus \boldsymbol{d})||^2 \\ &= \frac{\dfrac{4\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d}}{1 + 2\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d} + ||\boldsymbol{b}||^2 ||\boldsymbol{d}||^2} \cdot ||\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{c}||^2}{1 + ||\boldsymbol{b} \oplus \boldsymbol{d}||^2 + \dfrac{(1 + ||\boldsymbol{b}||^2)(1 + ||\boldsymbol{d}||^2)}{1 + 2\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d} + ||\boldsymbol{b}||^2 ||\boldsymbol{d}||^2} \cdot ||\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{c}||^2}. \end{aligned} \tag{3}$$

ある回答

Möbius gyrovector space は実ヒルベルト空間より面倒な空間なので (1) のような 1 行の等式におさまる単純明快な関係を期待することは難しい。それは，通常の直交展開の係数が $x_n = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{e}_n$ であったことに対して，[5] で確立された直交ジャイロ展開の係数を求めることが 1 行の公式ではなく手続きであったことから当然といえるかもしれない。

そして今回の問題についても，求める値に収束する具体的な手続きであれば示すことができる。それは Möbius の演算に関する第 $n+1$ 部分和の差のノルムを第 n 部分和の差のノルムおよび $n+1$ 番目の直交ジャイロ展開係数によって表すことに帰着される。

定義.

$$E_{n+1} = \frac{4a_{n+1}b_{n+1} \cdot ||\boldsymbol{x}_n \ominus \boldsymbol{y}_n||^2}{(1 - a_{n+1}b_{n+1})^2 + (a_{n+1} - b_{n+1})^2 + (1 + a_{n+1}^2)(1 + b_{n+1}^2) \cdot ||\boldsymbol{x}_n \ominus \boldsymbol{y}_n||^2}.$$

$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を知っていればこの量は順次計算できる，という性質のものである。

次の定理は公式 (3) から導かれる。

定理. [6, Theorem 4.2]

$$||\boldsymbol{x}_{n+1} \ominus \boldsymbol{y}_{n+1}||^2 = ||\boldsymbol{x}_n \ominus \boldsymbol{y}_n||^2 \oplus \left(\frac{a_{n+1} - b_{n+1}}{1 - a_{n+1}b_{n+1}} \right)^2 \oplus E_{n+1}.$$

この定理によって，Möbius の演算に関する第 $n+1$ 部分和の差のノルムを第 n 部分和の差のノルムおよび $n+1$ 番目の直交ジャイロ展開係数によって求めることができ，いうまでもなく

$$||\boldsymbol{x}_n \ominus \boldsymbol{y}_n|| \to ||\boldsymbol{x} \ominus \boldsymbol{y}|| \quad (n \to \infty)$$

なので，原理的には値 $||\boldsymbol{x} \ominus \boldsymbol{y}||$ をいくらでも近くまで求めることができる。

参考文献

[1] A. A. Ungar, Thomas rotation and the parametrization of the Lorentz transformation group, Found. Phys. Lett. **1**, no. 1, 57–89 (1988).

[2] A. A. Ungar, Group-like structure underlying the unit ball in real inner product spaces, Results Math. **18**, no. 3–4, 355–364 (1990).

[3] A. A. Ungar, Extension of the unit disk gyrogroup into the unit ball of any real inner product space, J. Math. Anal. Appl. **202**, no. 3, 1040–1057 (1996).

[4] A. A. Ungar, *Analytic Hyperbolic Geometry and Albert Einstein's Special Theory of Relativity.* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 2008.

[5] K. Watanabe, Orthogonal gyroexpansion in Möbius gyrovector spaces, J. Funct. Spaces Vol. 2017, Article ID 1518254, 13 pages.

[6] K. Watanabe, On the gyrodistance between orthogonal gyrolinear combinations in the Möbius gyrovector space, preprint.