低次元亜群代数の分類問題の不思議

高橋 眞映 (Sin-Ei Takahasi)

⟨ 山形大学 (米沢) / 数学・ゲーム工房 (西船橋)⟩

1. 始めに

本研究は東邦大の白柳潔先生との共同研究です。

さて分類とは物事を理解する上で大変便利な概念ですが、多分人間に限らず、多くの動物も無意識の内に分類の概念を感じていると思っています。私どもはこれまで、associative, zeropotent, endo-commutative と云った割りと意味のある (2 次元、3 次元の) 代数 (algebra) の分類問題を扱ってきました。私は昔から 2 項演算が好きでしたが、あるとき、ふと亜群が導く代数の分類問題はどうなっているのか気になりました。それで白柳先生を誘って勉強を始めました。

2. オーダー n の亜群が導く代数

n 個からなる集合 $E_n := \{e_1, \cdots, e_n\}$ を考え、E_n 上の 2 項演算の全体を $\mathcal{B}(E_n)$ とします。従って $\sharp\mathcal{B}(E_n) = n^{n^2}$ です。但し、$\sharp X$ は有限集合 X の個数を表します。各 $* \in \mathcal{B}(E_n)$ に対して、組 $(E_n, *)$ をオーダー n の**亜群**と云います。

任意の可換体 K を考え固定します。E_n を K-線形基底とする線型空間を考え、これを $\langle E_n\rangle_K$ で表します。任意の $* \in \mathcal{B}(E_n)$ に対して、$\langle E_n\rangle_K$ 上の 2 項演算

$$(x, y) \mapsto \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j (e_i * e_j) \quad \left(x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i\right)$$

を考え、これを同じ記号 $x * y$ で表します。 このとき、線型空間 $\langle E_n\rangle_K$ は積 $*$ を持つ K 上の代数となるので、これを $A_K(E_n, *)$ で表し、これを亜群 $(E_n, *)$ が導く (n 次元) **亜群代数**と云います。もし混乱がなければ、K を省略し、単に $A(E_n, *)$ と書きます。

もし $(E_n, *)$ と $(E_n, \star)$ が亜群同型ならば、それぞれが導く亜群代数 $A(E_n, *)$, $A(E_n, \star)$ は代数同型となりますが、逆は成立しないので、亜群代数の代数同型による分類問題の難しさが窺い知れます。

3. n 次元代数の同型基準

A を線形基底 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ を持つ K 上の n 次元代数とします。このとき A 上の $n \times n$ 行列

$$\begin{pmatrix} e_1e_1 & \cdots & e_1e_n \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ e_ne_1 & \cdots & e_ne_n \end{pmatrix}$$

は基底 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ に関する A の**積表**と呼ばれます。また

$$e_i e_j = \sum_{k=1}^{n} a_{ijk} e_k \ (1 \leq i, j \leq n) \quad (a_{ijk} \in K)$$

と表示出来ますが、このとき K 上の $n^2 \times n$ 行列

$$\begin{pmatrix} a_{111} & \cdots & a_{11n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n1} & \cdots & a_{1nn} \\ a_{211} & \cdots & a_{21n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{2n1} & \cdots & a_{2nn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n11} & \cdots & a_{n1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{nn1} & \cdots & a_{nnn} \end{pmatrix}$$

は、基底 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ に関する A の**構造行列**と呼ばれます。代数 A はその構造行列で決定されるので、誤解のない時は、それはばしば同じ記号 A で表示されます。次の命題は n 次元代数の同型基準 (isomorphism criterion) を述べています。

以下、代数 A, B が代数同型のとき、記号で $A \cong B$ と表示します。

命題 3.1. もし A, B が K 上 n 次元代数ならば、

$$A \cong B \Leftrightarrow \exists X \in GL_n(K) : (X \otimes X)B = AX$$

が成り立つ。

系 3.1. 同型な有限次元代数の階数は等しい。

4. 2 次元亜群代数の分類

簡単の為、$E_2 = \{e, f\}$ と書きます。オーダー 2 の亜群は全部で 16 個ありますが、それを積表を用いて具体的に書きますと、以下の様になります。

$*_1 : \begin{pmatrix} e & e \\ e & e \end{pmatrix}, *_2 : \begin{pmatrix} e & e \\ e & f \end{pmatrix}, *_3 : \begin{pmatrix} e & e \\ f & e \end{pmatrix}, *_4 : \begin{pmatrix} e & e \\ f & f \end{pmatrix}, *_5 : \begin{pmatrix} e & f \\ e & e \end{pmatrix},$
$*_6 : \begin{pmatrix} e & f \\ e & f \end{pmatrix}, *_7 : \begin{pmatrix} e & f \\ f & e \end{pmatrix}, *_8 : \begin{pmatrix} e & f \\ f & f \end{pmatrix}, *_9 : \begin{pmatrix} f & e \\ e & e \end{pmatrix}, *_{10} : \begin{pmatrix} f & e \\ e & f \end{pmatrix},$
$*_{11} : \begin{pmatrix} f & e \\ f & e \end{pmatrix}, *_{12} : \begin{pmatrix} f & e \\ f & f \end{pmatrix}, *_{13} : \begin{pmatrix} f & f \\ e & e \end{pmatrix}, *_{14} : \begin{pmatrix} f & f \\ e & f \end{pmatrix}, *_{15} : \begin{pmatrix} f & f \\ f & e \end{pmatrix},$
$*_{16} : \begin{pmatrix} f & f \\ f & f \end{pmatrix}.$

従って、2 次元亜群代数も全部で 16 個あり、$\{A(E_2, *_i) : 1 \leq i \leq 16\}$ と表示されます。これは上述の「亜群同型は亜群代数同型を導く」と云う事実と

「有限次元代数の同型基準」の助けを借りて次のように分類されます。但し、char K は体 K の標数を表します。

定理 4.1. (i) char $K \neq 2$ の場合、2 次元亜群代数は、同型を除いて次の 9 代数に分類される：
$A(E_2, *_1), A(E_2, *_2), A(E_2, *_3), A(E_2, *_4), A(E_2, *_5), A(E_2, *_6), A(E_2, *_9),$
$A(E_2, *_{11}), A(E_2, *_{13}).$

(ii) char $K = 2$ の場合は、同型を除いて上記 9 代数及び $A(E_2, *_7)$ の 10 代数に分類される。

系 4.1. 上記 10 代数について、以下の情報をもつ。
(i) 単位的代数は、char$K \neq 2$ の場合 $A(E_2, *_2)$ だけであり、char$K = 2$ の場合は $A(E_2, *_7)$ が加わる。
(ii) 可換代数は、char$K \neq 2$ の場合 $A(E_2, *_1), A(E_2, *_2), A(E_2, *_9)$ だけであり、char$K = 2$ の場合は $A(E_2, *_7)$ が加わる。
(iii) 結合的代数は、char$K \neq 2$ の場合 $A(E_2, *_1), A(E_2, *_2), A(E_2, *_4), A(E_2, *_6)$ だけであり、char$K = 2$ の場合は $A(E_2, *_7)$ が加わる。

次に、定理 4.1 で与えた 10 代数の内部可換性について考察します。代数 A が可換且つ結合的であれば、それはすぐ内部可換であることが分かります。それ故、問題はそれ以外に内部可換代数があるかと云う事ですが、次の結果はこの問題に答えています

系 4.2. (i) 内部可換代数は、char $K \neq 2$ の場合
$A(E_2, *_1), A(E_2, *_2), A(E_2, *_4), A(E_2, *_6), A(E_2, *_9), A(E_2, *_{11}), A(E_2, *_{13})$
だけであり、char$K = 2$ の場合は $A(E_2, *_7)$ が加わる
(ii) 内部可換であるが、可換でもなけれな結合的でもない代数は、$A(E_2, *_{11})$ と $A(E_2, *_{13})$ である

以上の結果から感じた事：

(i) 定理 4.1 は任意の体上の 2 次元亜群代数の完全分類を与えていますが、その証明は鮮やかとは云い難いものです。実際証明は 7 ページ余りを要します。それは亜群代数に保存性質を見つける事がなかなか出来ないからです。

(ii) 亜群代数はその定義から zeropotet はあり得ませんが、2 次元の場合でも、unital, commutative, associative, endo-commutative 等の重要な性質を持つものが存在する事は注目すべきです。また 2 次元亜群代数のほぼ半数が内部可換である事実は不思議です。

(iii) 2 次元亜群代数は 16 個しかないにも拘らず、半数以上が非同型である事は不思議であり、3 次元亜群代数の分類問題の困難さを予想させます。

(iv) $\mathbb{R}^2$ 上の結合的実代数は同型を除いて全部で 8 個ありますが、系 4.1 (iii) から、4 個は亜群代数である事が分かります。例えばセイコ代数 (または Split-complex algebra) と呼ばれる代数は定義から直ぐ亜群代数と分かるので

すが、他はなかなか判別できません。それ故、与えられた 2 次元代数が亜群代数と同型であるかどうかの基準を発見したいものです。

5. 3 次元亜群代数の分類

3 次元亜群代数族 $\mathcal{A}(E_3) := \{A(E_3,*)\}_{*\in\mathcal{B}(E_3)}$ は $3^9 = 19,683$ 個の代数からなる集合族です。それ故、前節で述べたように、これらを代数同型で分類する事は大変な困難が予想されます。ここでは一部分の分類の様子を見ましょう。先ず

$$\mathcal{A}_i(E_3) := \{A \in \mathcal{A}(E_3) : \operatorname{rank} A = i\}\ (1 \le i \le 3\}.$$

と定義します。但し、$\operatorname{rank} A$ は代数 A の構造行列の階数を表します。従って

$$\mathcal{A}(E_3) = \mathcal{A}_1(E_3) \cup \mathcal{A}_2(E_3) \cup \mathcal{A}_3(E_3)$$

が成り立ちます。それ故、$\mathcal{A}(E_3)$ を代数同型で分類するには、上記の 3 代数族 $\mathcal{A}_1(E_3), \mathcal{A}_2(E_3), \mathcal{A}_3(E_3)$ をそれぞれ分類すれば良い事を系 3.1 は保証します。また

$$\sharp\mathcal{A}_1(E_3) = 3, \sharp\mathcal{A}_2(E_3) = 2^9 - 3 = 509 \text{ and } \sharp\mathcal{A}_3(E_3) = 3^9 - 2^9 = 19,171$$

である事が分かります。

さて任意の $* \in \mathcal{B}(E_3)$ を考え、亜群代数 $A(E_3,*)$ の線形基底 $E_3 = \{e,f,g\}$ に関する構造行列の第 k 列を $\Delta_k(*)$ $(1 \le k \le 3)$ で表します。従って、

$$A(E_3,*) = (\Delta_1(*)\ \Delta_2(*)\ \Delta_3(*))$$

と表示されます。 また各 $\mathcal{A}_i(E_3)$ $(1 \le i \le 3)$ は以下の様に表示されます。

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1(E_3) = \{A(E_3,*) \in \mathcal{A}(E_3) : \Delta_1(*) = (1), \Delta_2(*) = \Delta_3(*) = (0)\}\\ \cup \{A(E_3,*) \in \mathcal{A}(E_3) : \Delta_2(*) = (1), \Delta_1(*) = \Delta_3(*) = (0)\}\\ \cup \{A(E_3,*) \in \mathcal{A}(E_3) : \Delta_3(*) = (1), \Delta_1(*) = \Delta_2(*) = (0)\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_2(E_3) = \{A(E_3,*) \in \mathcal{A}(E_3) : \Delta_1(*) = (0), \Delta_2(*) \ne (0), \Delta_3(*) \ne (0)\}\\ \cup \{A(E_3,*) \in \mathcal{A}(E_3) : \Delta_2(*) = (0), \Delta_1(*) \ne 0\Delta_3(*) \ne (0)\}\\ \cup \{A(E,*) \in \mathcal{A}(E_3) : \Delta_3(*) = (0), \Delta_1(*) \ne (0), \Delta_2(*) \ne (0)\}\end{aligned}$$

$$\mathcal{A}_3(E_3) = \{A(E_3,*) \in \mathcal{A}(E_3) : \Delta_1(*) \ne (0), \Delta_2(*) \ne (0), \Delta_3(*) \ne (0)\}.$$

但し、$(1) := {}^t(1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1), (0) := {}^t(0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)$.

I. $\mathcal{A}_1(E_3)$ の分類

$\mathcal{A}_1(E_3)$ は 3 個の代数からなりますが、次の結果を得ます。

命題 5.1. $\mathcal{A}_1(E_3)$ は同型を除いて積表 $\begin{pmatrix} e & e & e \\ e & e & e \\ e & e & e \end{pmatrix}$ を持つ唯一つの代数からなる。

上記の命題で述べた代数は、可換で結合的ですが、非単位的です。また基底変換：

$$\begin{cases} e' = e \\ f' = e - f \\ g' = e - g \end{cases}$$

によって、積表 $\begin{pmatrix} e' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ を持つ代数と同型なので、[4] で定義された waved algebra でもあります。

II. $\mathcal{A}_2(E_3)$ の分類

先ず、

$$\mathcal{A}_{21}(E_3) := \{A(E_3,*) \in \mathcal{A}(E_3) : \Delta_1(*) = (0), \Delta_2(*) \neq (0), \Delta_3(*) \neq (0)\},$$

と定義しますと、$\mathcal{A}_{21}(E_3) \subset \mathcal{A}_2(E_3)$ ですが、実は $\mathcal{A}_2(E_3)$ に属する任意の代数は $\mathcal{A}_{21}(E_3)$ に属するどれかの代数と同型になる事を示せるので、$\mathcal{A}_2(E_3)$ の分類問題は $\mathcal{A}_{21}(E_3)$ の分類問題に帰着します。また、任意の $A(E_3,*) \in \mathcal{A}_{21}(E_3)$ はその構造行列を用いて

$$A(E_3,*) = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 & \varepsilon_1^\dagger \\ 0 & \varepsilon_2 & \varepsilon_2^\dagger \\ 0 & \varepsilon_3 & \varepsilon_3^\dagger \\ 0 & \varepsilon_4 & \varepsilon_4^\dagger \\ 0 & \varepsilon_5 & \varepsilon_5^\dagger \\ 0 & \varepsilon_6 & \varepsilon_6^\dagger \\ 0 & \varepsilon_7 & \varepsilon_7^\dagger \\ 0 & \varepsilon_8 & \varepsilon_8^\dagger \\ 0 & \varepsilon_9 & \varepsilon_9^\dagger \end{pmatrix}$$

と表示出来ます。但し、$\varepsilon_i \in \{0,1\}, \varepsilon_i^\dagger := 1 - \varepsilon_i$ $(1 \leq i \leq 9)$. また各 ε_i は $*$ に依存するので、必要ならば、$\varepsilon_i = \varepsilon_i(*)$ $(1 \leq i \leq 9)$ と書きます。このとき次の補題を得ます。

補題 5.1. もし $A(E_3,*), A(E_3,\star) \in \mathcal{A}_{21}(E_3)$ ならば、

$$A(E_3,*) \cong A(E_3,\star) \ \Rightarrow \ \varepsilon_6(*) - \varepsilon_8(*) = \varepsilon_6(\star) - \varepsilon_8(\star)$$

が成り立つ。

そこで、任意の $i \in \{0,1,-1\}$ に対して、

$$\mathcal{A}_{21,i}(E_3) := \{A(E_3,*) \in \mathcal{A}_{21}(E_3) : \varepsilon_6(*) - \varepsilon_8(*) = i\},$$

と定義すれば、

$$\mathcal{A}_{21}(E_3) = \mathcal{A}_{21,0}(E_3) \cup \mathcal{A}_{21,1}(E_3) \cup \mathcal{A}_{21,-1}(E_3)$$

であり、補題 5.1 から、$\mathcal{A}_{21}(E_3)$ の分類問題は $\mathcal{A}_{21,0}(E_3)$, $\mathcal{A}_{21,1}(E_3)$, $\mathcal{A}_{21,-1}(E_3)$ をそれぞれ分類すれば良い事になります。勿論 $\operatorname{char} K = 2$ ならば、2 つの代数 $\mathcal{A}_{21,1}(E_3)$ と $\mathcal{A}_{21,-1}(E_3)$ は全く同じものです。

II-1. $\mathcal{A}_{21,0}(E_3)$ の分類

今

$$\mathcal{A}_{21,0,0}(E_3) := \{A(E_3,*) \in \mathcal{A}_{21,0}(E_3) : \varepsilon_6(*) = \varepsilon_8(*) = 0\}$$

と定義しますと、$\mathcal{A}_{21,0}(E_3)$ に属する任意の代数は $\mathcal{A}_{21,0,0}(E_3)$ に属するどれかの代数と同型になる事を示せるので、$\mathcal{A}_{21,0}(E_3)$ の分類問題は $\mathcal{A}_{21,0,0}(E_3)$ の分類問題に帰着します。そこで記号を簡明にするため、$\mathfrak{A} := \mathcal{A}_{21,0,0}(E_3)$ と書く事にします。そこで
$\mathfrak{A}_{\varepsilon_5=0} := \{A(E_3,*) \in \mathfrak{A} : \varepsilon_5(*) = 0\}$,
$\mathfrak{A}_{\varepsilon_5=1} := \{A(E_3,*) \in \mathfrak{A} : \varepsilon_5(*) = 1\}$
と定義しますと、

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_{\varepsilon_5=0} \cup \mathfrak{A}_{\varepsilon_5=1}$$

ですが、実は $\mathfrak{A}_{\varepsilon_5=0}$ に属する代数と $\mathfrak{A}_{\varepsilon_5=1}$ に属する代数は非同型である事が示されるので、$\mathfrak{A}$ の分類問題は、$\mathfrak{A}_{\varepsilon_5=0}$ 及び $\mathfrak{A}_{\varepsilon_5=1}$ の分類問題に帰着されます。

II-1-1. $\mathfrak{A}_{\varepsilon_5=0}$ の分類

結果だけを述べます。

命題 5.1. (i) $\operatorname{char} K = 2$ の場合は $\sharp(\mathfrak{A}_{\varepsilon_5=0}/\cong) = 39$ である。

(ii) $\operatorname{char} K \neq 2$ の場合は、もし -1 が K の中に平方根を持つならば $\sharp(\mathfrak{A}_{\varepsilon_5=0}/\cong) = 43$ であり、そうでない場合は $\sharp(\mathfrak{A}_{\varepsilon_5=0}/\cong) = 44$ である。

II-1-2. $\mathfrak{A}_{\varepsilon_5=1}$ の分類

標数が 2 でない体が i 型 $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ であるとは、それぞれ次の条件を満たす事とします：
1 型：$\exists\sqrt{-1} \wedge \nexists\sqrt{1/2}$,
2 型：$\nexists\sqrt{-1} \wedge \nexists\sqrt{-1/2} \wedge \nexists\sqrt{1/2}$,
3 型：$\exists\sqrt{-1} \wedge \exists\sqrt{1/2}$,
4 型：$\nexists\sqrt{-1} \wedge \exists\sqrt{1/2}$,
5 型：$\nexists\sqrt{-1} \wedge \exists\sqrt{-1/2}$.
例えば、体 $\mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{-1}$ は 1 型, 体 $\mathbb{Q}$ は 2 型, 体 $\mathbb{C}$ は 3 型, 体 $\mathbb{R}$ は 4 型, 体 $\mathbb{R} + \mathbb{R}\sqrt{-1/2}$ は 5 型です。我々は次の結果を得ます。

命題 5.2. (i) $\operatorname{char} K = 2$ の場合は、$\sharp(\mathfrak{A}_{\varepsilon_5=1}/\cong) = 32$ である。

(ii) $\operatorname{char} K \neq 2$ する。

(ii-1) K が 3 型ならば、$\sharp(\mathfrak{A}_{\varepsilon_5=1}/\cong) = 40$ である。

(ii-2) K が 1, 4, 5 のどれかの型ならば、$\sharp(\mathfrak{A}_{\varepsilon_5=1}/\cong) = 41$ である。

(ii-3) K が 2 型ならば、$\sharp(\mathfrak{A}_{\varepsilon_5=1}/\cong) = 42$ である。

II-1-3. $\sharp(\mathcal{A}_{21,0}(E_3)/\cong)$ の決定

上記の命題 5.1, 5.2 から次の定理を得ます。

定理 5.1. (i) $\mathrm{char}\, K = 2$ の場合は、$\sharp(\mathcal{A}_{21,0}(E_3)/\cong) = 71$ である。

(ii) $\mathrm{char}\, K \neq 2$ とする。

(ii-1) K が 3 型ならば、$\sharp(\mathcal{A}_{21,0}(E_3)/\cong) = 83$ である。

(ii-2) K が 1 型ならば、$\sharp(\mathcal{A}_{21,0}(E_3)/\cong) = 84$ である。

(ii-3) K が 4 型又は 5 型ならば、$\sharp(\mathcal{A}_{21,0}(E_3)/\cong) = 85$ である。

(ii-4) K が 2 型ならば、$\sharp(\mathcal{A}_{21,0}(E_3)/\cong) = 86$ である。

以上の結果から感じた事：

(i) $\sharp(\mathcal{A}_{21,0}(E_3)) = (2^7 - 1) \times 2 = 254$ なので、代数族 $\mathcal{A}_{21,0}(E_3)$ は代数同型で分類しても約 3 割も残ることになり、その数の多さに驚きます。

(ii) 定理 5.1 を証明するのに 60 ページ以上の複雑な考察が必要のため、美意識が感じられませんでした。

II-2. $\mathcal{A}_{21,1}(E_3)$ 及び $\mathcal{A}_{21,-1}(E_3)$ の分類

これは、II-1 と同じ苦労すれば出来るかもしれません。

III. $\mathcal{A}_3(E_3)$ の分類

この完全分類は不可能と思われます。それ故、1 部分の解明が期待されます。

Acknowledgements

This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.

References

[1] Y. Kobayashi, K. Shirayanagi, S.-E. Takahasi and M. Tsukada, Classification of three-dimensional zeropotent algebras over an algebraically closed field, Commun. Algebra, **45**(2018) no.12, 5037-5052.

[2] K. Shirayanagi, S.-E. Takahasi, M. Tsukada and Y. Kobayashi, Classification of three-dimensional zeropotent algebras over the real number field, Commun. Algebra, **46**(2018) no.11. 4663-4681.

[3] K. Shirayanagi, Y. Kobayashi, S.-E.Takahasi, and M.Tsukad, Three-dimensional zeropotent algebras over an algebraically closed field of characteristic two, Commun. Algebra, **48**(2020) no.4. 1613-1625.

[4] Y. Kobayashi, K. Shirayanagi, M. Tsukada and S.-E. Takahasi, A complete classification of three-dimensional algebras over $\mathbb{R}$ and $\mathbb{C}$-温故知新 (visiting old, learn new), Asian-European J. Math. (2021) 2150131 (25 pages).

[5] Sin-Ei Takahasi, Kiyoshi Shirayanagi and Makoto Tsukada, A classification of endo-commutative curled algebras of dimension 2 over a non-trivial field, Asian-European J. Math., 16-10 (2023) 2350191 (28 pages), DOI: 10.1142/S1793557123501917

[6] S.-E. Takahasi, K. Shirayanagi, M. Tsukada, A classification of two-dimensional endo-commutative algebras over $\mathbb{F}_2$, Sci. Math. Japon. (electric version), 2023-12.

[7] Sin-Ei Takahasi, Kiyoshi Shirayanagi and Makoto Tsukada, A classification of 2-dimensional endo-commutative straight algebras of rank 1 over a non-trivial field, Math. Pannonica (N. S.), 29-2(2023), 258-267.