# 多変数整関数からなる Banach 空間の巡回ベクトル

泉池耕平（山口大学）

## 1　導入

複素数 $\mathbb{C}$ の領域を $\Omega$ とし、$Hol(\Omega)$ によって、$\Omega$ 上の正則関数全体を表すことにする。本研究では、$Hol(\Omega)$ からなる Banach 空間について、その不変部分空間について考える。一般的に不変部分空間とは次のようなものである。

$\mathcal{B}$ を Banach 空間とし,$T$ を $\mathcal{B}$ 上の有界線形作用素とする。
$\mathcal{B}$ の閉部分空間 $M$ が

$$TM \subset M$$

を満たすとき,$M$ は $\mathcal{B}$ の $T$ における不変部分空間であるという。

　部分集合 $E \subset \mathcal{B}$ に対して、$E$ を含む最小の不変部分空間を $[E]_{\mathcal{B}}$ で表すことにする。また、$E = \{f\}$ である場合は、

$$[f]_{\mathcal{B}} = [\{f\}]_{\mathcal{B}}$$

で表すことにする。

関数 $f \in \mathcal{B}$ が

$$[f]_{\mathcal{B}} = \mathcal{B}$$

を満たすとき,$f$ を $\mathcal{B}$ の $T$ における巡回ベクトルであるという。

　$\mathcal{B} \subset Hol(\Omega)$ の場合、

$$Tf = zf, \qquad f \in \mathcal{B},$$

つまり $T$ が座標関数の掛け算作用素であるとき、$T$ における不変部分空間を、単に不変部分空間といい、$T$ における巡回ベクトルを、単に巡回ベクトルであるという。巡回ベクトルはその関数を含む不変部分空間は全空間となるため、その不変部分空間の構造を知る上で重要な情報をもつものと言える。

### 1.1 1 変数整関数からなる空間

$s \in \mathbb{N}$、$\alpha > 0$ とする。$1 \le p < \infty$ に対して、

$$\begin{aligned} &L_a^p(\mathbb{C}, s, \alpha) \\ &= \left\{ f \in Hol(\mathbb{C}) :\ \|f\|_{L_a^p(\mathbb{C},s,\alpha)}^p = \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^p e^{-\alpha|z|^s}\, dA(z) < \infty \right\} \end{aligned}$$

と表すことにする。ここで、$dA$ は $\mathbb{C}$ 上の Lebesgue 測度である。このとき、$L_a^p(\mathbb{C}, s, \alpha)$ は Banach 空間であり、特に $p = 2$、$s = 2$ のとき $L_a^2(\mathbb{C}, 2, \alpha)$ は Fock 空間と呼ばれる。

この $L_a^p(\mathbb{C}, s, \alpha)$ では、多項式の掛け算作用素はすべて非有界であり、不変部分空間は存在しないことが知られている。つまり、閉部分空間 $M$ で

$$pM \subset M, \qquad p:\ 多項式$$

となるのは、$p$ が定数または $M = \{0\}$ の場合のみである。しかし、ほとんどの関数 $f \in L_a^p(\mathbb{C}, s, \alpha)$ は

$$f\mathcal{C} \subset L_a^p(\mathbb{C}, s, \alpha), \qquad \mathcal{C}:\ 多項式環$$

を満たすことから、ここで巡回ベクトルを次のように定義することにする。

Banach 空間 $\mathcal{B} \subset Hol(\Omega)$ ($\Omega \subset \mathbb{C}$ は領域) において、関数 $f \in \mathcal{B}$ が巡回ベクトルであるとは、

$$\{fp :\ p \in \mathcal{C},\ fp \in \mathcal{B}\}$$

が $\mathcal{B}$ で稠密であるときにいう。ただし $\mathcal{C}$ は $\mathbb{C}$ 上の多項式全体である。

掛け算作用素が有界である場合は、前述の定義と同値である。この巡回ベクトルについて、Fock 空間 $L_a^2(\mathbb{C}, 2, \alpha)$ のときは次が成り立つ。

定理 **1 ([2])** 次は同値。

*(1)* $f$ が $L_a^2(\mathbb{C}, 2, \alpha)$ の巡回ベクトルである

*(2)* $f = e^h, \quad h(z) = c_2 z^2 + c_1 z + c_0, \quad |c_2| < \frac{\alpha}{2}$

*(3)* $f \in L_a^2(\mathbb{C}, 2, \alpha)$ は $\mathbb{C}$ 上零点をもたない

実際には、$p \neq 2$ のときもほぼ同じ証明手法で同様のことが成り立つ。

**定理 2** 次は同値。

*(1)* $f$ が $L_a^p(\mathbb{C},2,\alpha)$ の巡回ベクトルである

*(2)* $f=e^h,\quad h(z)=c_2z^2+c_1z+c_0,\ \ |c_2|<\frac{\alpha}{p}$

*(3)* $f\in L_a^p(\mathbb{C},2,\alpha)$ は $\mathbb{C}$ 上零点をもたない

ここで定理 1 の証明の概略を述べる。証明では、$L_a^2(\mathbb{C},s,\alpha)$ の再生核が重要な役割を果たす。

定理 1 の証明概略**.** 各 $\lambda\in\mathbb{C}$ に対して、

$$\langle f,K_\lambda\rangle=f(\lambda),\qquad \forall f\in L_a^2(\mathbb{C},s,\alpha)$$

を満たす $K_\lambda\in L_a^2(\mathbb{C},s,\alpha)$ を再生核という。ここで、$\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ は $L_a^2(\mathbb{C},s,\alpha)$ の内積である。

**補題 3 (Guo-Hou)**

$$\left\langle f,\frac{K_\lambda}{\|K_\lambda\|}\right\rangle\to 0\quad(\,|\lambda|\to\infty\,)$$

この補題から、十分大きい $|\lambda|$ に対して

$$|f(\lambda)|<\|K_\lambda\|=\exp\left(\frac{\alpha|\lambda|^2}{2}\right)$$

であるので、これをもとにして (2) $\Longleftrightarrow$ (3) が得られる。

(1) $\Rightarrow$ (3) は明らか。(2) $\Rightarrow$ (1) は次のように示すことができる。

$$h(z)=c_2z^2+c_1z+c_0,\qquad |c_2|<\tfrac{\alpha}{2}$$

のとき、

$$\exists\,N\in\mathbb{N},\qquad \left(1+\frac{1}{N}\right)|c_2|<\frac{\alpha}{2}$$

この $N$ に対して、Lebesgue の収束定理より

$$\int_{\mathbb{C}}\left|z^\ell p_ne^h-z^\ell e^{(1-\frac{1}{N})h}\right|^2e^{-\alpha|z|^2}\,dV(z)\to 0\qquad(n\to\infty)$$

が得られる。ここで

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\left\{-\frac{1}{N}h(z)\right\}^k}{k!}$$

である。これを繰り返すと、

$$\mathcal{C} \subset \overline{e^{\frac{1}{N}}\mathcal{C}} \subset \cdots \subset \overline{e^{(1-\frac{1}{N})h}\mathcal{C}} \subset \overline{e^{h}\mathcal{C}}$$

となり、(1) が成り立つことがわかる。

## 2 多変数整関数からなる空間

自然数 $n$ に対して、

$$\begin{aligned} z &= (z_1, z_2, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n \\ |z|^2 &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2 \end{aligned}$$

とし、$Hol(\mathbb{C}^n)$ によって $\mathbb{C}^n$ 上の整関数全体、$dV(z)$ によって $\mathbb{C}^n$ 上の Lebesgue 測度を表すものとする。$s \in \mathbb{N}$、$\alpha > 0$ とする。$1 \leq p < \infty$ に対して、

$$\begin{aligned} & L_a^p(\mathbb{C}^n, s, \alpha) \\ = & \left\{ f \in Hol(\mathbb{C}^n) :\ \|f\|^p_{L_a^p(\mathbb{C}^n,s,\alpha)} = \int_{\mathbb{C}^n} |f(z)|^p e^{-\alpha|z|^s}\, dV(z) < \infty \right\} \end{aligned}$$

で表すことにする。この場合も $L_a^p(\mathbb{C}^n, s, \alpha)$ は Banach 空間であり、1 変数の場合と同様に $L_a^p(\mathbb{C}^n, s, \alpha)$ では不変部分空間は存在しない。

Banach 空間 $\mathcal{B} \subset Hol(\Omega)$ ($\Omega \subset \mathbb{C}^n$ は領域) において、関数 $f \in \mathcal{B}$ が巡回ベクトルであるとは、

$$\{fp :\ p \in \mathcal{C},\ fp \in \mathcal{B}\}$$

が $\mathcal{B}$ で稠密であるときにいう。ただし、$\mathcal{C}$ は $\mathbb{C}^n$ 上の多項式全体である。

多変数でも巡回ベクトルについて考えることは自然の流れである。いま、

$$\begin{aligned} z^\beta &= z_1^{\beta_1} \cdots z_n^{\beta_n} \\ |\beta| &= \beta_1 + \cdots + \beta_n \end{aligned}$$

によって表記し、$s$ 次の多項式

$$h(z) = \sum_{m=0}^{s} \sum_{|\beta|=m} c_\beta z^\beta$$

に対して

$$\Delta_h = \max_{|z|=1} \left| \sum_{|\beta|=s} c_\beta z^\beta \right|.$$

と定義する。そのとき、次が成り立つ。

**定理 4 ([1])** $p \geq 1$、$s \in \mathbb{N}$ とする。そのとき、次は同値である。

*(i)* $f$ は $L^p_a(\mathbb{C}^n, s, \alpha)$ の巡回ベクトル

*(ii)* $f = \exp(h)$、ただし

$$h(z) = \sum_{m=0}^{s} \sum_{|\beta|=m} c_\beta z^\beta, \qquad c_\beta \in \mathbb{C}, \quad \Delta_h < \frac{\alpha}{p}$$

*(iii)* $f$ は零点をもたない、かつ $f\mathcal{C} \subseteq L^p_a(\mathbb{C}^n, s, \alpha)$.

1 変数の場合の証明手法は扱いやすいため、同様の手法で多変数の場合についても証明することを考える。同様の手法で示すために必要なことは、以下の 2 点ある。

(1) $p \neq 2$ のときについても多項式環 $\mathcal{C}$ が稠密である

(2) 再生核のノルムの評価

(1) については、[1] で示しており、そちらを参照してほしい。(1) は定数関数が巡回ベクトルであることを意味する。扱う空間は Hilbert 空間以外も含んでいるが、近い大きさの Hilbert 空間を利用しており、(2) を得ることが本質的な部分となる。以下、(2) の再生核のノルム評価について考えていく。

# 3 再生核ノルム関数

$$z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n, \qquad \alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n_+ := (\mathcal{N} \cup \{0\})^n$$

に対して、次の表記を用いる。

$$\begin{aligned} z^\alpha &:= z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n} \\ \alpha! &:= \alpha_1! \cdots \alpha_n! \\ |\alpha| &:= \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \end{aligned}$$

$H \subset Hol(\mathbb{C}^n)$ を Hilbert 空間とし、そのノルムを $\|\cdot\|_H$ で表記する。

$H$ は再生核 Hilbert 空間であるとは、$H$ が次を満たすときにいう。

(i) $\mathcal{C}$ は $H$ で稠密である

(ii) $H$ は各 $\lambda \in \mathbb{C}^n$ に対する再生核 $K_H(z, \lambda)$ をもつ

各 $z \in \mathbb{C}^n$ に対して、$K_H(z,z) = \|K_H(\,\cdot\,, z)\|_H^2 > 0$ である。いま、さらに次の条件を加える。

(iii) $K_H(z,z) = K_H(\alpha z, \alpha z), \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}^n,\ \ \forall\, \alpha \in \mathbb{C}$ with $|\alpha| = 1$.

この場合、$[0,\infty)$ 上の正値関数 $G_H(x)$ を

$$G_H(|z|^2) := K_H(z,z) = \|K_H(\,\cdot\,, z)\|_H^2, \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

によって定められる。これを $H$ の再生核ノルム関数と呼ぶことにする。

最終的な目的は、次の空間における再生核のノルム評価である。

$$\begin{aligned}&\mathcal{H}^2_\varphi(\mathbb{C}^n)\\ =\ &\left\{ f \in Hol(\mathbb{C}^n) :\ \|f\|^2_{\mathcal{H}^2_\varphi(\mathbb{C}^n)} = \int_{\mathbb{C}^n} |f(z)|^2 e^{-\varphi(|z|^2)}\, dV(z) < \infty \right\}\end{aligned}$$

ここで、$\varphi(x)$ は $[\,0,\infty)$ 上の正値関数とする。特に興味があるのは、$\varphi(x) = x^{\frac{m}{2}}$ のときである。

## 4 一般的な場合

ここでは、より一般的な場合について考える。$\eta(x)$ を $[\,0,\infty)$ 上の関数とし、

$$\mathcal{G}^2_\eta(\mathbb{C}^n) = \left\{ f \in Hol(\mathbb{C}^n) : \|f\|^2_{\mathcal{G}^2_\eta(\mathbb{C}^n)} := \int_{\mathbb{C}^n} |f(z)|^2 \eta(|z|^2)\, dV(z) < \infty \right\}$$

とする。このとき、

$$\mathcal{G}^2_\eta(\mathbb{C}^n) \text{ は各 } n \geq 1 \text{ に対して再生核ヒルベルト空間}$$

を仮定する。

この場合に、$\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n_+ \ \ (\alpha \neq \beta)$ に対して、$z^\alpha \perp z^\beta$ である。よって、再生核は

$$K_{\mathcal{G}^2_\eta(\mathbb{C}^n)}(z,\lambda) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n_+} \frac{1}{\|z^\alpha\|^2_{\mathcal{G}^2_\eta(\mathbb{C}^n)}} (\bar{\lambda} \cdot z)^\alpha,$$

ここで、$\bar{\lambda}\cdot z = (\bar{\lambda}_1 z_1, \cdots, \bar{\lambda}_n z_n)$、と書ける。また、$\mathcal{G}^2_\eta(\mathbb{C}^n)$ は条件 (iii) を満たし、再生核ノルム関数 $G_{\mathcal{G}^2_\eta(\mathbb{C}^n)}(x)$ をもつ。

**定理 5 (A)** $G_{\mathcal{G}^2_\eta(\mathbb{C})}(x) \in C^\infty(0,\infty)$、かつ $n \geq 1$ に対して

$$\frac{d^{n-1}G_{\mathcal{G}^2_\eta(\mathbb{C})}(x)}{dx^{n-1}} = n!\, G_{\mathcal{G}^2_\eta(\mathbb{C}^n)}(x).$$

$H^2(\mathcal{B}_n)$ を単位開球 $\mathcal{B}_n \subset \mathbb{C}^n$ 上の Hardy 空間とすると、任意の $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$ に対して、

$$\|z^\alpha\|^2_{H^2(\mathcal{B}_n)} = \frac{(n-1)!\alpha!}{(n-1+|\alpha|)!}.$$

である。よって、

$$\begin{aligned}\|z^\alpha\|^2_{\mathcal{G}^2_\eta(\mathbb{C}^n)} &= \int_{\mathbb{C}^n} |z^\alpha|^2 \eta(|z|^2)\, dV(z) \\ &= 2n\|z^\alpha\|^2_{H^2(\mathcal{B}_n)} \int_0^\infty r^{2(n+|\alpha|)-1}\eta(r^2)\, dr\end{aligned}$$

であるので、計算することによって定理 5 が成り立つことがわかる。ちなみに、上記の定理は $\mathbb{B}_n$ 上でも有効であり、実際、荷重 Bergman 空間 $L^2_\alpha(\mathbb{B}_n)$ で同様の性質を持つ。

# 5 ある空間の再生核ノルム関数の関係

$\eta(x) \in C^1[0,\infty)$ とする。そのとき、$\mathbb{C}$ 上の整関数で

$$\|f\|^2_{\mathcal{K}^2_{\eta'}(\mathbb{C})} = \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2(-1)\eta'(|z|^2)\, dV(z) < \infty$$

を満たすもの全体を $\mathcal{K}^2_{\eta'(\mathbb{C})}$ によって表すことにする。いま、$\mathcal{G}^2_\eta(\mathbb{C})$ が再生核ヒルベルト空間、かつ $\mathcal{K}^2_{\eta'(\mathbb{C})}$ もまた再生核ヒルベルト空間と仮定する。さらに、$m \geq 1$ に対して

$$x^m \eta(x) \to 0 \quad \text{as} \quad x \to \infty$$

を満たすとする。そのとき、次が成り立つ。

定理 **6 (B)**

$$G_{\mathcal{G}^2_\eta(\mathbb{C})}(x) = \frac{d}{dx} G_{\mathcal{G}^2_{-\eta'}(\mathbb{C})}(x), \quad 0 \le x < \infty.$$

上記の定理において、$\eta(x) \in C^1[0,1)$ とおきかえ、

$$\eta(x) \to 0 \quad \text{as} \quad x \to 1$$

と仮定すると、$\mathbb{D}$ の場合でも定理は妥当である。

# 6　主目的の再生核ノルム関数

$\varphi(x) \in C^1[0,\infty)$ を正値関数とする。

$$\mathcal{H}^2_\varphi(\mathbb{C}^n) = \left\{ f \in Hol(\mathbb{C}^n) : \|f\|^2_{\mathcal{H}^2_\varphi(\mathbb{C}^n)} = \int_{\mathbb{C}^n} |f(z)|^2 e^{-\varphi(|z|^2)}\, dV(z) < \infty \right\}$$

$\eta(x) = e^{-\varphi(x)}$ とおくと、$\mathcal{H}^2_\varphi(\mathbb{C}^n) = \mathcal{G}^2_\eta(\mathbb{C}^n)$ である。$\mathcal{H}^2_\varphi(\mathbb{C}^n)$ が再生核ヒルベルト空間と仮定すると、定理 5(A) より

系 **7 (A)** $G_{\mathcal{H}^2_\varphi(\mathbb{C})}(x) \in C^\infty(0,\infty)$、かつ任意の $n \ge 1$ に対して

$$\frac{d^{n-1} G_{\mathcal{H}^2_\varphi(\mathbb{C})}(x)}{dx^{n-1}} = n!\, G_{\mathcal{H}^2_\varphi(\mathbb{C}^n)}(x).$$

が得られる。このことから、

$$G_{\mathcal{H}^2_\varphi(\mathbb{C}^n)}(x) = \frac{1}{2n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{B(n+k)k!} x^k, \quad 0 \le x < \infty$$

where

$$B(n+k) = \int_0^\infty r^{2(n+k)-1} e^{-\varphi(r^2)}\, dr.$$

が得られる。ここで次の空間を考える。

$$\begin{aligned}&\mathcal{E}^2_\varphi(\mathbb{C}^n)\\ &= \left\{ f \in Hol(\mathbb{C}^n) : \|f\|^2_{\mathcal{E}^2_\varphi(\mathbb{C}^n)} = \int_{\mathbb{C}^n} |f(z)|^2 \varphi'(|z|^2) e^{-\varphi(|z|^2)}\, dV(z) < \infty \right\}\end{aligned}$$

このとき、$\eta(x) = \varphi'(x)e^{-\varphi(x)}$ とおけば、$\mathcal{E}^2_\varphi(\mathbb{C}^n) = \mathcal{G}^2_\eta(\mathbb{C}^n)$ である。$\mathcal{E}^2_\varphi(\mathbb{C}^n)$ が再生核ヒルベルト空間と仮定すると、そのとき

$$G_{\mathcal{E}^2_\varphi(\mathbb{C}^n)}(x) = \frac{1}{2n!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+k-1)!}{C(n+k)k!}x^k, \quad 0 \le x < \infty$$

$$\text{where} \qquad C(n+k) = \int_0^\infty r^{2(n+k)-1}\varphi'(r^2)e^{-\varphi(r^2)}\,dr.$$

が得られる。さらに、

$$x^k e^{-\varphi(x)} \to 0 \ \ (x \to \infty), \quad \forall\, k \ge 1$$

と仮定すると、定理 6 (B) より

系 **8 (B)** $G_{\mathcal{H}^2_\varphi(\mathbb{C})}(x) = G'_{\mathcal{E}^2_\varphi(\mathbb{C})}(x).$

が得られる。よって、系 7(A)、系 8(B) より、

系 **9 (C)** 任意の $n \ge 1$ に対して

$$\frac{d^n G_{\mathcal{E}^2_\varphi(\mathbb{C})}(x)}{dx^n} = n!\,G_{\mathcal{H}^2_\varphi(\mathbb{C}^n)}(x)$$

が成り立つ。

ここで、[4] で扱われている次の空間を紹介する。$\psi(z)$ を $\mathbb{C}$ 上の劣調和関数とし、ここに適当な条件を加えたものとする（[4] 参照）。そのとき、

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}^2_\psi(\mathbb{C})\\ &= \left\{f \in Hol(\mathbb{C}) : \|f\|^2_{\mathcal{F}^2_\psi(\mathbb{C})} := \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2(\Delta\psi(z))e^{-\psi(z)}\,dV(z) < \infty\right\}\end{aligned}$$

とすると、$\mathcal{F}^2_\psi(\mathbb{C})$ は再生核ヒルベルト空間である。また、$m \in \mathbb{N}$ とし、

$$\varphi(x) = x^{\frac{m}{2}}, \qquad \psi(z) = |z|^m$$

とおくと、$\mathcal{E}^2_\varphi(\mathbb{C})$ と $\mathcal{F}^2_\psi(\mathbb{C})$ はともに再生核ヒルベルト空間で、

$$\begin{aligned}\Delta\,\psi(z) &= 4\,(\partial_{xx} + \partial_{yy})\,(x^2+y^2)^{\frac{m}{2}} = 4m^2(x^2+y^2)^{\frac{m}{2}-1}\\ &= 8m\,\varphi'(|z|^2)\end{aligned}$$

であることより、$\mathcal{E}^2_\varphi(\mathbb{C})$ と $\mathcal{F}^2_\psi(\mathbb{C})$ は本質的に同じ空間であるといえる。$\mathcal{F}^2_\psi(\mathbb{C})$ においては、[4] で次が成り立つことが示されている。

**定理 10 ([4])** ある定数 $C>0$ が存在して、次が成り立つ。

$$C^{-1}e^{\psi(z)} \le K_{\mathcal{F}^2_\psi(\mathbb{C})}(z,z) \le Ce^{\psi(z)}, \quad z\in\mathbb{C}$$

よって、定理 10 より

**補題 11** $m\in\mathbb{N}$ とし、$\varphi(x)=x^{\frac{m}{2}}$ であるとき、ある定数 $C>0$ が存在して、次が成り立つ。

$$C^{-1}e^{x^{\frac{m}{2}}} \le G_{\mathcal{E}^2_\varphi(\mathbb{C})}(x) \le Ce^{x^{\frac{m}{2}}}, \quad 0\le x<\infty.$$

が得られる。この補題を用いると、計算によって次の定理が得られる。

**定理 12** $m\in\mathbb{N}$ とし、$\varphi(x)=x^{\frac{m}{2}}$ とする。そのとき、各非負整数 $k$ に対して、ある定数 $C_k>0$ が存在して

$$C_k^{-1}x^{\frac{k(m-2)}{2}}e^{x^{\frac{m}{2}}} \le \frac{d^kG_{\mathcal{E}^2_\varphi(\mathbb{C})}(x)}{dx^k} \le C_kx^{\frac{k(m-2)}{2}}e^{x^{\frac{m}{2}}}, \quad x\ge 1.$$

系 9(C) と定理 12 より、目的としていた次の結果が得られる。

**系 13** $m\in\mathbb{N}$ とし、$\varphi(x)=x^{\frac{m}{2}}$ とする。そのとき、各 $n\ge 1$ に対して、ある定数 $d_n>0$ が存在して

$$d_n^{-1}\left(x^{\frac{n(m-2)}{2}}\right)e^{x^{\frac{m}{2}}} \le G_{\mathcal{H}^2_\varphi(\mathbb{C}^n)}(x) \le d_n\left(x^{\frac{n(m-2)}{2}}\right)e^{x^{\frac{m}{2}}}, \quad x\ge 1.$$

# 謝辞

This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.

## References


[1] H. Huang, K.H. Izuchi; *Cyclic vectors in Fock-type spaces in multi-variable case*, Ann. Funct. Anal. **15** (2024), no. 2, Paper No. 20.

[2] K.H. Izuchi; *Cyclic vector in the Fock space over the complex plane*, Proc. Am. Math. Soc. **133** (2005), 3627–3630.

[3] K.H. Izuchi; *Cyclic vectors in some weighted $L^p$ spaces of entire functions*, Can. Math. Bull. **51** (2008), 378–385.

[4] N. Marco, X. Massaneda, J. Ortega-Cerdà; *Interpolating and sampling sequences for entire functions*, Geom. Funct. Anal. **13** (2003), 862-–914.