Characterization for bounded little Hankel operators with respect to polyanalytic functions

名城大学理工学部数学科　田中 清喜

Kiyoki Tanaka

Department of Mathematics, Meijo University

1　はじめに

本稿は，山路哲史氏（神戸高専）との共同研究に基づく．本稿では投稿準備中の [9] の内容について予報（announcement）をするとともに，せっかくの講究録であるため，投稿論文ではあまりしないような表現を用いてでも著者の考えをよりかみ砕いて記してみたい．

1986 年に Axler[1] によって，正則関数 φ の複素共役をシンボルとする Bergman 空間上の Hankel 作用素が有界であることの必要十分条件は関数 φ が Bloch 関数であること，正則関数 φ の複素共役をシンボルとする Bergman 空間上の Hankel 作用素がコンパクトであることの必要十分条件は関数 φ が little Bloch 関数であることを示し，函数論の対象の一つと思われる Bloch 関数にある種の作用素論的な特徴づけを行った．この結果を 1 つの大きな源流[*1]として様々な設定下で Hankel 作用素に限らず様々な作用素の有界性，コンパクト性等の特徴づけ問題が考えられている（例えば Ohno-Stroethoff-Zhao[4]）．Axler[1] によるシンボルを持つ作用素による Bloch 関数に対する特徴づけという考え方を基にして，polyanalytic function に関する little Hankel 作用素の有界性についての特徴づけ問題を通して，polyanalytic function における Bloch 型関数とでも呼ぶべき関数を Hankel 型の作用素の特徴づけ問題から与えてみようとなったことが，本稿の内容の動機となる．一般の polyanalytic function of order n についてはまだ得られていないが $n = 2$ のときに限って Axler の結果に類する結果を得られたため，本稿ではその結果を紹介する．

[*1] さらに以前からこの手の作用素の特徴づけ問題がないわけではないが，1986 年以降から爆発的に流行した発端であると認識している．

2　設定と主結果

$\mathbb{D}$ を複素平面 $\mathbb{C}$ の開単位円板とし，自然数 n に対し，$A_n(\mathbb{D})$ を $\mathbb{D}$ 上の polyanalytic functions of order n(もしくは n-analytic functions と表す) 全体の成す空間とする．つまり，$A_n(\mathbb{D})$ は $\overline{\partial}^n f = 0$ をみたす関数のなす空間とする．このとき，n-analytic Bergman space A_n^2 を

$$A_n^2 := A_n(\mathbb{D}) \cap L^2(dV)$$

と定義する．ここで $dV(z) = dxdy$ である．A_n^2 は再生核ヒルベルト空間であることが知られており（例えば Balk[2],Ramazanov[7] などを見よ），A_n^2 の再生核を $K_n(z,w)$ と書くことにする．すなわち，$f \in A_n^2$ は

$$f(z) = \int_{\mathbb{D}} K_n(z,w)f(w)dV(w)$$

という表示を持ち，$L^2(dV)$ から A_n^2 への直交射影 P_n は

$$P_n f(z) = \int_{\mathbb{D}} K_n(z,w)f(w)dV(w)$$

と表される．また，$\overline{A_n^2} := \{\overline{f} : f \in A_n^2\}$ とする．$\overline{A_n^2}$ も再生核ヒルベルト空間である．特に，その再生核は A_n^2 の再生核の複素共役であり，$\overline{K_n(z,w)} = K_n(w,z)$ である．よって，$L^2(dV)$ から $\overline{A_n^2}$ への直交射影 $\overline{P_n}$ は

$$\overline{P_n} f(z) = \int_{\mathbb{D}} K_n(w,z)f(w)dV(w)$$

と表される．特に $n = 1$ のときは A_1^2 は通常の Bergman 空間であり，よく使われる記号 $A^2 := A_1^2$，$K(z,w) := K_1(z,w)$ および $P := P_1$ を用いることにする．シンボル関数 φ に対し，A^2 から $(A^2)^\perp$ への Hankel 作用素 H_φ および A^2 から $\overline{A^2}$ への little Hankel 作用素 h_φ をそれぞれ

$$H_\varphi f = (I-P)M_\varphi f, \quad h_\varphi f = \overline{P} M_\varphi f \quad (f \in H^\infty)$$

によって定義する (densely defined)．ここで M_φ は掛け算作用素 $M_\varphi f = \varphi f$ である．1 つ注意することとして，Hardy 空間 $H^2(\mathbb{T})$ においても直交射影を考えることで同様に射影と掛け算作用素を用いて Hardy 空間上の Hankel 作用素，little Hankel 作用素を考えることができる（むしろ此方からのアナロジーで Bergman 空間における Hankel 作用素，

little Hankel 作用素を考えている）が，$L^2(\mathbb{T}) = H^2(\mathbb{T}) + \overline{H^2(\mathbb{T})}$ であるため，Hardy 空間上の Hankel 作用素と little Hankel 作用素は一致する*2．Bergman 空間においては $\mathrm{Harm}(\mathbb{D}) \cap L^2(dV) = A^2 \oplus \overline{zA^2} \subsetneq L^2(dV)$ であるため，Hankel 作用素と little Hankel 作用素は違う作用素である．A^2 から定数関数の成す 1 次元空間への射影を Q とすると $[\overline{P} - Q]M_\varphi \prec H_\varphi$，つまり $([\overline{P} - Q]M_\varphi)^*[\overline{P} - Q]M_\varphi \le H_\varphi^* H_\varphi$ となる．

Axler[1] は次の結果を与えた．

Theorem 2.1 [1]
$\varphi \in A^2$ とする．Hankel 作用素 $H_{\overline{\varphi}} : A^2 \to (A^2)^\perp$ が有界であることの必要十分条件は φ が Bloch 関数であることである．Hankel 作用素 $H_{\overline{\varphi}} : A^2 \to (A^2)^\perp$ がコンパクトであることの必要十分条件は φ が little Bloch 関数であることである．

ここで，正則関数 φ が Bloch 関数であるとは $\sup\limits_{z\in\mathbb{D}}(1 - |z|^2)\,|\varphi'(z)| < \infty$ をみたすことであり，正則関数 φ が little Bloch 関数であるとは $\lim\limits_{|z|\to 1^-}(1 - |z|^2)\,|\varphi'(z)| = 0$ をみたすことである．

一方で，Bonami-Luo[3] によって次が示されている．

Theorem 2.2 [3]*3
$\varphi \in A^2$ とする．little Hankel 作用素 $h_{\overline{\varphi}} : A^2 \to \overline{A^2}$ が有界であることの必要十分条件は φ が Bloch 関数であることである．

n-analytic function に関する little Hankel 作用素 $h_{\varphi,n} : A^2 \to \overline{A^2_n}$ を

$$h_{\varphi,n} f(z) = \overline{P_n} M_\varphi f(z) = \int_{\mathbb{D}} K_n(w,z) f(w)\varphi(w) dV(w)$$

と定義する．このとき, $h_\varphi \prec h_{\varphi,n}$ であり, L^2 から有限次元空間 $span\{1, z, z^2, \cdots, z^{n-1}\}$ への射影を Q_n とおくと，$[P_n - Q_n]M_\varphi \prec H_\varphi$ をみたす．したがって，$h_{\varphi,n}$ は有限次元作用素の差を除いて考えれば Peng-Rochberg-Wu[6] による middle Hankel operator であるといえる．そのため，$\varphi \in A^2$ とするとき，$h_{\overline{\varphi},n}$ が有界であることの必要十分条件は φ が Bloch 関数であることは上記の定理たちから明らかである．

本稿では，$n = 2$ に限り φ が 2-analytic function であるときに $h_{\overline{\varphi},2}$ の有界性の特徴

*2 ここでは本筋と関係ないため無定義で話をしてしまっているため，流儀によっては多少（定数関数の成す 1 次元空間への射影分）ズレるかもしれないが本質的には一致する．

*3 Bonami-Luo[3] は定義域，値域を L^p，L^q として考察している．今回は $L^2 - L^2$ 有界性のみを記述した．

づけの結果を紹介する．注意することは，Hankel 作用素 $H_{\overline{\varphi}}$ と H_φ の両方が有界であることの必要十分条件はシンボル φ が BMO_∂ に属することであり（例えば Zhu[11] を見よ），φ が正則の場合，つまり Axler[1] の結果はこの事からも得られる．φ が polyanalytic function の場合はこのことからただちに Axler の結果に類する有界な Hankel 作用素 $H_{\overline{\varphi}}$ の特徴づけが得られなかった[*4]．そのため，まずは middle Hankel operator と見なせる $h_{\overline{\varphi},2} : A^2 \to \overline{A_2^2}$ について Axler の結果に類する特徴づけを得ることを目指した．

結果について記述するために，$\mathbb{D}$ 上の 2-analytic function φ の表示についての復習をする．2-analytic function φ に対して，$\mathbb{D}$ 上正則な関数 φ_0, φ_1 が存在して，

$$\varphi(z) = \varphi_0(z) + \overline{z}\varphi_1(z)$$

と表すことができる．ここで，この表示は一意的である．また，φ_1 は正則関数 ψ_1 によって $\varphi_1(z) = a - z\psi_1(z)$ と表示することができるため，

$$\varphi(z) = \psi_0(z) + a\overline{z} + (1 - |z|^2)\psi_1(z) \tag{1}$$

と表示される．ここで $\psi_0(z) = \varphi_0(z) - \psi_1(z)$ であり，ψ_0 も正則である．この表示は，Pavlović[5] によって提示されている polyharmonic function に対する Almanzi 分解の亜種とでも呼ぶべき表示となっている．表示 (1) をされている関数 φ について，$h_{\overline{\varphi},2}$ の有界性を特徴づけを与えたものが次の主結果である．

Theorem 2.3（主結果） $\mathbb{D}$ 上の 2-analytic function φ は正則関数 ψ_0, ψ_1 と定数 a を用いて $\varphi(z) = \psi_0(z) + a\overline{z} + (1 - |z|^2)\psi_1(z)$ と表示されているとする．このとき，$h_{\overline{\varphi},2} : A^2 \to \overline{A_2^2}$ が有界であることの必要十分条件は ψ_0 が Bloch 関数かつ $\psi_1 \in \mathcal{B}^2$ をみたすことである．

ここで，$\alpha > 0$ に対して，Bloch type space $\mathcal{B}^\alpha$ は

$$\|f\| := \sup_{z\in\mathbb{D}} (1 - |z|^2)^\alpha |f'(z)| < \infty$$

をみたす正則関数 f 全体の成す空間である．シンボルが正則関数の複素共役のときは $a = 0$ かつ $\psi_1(z) \equiv 0$ の場合であり，まさしく Axler[1] と Bonami-Luo[3] の結果からただちに導かれることに他ならない．主結果においてはシンボルについて $(1 - |z|^2)\psi_1(z)$ の項も考え，$\psi_1 \in \mathcal{B}^2$ という条件が現れるが，Zhu[10] によりこの条件は $(1 - |z|^2) |\psi_1(z)|$

[*4] 著者の技術上，現状では得られていないだけで φ が polyanalytic function の場合に $H_{\overline{\varphi}}$ の有界性の特徴づけを与えることができないという意味ではない

が有界であることと同値であることがわかっているため，条件 $\psi_1 \in \mathcal{B}^2$ は該当のパートが有界であることを要請している条件である．証明は Bonami-Luo[3] や T.-Yamaji[8] と同様の議論展開を行う．シンボルが正則関数の複素共役でないことにより生じる問題は作用素の性質から 2 つの関数 ψ_0, ψ_1 の情報を引き出す部分にあるが，Pavlović[5] によって得られている (1) と分解した際の関数たちの関係を用いることによって解決した．

$n = 2$ の時以外でも同様の特徴づけ問題を設定することは可能であり同様の結果が得られるのか？が今後の課題である．

3 謝辞

RIMS 共同研究「保存問題からみた関数環・関数空間論の最近の進展」にて講演させていただき，講究録を書く機会をいただけたことに感謝いたします．また，本研究は JSPS 科研費 JP20K14334, JP21K03283 の助成を受けたものです．

参考文献

[1] S. Axler, *The Bergman space, the Bloch space, and commutators of multiplication operators*, Duke Math. J. **53** (1986), 315–332.

[2] M. B. Balk, *Polyanalytic functions*, Akademie Verlag, Berlin(1991).

[3] A. Bonami and L. Luo, *On Hankel operators between Bergman spaces on the unit ball*, Houston J. Math. **31** (2005), no. 3, 815–828.

[4] S. Ohno, K. Stroethoff and R. Zhao, *Weighted composition operators between Bloch-type spaces*, Rocky Mt. J. Math. **33** (2003), no. 1, 191–215.

[5] M. Pavlović, *Decomposition of L^p and Hardy spaces of polyharmonic functions*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **216** (1997), 499–509.

[6] L. Peng, R. Rochberg and Z. Wu, *Orthogonal polynomials and middle Hankel operators on Bergman spaces*, Stud. Math. **102** (1992) 57–75.

[7] A. K. Ramazanov, *Representation of the space of polyanalytic functions as the direct sum of orthogonal subspaces. Application to rational approximations*, Math. Notes **66** (1999), no. 5, 613–627.

[8] K. Tanaka and S. Yamaji, *Little Hankel operators from Bloch type spaces into another*, Adv. Oper. Theory **10** (2025), no. 1, Paper No. 18, 21 pp.

[9] K. Tanaka and S. Yamaji, Characterization for bounded little Hankel operators

with respect to polyanalytic functions, in preparation.

[10] K. Zhu, *Bloch type spaces of analytic functions*, Rocky Mountain J. Math. **23** (1993), no. 3, 1143–1177.

[11] K. Zhu, *Operator theory in function spaces, second edition*, Amer. Math. Soc., Mathematical Surveys and Monographs **138**, 2007.