微分構造をもつ関数空間上の全射等距離写像

新潟大学・理学部　三浦　毅
Takeshi Miura
Department of Mathematics, Niigata University
Joint work with
M.G. Cabrera-Padilla
Departamento de Matemáticas Universidad de Almería
A. Jiménez-Vargas
Departamento de Matemáticas Universidad de Almería
Moisés Villegas-Vallecillos
Departamento de Matemáticas, Universidad de Cádiz

This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, a Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.

1　背景

コンパクト Hausdorff 空間 K に対して，その上の実数値連続関数の全体を $C_{\mathbb{R}}(K)$ で表す．$C_{\mathbb{R}}(K)$ は各点での演算で実線形空間となり，さらに K 上の最大絶対値をノルムとすることにより $C_{\mathbb{R}}(K)$ は実 Banach 空間となる．Banach [1] はコンパクト距離空間 X, Y に対して，$C_{\mathbb{R}}(X)$ から $C_{\mathbb{R}}(Y)$ への全射等距離写像の構造を解明した．ここで，実または複素ノルム空間 $(N, \|\cdot\|_N)$, $(M, \|\cdot\|_M)$ に対して，写像 $T\colon N \to M$ が等距離写像であるとは

$$\|T(f) - T(g)\|_M = \|f - g\|_N \qquad (f, g \in N)$$

が成り立つことである．Stone [15] は距離付可能とは限らないコンパクト Hausdorff 空間 X, Y に対しても，Banach [1] の主張が正しいことを示した．Banach, Stone が示した上記の結果は，複素数値関数に対しても成り立つかは自然な問題である．この問題を肯定的に解決した結果は Banach–Stone の定理として知られている（たとえば Conway [3], Dunford and Schwartz [4] 参照）．以下ではコンパクト Hausdorff 空間 K 上の複素数値連続関数全体のなす複素 Banach 空間を $C(K)$ で表す．Banach [1], Stone [15] ともに，線形とは限らない全射等距離写像 $T\colon C_{\mathbb{R}}(X) \to C_{\mathbb{R}}(Y)$ の構造を解明している．実際，Mazur–Ulam の定理 [8] により，任意のノルム空間の間の全射等距離写像 $T\colon M \to N$ はアファインである，つまり $T - T(0)$ は実線形であることが知られている．一方でいわゆる Banach–Stone の定理は，複素線形な全射等距離写像 $T\colon C(X) \to C(Y)$ を決定する定理である．全射等距離写像 T の複素線形性は，Mazur–Ulam の定理が保証する $T - T(0)$ の実線形性と重複する．しかしながら，Banach 空間上の等距離写像の研究は，全射性と複素線形性を仮定した上で，その構造を解明するものが複数ある．本稿執筆者はこの不自然さに疑問を抱き，これまでに幾つかの関数空間上の，線形とは限らない全射等距離写像の構造を解明してきた．

閉区間 $[0,1]$ 上の連続微分可能な複素数値関数の全体を $C^1([0,1])$ で表す．$C^1([0,1])$ 上の複素線形な全射等距離写像は，Cambern [2] が

$$\|f\|_C \overset{\text{def.}}{=} \sup_{t\in[0,1]} (|f(t)| + |f'(t)|) \qquad (f \in C^1([0,1]))$$

をノルムとする Banach 空間に対して，また Rao and Roy [14] が

$$\|f\|_\Sigma \overset{\text{def.}}{=} \sup_{s\in[0,1]} |f(s)| + \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)| \qquad (f \in C^1([0,1]))$$

をノルムとする Banach 空間に対して，その構造を解明している．他方で，$C^1([0,1])$ 上の線形とは限らない全射等距離写像の構造は，[7, 9] などで解明されている．

微分可能な関数に対する上記の結果が知られれば，正則関数のなす関数空間に対しても類似の結果が成り立つか，は自然な疑問である．実際，そのような研究は Novinger and Oberlin [13] によってなされている．この結果について述べるため，記号を準備する．$\mathbb{D}$ を複素平面 $\mathbb{C}$ の単位開円板とし，$H(\mathbb{D})$ により $\mathbb{D}$ 上の正則関数全体を表す．$H(\mathbb{D})$ の関数で，さらに $\mathbb{D}$ の閉包 $\bar{\mathbb{D}}$ まで連続的に拡張できるもの全体を $A(\bar{\mathbb{D}})$ で表す．このように定義された空間 $A(\bar{\mathbb{D}})$ を円板環と呼ぶことがある．$A(\bar{\mathbb{D}})$ は $\bar{\mathbb{D}}$ 上の最大絶対値をノルムとして Banach 空間となる．また $H^p(\mathbb{D})$ を Hardy 空間とし，$\mathcal{S}^p$ を次のように定義する：

$$\mathcal{S}^p \overset{\text{def.}}{=} \{f \in H(\mathbb{D}) : f' \in H^p(\mathbb{D})\} \qquad (1 \le p \le \infty).$$

$\mathcal{S}^p$ は各点での演算で複素線形空間をなす．$\mathcal{S}^p$ には幾つかのノルムが定義される．よく知られているように，関数 $f \in H(\mathbb{D})$ が $f' \in H^1(\mathbb{D})$ をみたせば，f は $\mathbb{D}$ の閉包 $\bar{\mathbb{D}}$ に連続的に拡張される（たとえば Duren [5, Theorem 3.11] 参照）．つまり $\mathcal{S}^1 \subset A(\bar{\mathbb{D}})$ である．

したがって $1 \le p \le \infty$ のとき，$f \in \mathcal{S}^p$ に対して $\|f\|_\infty \stackrel{\text{def.}}{=} \sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)|$ が定義される．$\mathcal{S}^p$ は次のノルムに関して完備である．

$$\|f\|_\sigma \stackrel{\text{def.}}{=} |f(0)| + \|f'\|_p, \qquad \|f\|_\Sigma \stackrel{\text{def.}}{=} \|f\|_\infty + \|f'\|_p \qquad (f \in \mathcal{S}^p).$$

ただし $\|\cdot\|_p$ は Hardy 空間の通常のノルムである．Novinger and Oberlin [13] は，$(\mathcal{S}^p, \|\cdot\|_\sigma)$ と $(\mathcal{S}^p, \|\cdot\|_\Sigma)$ に対する線形等距離写像を，全射性を仮定せずに，$1 \le p < \infty$ のときに決定した．以下では Novinger and Oberlin の結果を，全射性を仮定した場合について述べる．

Theorem (Novinger and Oberlin [13])**.** p を 1 以上で $p \neq 2$ をみたす実数とする．

1. T が $(\mathcal{S}^p, \|\cdot\|_\sigma)$ 上の全射複素線形等距離写像であるための必要十分条件は，定数 $c \in \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ と等角写像 $\phi\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ が存在して
$$T(f)(z) = cf(0) + \int_{[0,z]} (\phi'(\zeta))^{1/p} f'(\phi(\zeta))\, d\zeta \qquad (f \in \mathcal{S}^p, z \in \mathbb{D})$$
となることである．
2. T が $(\mathcal{S}^p, \|\cdot\|_\Sigma)$ 上の全射複素線形等距離写像であるための必要十分条件は，定数 $c \in \mathbb{T}$ と等角写像 $\phi\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ が存在して
$$T(f)(z) = cf(\phi(z)) \qquad (f \in \mathcal{S}^p, z \in \mathbb{D})$$
となることである．

Novinger and Oberlin [13] は，Banach 空間 $(\mathcal{S}^p, \|\cdot\|_\sigma)$ と $(\mathcal{S}^p, \|\cdot\|_\Sigma)$ 上の，全射とは限らない線形等距離写像を，$1 \le p < \infty$ に対して決定しているが，$p = \infty$ の場合は言及されていない．本稿執筆者の調べた範囲においては，$\mathcal{S}^\infty$ 上の等距離写像に関する研究は見当たらなかった．Banach 空間 $\mathcal{S}^\infty$ は，可換 Banach 環 $H^\infty(\mathbb{D})$ に関連する重要な Banach 空間である．したがって $\mathcal{S}^p$ の研究において，$p = \infty$ の場合が除外されるべきではなく，むしろ解決されるべき問題であると確信する．$\mathcal{S}^\infty$ に自然に定義されるノルム

$$\|f\|_\sigma \stackrel{\text{def.}}{=} |f(0)| + \|f'\|_\infty, \qquad \|f\|_\Sigma \stackrel{\text{def.}}{=} \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \qquad (f \in \mathcal{S}^\infty)$$

および

$$\|f\|_C \stackrel{\text{def.}}{=} \sup_{z \in \mathbb{D}} (|f(z)| + |f'(z)|) \qquad (f \in \mathcal{S}^\infty)$$

に対して，$\mathcal{S}^\infty$ 上の全射等距離写像の構造が [12] において解明されている．この結果を Theorem 1 として以下で述べるが，その前に Novinger and Oberlin [13] の定理の

$p=\infty$ の場合と，Theorem 1 との関係について触れておく．おおまかな言い方をすれば，Theorem 1 は Novinger and Oberlin [13] の定理の，$p=\infty$ の場合にあたる．しかし正確には次に意味で異なる．[13] では，全射とは限らない線形等距離写像が決定されているが，Theorem 1 では全射性が仮定されている．この意味では，Theorem 1 は [13] よりも強い仮定のもとで示されたことになる．他方において，[13] では等距離写像の線形性が仮定されているが，Theorem 1 では等距離写像の線形性は仮定されていない．もちろん，Mazur–Ulam の定理により，実線形性が実質的に仮定されていることにはなる．この意味では，Theorem 1 は [13] よりも弱い仮定のもとで示されたとともに，異なるノルムに関しても扱われている．

Theorem 1 (M. and Niwa [12]). *1.* T が $(\mathcal{S}^\infty, \|\cdot\|_\sigma)$ 上の全射等距離写像であるための必要十分条件は，$c_0, c_1, \lambda \in \mathbb{T}$ および $a \in \mathbb{D}$ が存在して，次のいずれか一つが成り立つことである．

$$T(f)(z) = T(0)(z) + c_0 f(0) + \int_{[0,z]} c_1 f'\left(\lambda \frac{\zeta - a}{1-\overline{a}\zeta}\right) d\zeta \quad (f \in \mathcal{S}^\infty,\ z \in \mathbb{D}),$$

$$T(f)(z) = T(0)(z) + \overline{c_0 f(0)} + \int_{[0,z]} c_1 f'\left(\lambda \frac{\zeta - a}{1-\overline{a}\zeta}\right) d\zeta \quad (f \in \mathcal{S}^\infty,\ z \in \mathbb{D}),$$

$$T(f)(z) = T(0)(z) + c_0 f(0) + \int_{[0,z]} c_1 \overline{f'\left(\lambda \overline{\frac{\zeta - a}{1-\overline{a}\zeta}}\right)} d\zeta \quad (f \in \mathcal{S}^\infty,\ z \in \mathbb{D}),$$

$$T(f)(z) = T(0)(z) + \overline{c_0 f(0)} + \int_{[0,z]} c_1 \overline{f'\left(\lambda \overline{\frac{\zeta - a}{1-\overline{a}\zeta}}\right)} d\zeta \quad (f \in \mathcal{S}^\infty,\ z \in \mathbb{D}).$$

2. T が $(\mathcal{S}^\infty, \|\cdot\|_\Sigma)$ または $(\mathcal{S}^\infty, \|\cdot\|_C)$ 上の全射等距離写像であるための必要十分条件は，$c, \lambda \in \mathbb{T}$ が存在して，次のいずれか一方が成り立つことである．

$$T(f)(z) = T(0)(z) + cf(\lambda z) \qquad (f \in \mathcal{S}^\infty,\ z \in \mathbb{D}),$$

$$T(f)(z) = T(0)(z) + \overline{cf(\overline{\lambda z})} \qquad (f \in \mathcal{S}^\infty,\ z \in \mathbb{D}).$$

Theorem 1 は直ちに得られた訳ではない．実際，Theorem 1 を得る前に，いくつかの部分的な解決が次のステップにつながった．まず

$$\mathcal{S}_A \overset{\text{def.}}{=} \{f \in H(\mathbb{D}) : f' \in A(\bar{\mathbb{D}})\}$$

を定義した．このとき $\mathcal{S}_A \subset \mathcal{S}^\infty$ である．$\mathcal{S}_A$ に対しても，$\|\cdot\|_\sigma$, $\|\cdot\|_\Sigma$, $\|\cdot\|_C$ をノルムとすることができる．$f \in \mathcal{S}_A$ に対して，定義より f' は $\bar{\mathbb{D}}$ 上の連続関数とみなすこと

ができる．したがって $f \in \mathcal{S}^\infty$ に比べ，f' の振る舞いが制御しやすい．それにも関わらず，$(\mathcal{S}_A, \|\cdot\|_\Sigma)$ や $(\mathcal{S}_A, \|\cdot\|_C)$ 上の全射等距離写像の構造を解明することは困難であった．そのため，まずは $(\mathcal{S}_A, \|\cdot\|_\sigma)$ 上の全射等距離写像を考察し，その形を完全に決定した．$(\mathcal{S}_A, \|\cdot\|_\sigma)$ では，$f \in \mathcal{S}_A$ の境界付近における挙動を気にする必要はないため，簡単な関数によって等距離写像の振る舞いを調べることが可能である．一方で $(\mathcal{S}_A, \|\cdot\|_\Sigma)$ や $(\mathcal{S}_A, \|\cdot\|_C)$ では，$f \in \mathcal{S}_A$ の境界付近での挙動も制御しなければならず，より適切な関数を考察しなければ，等距離写像の振る舞いが解明することができなかった．このような議論によって，$(\mathcal{S}_A, \|\cdot\|_\sigma)$, $(\mathcal{S}_A, \|\cdot\|_\Sigma)$, $(\mathcal{S}_A, \|\cdot\|_C)$ 上の全射等距離写像 T の構造を解明することが可能となり，しかも T は Theorem 1 で得られた形で表現されることが示された．$\mathcal{S}_A$ 上の全射等距離写像を考察する際，$f \in \mathcal{S}_A$ に対して f' を $\bar{\mathbb{D}}$ 上の連続関数として扱っている．これと同様に $\mathcal{S}^\infty$ 上の全射等距離写像を考察するならば，$f \in \mathcal{S}^\infty$ に対して $f' \in H^\infty(\mathbb{D})$ を，$H^\infty(\mathbb{D})$ の極大イデアル空間 $\mathcal{M}$ 上の連続関数とみなすことは自然である．しかし $\mathcal{M} \setminus \mathbb{D}$ における f' の振る舞いは複雑であるため，それを慎重に議論する必要がある．

このようにして，$C^1([0,1])$ から $\mathcal{S}_A$ へ，そして $\mathcal{S}^\infty$ へと進み，これらの空間上の全射等距離写像の形が解明されてきた．それぞれの空間で証明は異なるものの，主なアイディアはいずれも同一である．そこで，最も簡単な場合である $C^1([0,1])$ に対して，議論の中核をなすノルム $\|\cdot\|_\Sigma$ に関する全射等距離写像 T の構造を調べる際のアイディアを以下に述べる．

- $f \in C^1([0,1])$ に対して
$$\|f\|_\Sigma = \sup_{s\in[0,1]} |f(s)| + \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)| = \sup_{(s,t,\zeta)\in[0,1]^2\times\mathbb{T}} |f(s) + f'(t)\zeta|$$
となることが分かる．
- $C([0,1]^2 \times \mathbb{T})$ を，直積位相に関するコンパクト Hausdorff 空間 $[0,1]^2 \times \mathbb{T}$ 上の複素数値連続関数全体のなす Banach 空間とする．
- $U\colon C^1([0,1]) \to C([0,1]^2 \times \mathbb{T})$ を
$$U(f)(s,t,\zeta) = f(s) + f'(t)\zeta \qquad (f \in C^1([0,1]), (s,t,\zeta) \in [0,1]^2 \times \mathbb{T})$$
により定義し，$B = U(C^1([0,1]))$ とおく．
- U は $(C^1([0,1]), \|\cdot\|_\Sigma)$ から $(B, \|\cdot\|_\infty)$ への全射複素線形等距離写像である．
*$\mathcal{S}_A$ や $\mathcal{S}^\infty$ に対しても，適切なコンパクト Hausdorff 空間 K を定義することにより，考察すべき Banach 空間を $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ に埋め込むことが可能となる．

- Mazur–Ulam の定理により，T は実線形であると仮定して一般性を失わない．このとき $V = UTU^{-1}$ とおけば，V は $(B, \|\cdot\|_\infty)$ 上の全射実線形等距離写像となる．

$$\begin{array}{ccc} C^1([0,1]) & \xrightarrow{T} & C^1([0,1]) \\ {\scriptstyle U}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle U} \\ B & \xrightarrow[V]{} & B \end{array}$$

- B^* を B の双対空間とし，$V_*\colon B^* \to B^*$ を

$$V_*(\eta)(a) = \mathrm{Re}\,\eta(V(a)) - i\mathrm{Re}\,\eta(V(ia)) \qquad (\eta \in B^*, a \in B)$$

  により定義する．ここで $\mathrm{Re}\,z$ は $z \in \mathbb{C}$ の実部である．
- Arens–Kelley の定理（[6] 参照）を用いて

$$V_*(\{\lambda\delta_x : \lambda \in \mathbb{T}, x \in [0,1]^2 \times \mathbb{T}\}) = \{\lambda\delta_x : \lambda \in \mathbb{T}, x \in [0,1]^2 \times \mathbb{T}\}$$

  となることが示される．ここに $\delta_x\colon B \to \mathbb{C}$ は，$\delta_x(a) = a(x)$ $(a \in B)$ により定まる有界線形汎関数である．
- この関係から V のみたす性質が分かる．したがって $T = U^{-1}VU$ が記述できる．
- ここで得られる T の形は，$U\colon C^1([0,1]) \to B$ を経由して得られたものである．そのため $s, t \in [0,1]$, $\zeta \in \mathbb{T}$ を用いて表現される．
- 得られた T の表現から不要な変数を除くことにより，$(C^1([0,1]), \|\cdot\|_\Sigma)$ 上の全射等距離写像 T の形が得られる．

この議論を振り返ると，$\mathcal{S}_A$ や $\mathcal{S}^\infty$ 上の全射等距離写像の構造は，ノルムに依らず同一の手法で解明できることが分かる．このことは $C^1([0,1])$ と $\mathcal{S}_A$ と $\mathcal{S}^\infty$ には共通の性質があり，逆にその性質をもつ関数空間に対しては，類似の手法によって全射等距離写像が決定できることを述べているように思われる．

2　主結果

前節の動機にもとづき，全射等距離写像を調べる上での $C^1([0,1])$ と $\mathcal{S}_A$ と $\mathcal{S}^\infty$ に共通の性質を探った．このとき以下に述べる点分離性だけが，全射等距離写像を解明する際に必要な共通性質であることが判明した．以下では X, Y をコンパクト Hausdorff 空間とし，K を X の閉部分集合とする．A を $C(X)$ の線形部分空間とし，B を $C(Y)$ の閉線形部分空間とする．また $\partial A, \partial B$ をそれぞれ A, B の Shilov 境界とする．このとき $\partial A, \partial B$ は A, B の Choquet 境界の閉包と一致する．

1. 全射複素線形写像 $d\colon A \to B$ が存在する．
2. 複素線形空間 A は，$\|f\|_A = \|f\|_K + \|d(f)\|_Y$ $(f \in A)$ で定義されるノルム $\|\cdot\|_A$ に関して完備である．
3. A は定数関数 1 を含む．
4. d の核 $\ker(d)$ は $\ker(d) = \{z\mathbf{1} \in A : z \in \mathbb{C}\}$ をみたす．
5. $\partial A \times \partial B$ の稠密部分集合 $\mathcal{D}$ が存在して，次が成り立つ：
   (a) 任意の $\varepsilon > 0$ と任意の $y_0 \in \partial B$ である $x_0 \in \partial A$ に対して $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ をみたすものと，$y_0 \in N_0$ となる任意の開集合 $N_0 \subset Y$ に対して $f_0 \in A$ が存在して，$\|f_0\|_K < \varepsilon$, $d(f_0)(y_0) = 1 = \|d(f_0)\|_Y$ and $|d(f_0)| < \varepsilon$ on $\partial B \setminus N_0$ が成り立つ．
   (b) 任意の $\varepsilon > 0$ と任意の $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ および $x_0 \in W_0$ をみたす任意の開集合 $W_0 \subset K$ に対して $g_0 \in A$ が存在して，$g_0(x_0) = 1 = \|g_0\|_K$, $|g_0| < \varepsilon$ on $\partial A \setminus W_0$ かつ $|d(g_0)(y_0)| < \varepsilon$ が成り立つ．
6. $k = 0, 1, 2$ に対して (x_k, y_k) を $\partial A \times \partial B$ の任意の点とする．
   (a) もしも $x_0 \notin \{x_1, x_2\}$ ならば $h_0 \in A$ が存在して, $j = 1, 2$ に対して $h_0(x_0) = 1$ and $h_0(x_j) = 0$ が成り立ち，かつ $k = 0, 1, 2$ に対して $d(h_0)(y_k) = 0$ が成り立つ．
   (b) もしも $y_0 \notin \{y_1, y_2\}$ ならば $h_1 \in A$ が存在して, $k = 0, 1, 2$ に対して $h_1(x_k) = 0$ が成り立ち，かつ $j = 1, 2$ に対して $d(h_1)(y_0) = 1$ and $d(h_1)(y_j) = 0$ が成り立つ．
   (c) $h_2, h_3 \in A$ が存在して，$h_2(x_0) = 1$, $d(h_2)(y_0) = 0$, $h_3(x_0) = 0$ and $d(h_3)(y_0) = 1$ が成り立つ．

Theorem 2. *A, B を条件 (1) から (6) をみたす複素 Banach 空間とし，$T\colon A \to A$ を全射等距離写像とする．このとき $c \in \mathbb{T}$，同相写像 $\phi\colon \partial A \to \partial A$ と $\psi\colon \partial B \to \partial B$，連続関数 $u\colon \partial B \to \mathbb{T}$ および開かつ閉集合 ∂A_+ of ∂A と ∂B_+ of ∂B が存在して，任意の $f \in A$, $x \in \partial A$ と $y \in \partial B$ に対して次が成り立つ：*

$$T(f)(x) - T(0)(x) = \begin{cases} cf(\phi(x)) & x \in \partial A_+ \\ c\overline{f(\phi(x))} & x \in \partial A \setminus \partial A_+ \end{cases},$$

$$d(T(f))(y) - d(T(0))(y) = \begin{cases} u(y)d(f)(\psi(y)) & y \in \partial B_+ \\ u(y)\overline{d(f)(\psi(y))} & y \in \partial B \setminus \partial B_+ \end{cases}.$$

逆に T と $d \circ T$ が上の形で与えられるとき，T は等距離写像となる．

Corollary 3. A, B および T は *Theorem 2* の条件をみたすとする．K が１点集合 $\{x_0\}$ であるとき，$c \in \mathbb{T}$ と連続関数 $u\colon \partial B \to \mathbb{T}$，同相写像 $\psi\colon \partial B \to \partial B$ および開かつ閉集合 ∂B_+ *of* ∂B が存在して次が成り立つ：

$$T(f)(x_0) - T(0)(x_0) = cf(x_0) \qquad (\forall f \in A)$$

または

$$T(f)(x_0) - T(0)(x_0) = c\overline{f(x_0)} \qquad (\forall f \in A).$$

さらに任意の $f \in A$ と $y \in \partial B$ に対して次が成り立つ：

$$d(T(f) - T(0))(y) = \begin{cases} u(y)d(f)(\psi(y)) & y \in \partial B_+ \\ u(y)\overline{d(f)(\psi(y))} & y \in \partial B \setminus \partial B_+ \end{cases}.$$

逆に T と $d \circ T$ が上の形で与えられれば，T は等距離写像である．

参考文献

[1] S. Banach, Theory of linear operations, Translated by F. Jellett, Dover Publications, Inc. Mineola, New York, 2009.

[2] M. Cambern, *Isometries of certain Banach algebras*, Studia Math. **25** (1964-1965), 217–225.

[3] J.B. Conway, A course in functional analysis. 2nd ed. New York etc.: Springer-Verlag.

[4] N. Dunford and J.T. Schwartz, Linear operators. Part I: General theory. With the assistance of William G. Bade and Robert G. Bartle. Repr. of the orig., publ. 1959 by John Wiley & Sons Ltd., Paperback ed. New York etc.: John Wiley &— Sons Ltd.

[5] P.L. Duren, The theory of H^p spaces, Pure and Applied Mathematics, Vol. 38 Academic Press, New York-London, 1970.

[6] R. Fleming and J. Jamison, Isometries on Banach spaces: function spaces, Chapman & Hall/CRC Monogr. Surv. Pure Appl. Math. 129, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2003.

[7] K. Kawamura, H. Koshimizu and T. Miura, *Norms on* $C^1([0,1])$ *and their isometries*, Acta Sci. Math. (Szeged) **84** (2018), 239–261.

[8] S. Mazur and S. Ulam, *Sur les transformationes isométriques d'espaces vectoriels normés*, C. R. Acad. Sci. Paris **194** (1932), 946–948.

[9] T. Miura and H. Takagi, *Surjective isometries on the Banach space of continuously differentiable functions*, Contemp. Math. **687** (2017), 181–192.

[10] T. Miura and N. Niwa, *Surjective isometries on a Banach space of analytic functions on the open unit disc*, Nihonkai Math. J. **29** (2018), No. 1, 51–65.

[11] T. Miura and N. Niwa, *Surjective isometries on a Banach space of analytic functions on the open unit disc, II*, Nihonkai Math. J. **31** (2020), No. 2, 75–91.

[12] T. Miura and N. Niwa, *Surjective isometries on a Banach space of analytic functions with bounded derivatives*, Acta Sci. Math. **89** (2023), No. 1–2, 109–145

[13] W.P. Novinger and D.M. Oberlin, *Linear isometries of some normed spaces of analytic functions*, Can. J. Math. **37** (1985), 62–74.

[14] N.V. Rao and A.K. Roy, *Linear isometries of some function spaces*, Pacific J. Math. **38** (1971), 177–192.

[15] M.H. Stone, *Applications of the theory of Boolean rings to general topology*, Trans. Amer. Math. Soc. **41** (1937), 375–481.