マルコフ作用素における周期的な部分 σ-加法族について

岩田　友紀子
YUKIKO IWATA
東北学院大学情報学部データサイエンス学科
DEPARTMENT OF DATA SCIENCE, FACULTY OF INFORMATICS, TOHOKU GAKUIN UNIVERSITY

1　はじめに

確率空間 (X, Σ, m) 上で定義された可積分関数の空間 $L^1(X, \Sigma, m)$ における線形作用素 $P : L^1(X, \Sigma, m) \to L^1(X, \Sigma, m)$ が以下の 3 つの条件：

(i) 任意の $f \in L^1(X, \Sigma, m)$ に対して，$f \geq 0 \Rightarrow Pf \geq 0$,
(ii) $P\mathbf{1}_X = \mathbf{1}_X$,
(iii) $P^*\mathbf{1}_X = \mathbf{1}_X$,

を満たすとき，P を **bi-stochastic マルコフ作用素**と呼ぶとする．ここで，P^* は P の共役作用素とする．上の条件 (ii) は

$$0 \leq f \in L^1(X, \Sigma, m) \quad \Rightarrow \quad \|f\|_1 = \|Pf\|_1$$

を満たすことと同値であるので，bi-stochastic マルコフ作用素は conservative positive contraction であることに注意する．

上で定義した bi-stochastic マルコフ作用素が **asymptotically periodic**([6] を参照) であるとは何が周期的な挙動を表しているかについて考察する．つまり，bi-stochastic マルコフ作用素に対して，ある自然数 $d \in \mathbb{N}$, ある全単射写像 $\alpha : \{1, \ldots, d\} \to \{1, \ldots, d\}$, $i \neq j$ のとき $g_i(x)g_j(x) = 0$ 満たす非負関数 $g_1, \ldots, g_d \in L^1(X, \Sigma, m)$ と，$L^1(X, \Sigma, m)$ 上の非負線形汎関数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ が存在し，全ての $i = 1, \ldots, d$ に対して $Pg_i = g_{\alpha(i)}$ を満たし，

$$\lim_{n\to\infty} \left\| P^n u - \sum_{i=1}^{d} \lambda_i(u) g_{\alpha^n(i)}(x) \right\|_1 = 0 \qquad \forall u \in L^1(X, \Sigma, m)$$

がどのような条件で成り立つかという事について，

1. bi-stochastic マルコフ作用素 P が asymptotic periodicity である場合，Σ の部分 σ-加法族 Σ_0 で，ある種の周期性がみられるものの存在,
2. 上で述べたある種の周期性がみられる部分 σ-加法族 Σ_0 の周期 k のサイクリックな atom $W \in \Sigma_0$ がもし存在するならば，W の部分集合 $A \subset W$ に対して，関数列 $\{P^{*nk}\mathbf{1}_A(x)\}$ が概収束するときの挙動,

の 2 点に注目し考察した.

概収束についての先行研究として，ボレル可測空間 (X, Σ) 上で定義された作用素 P が Harris-recurrent であるとき，即ち，σ-有限な測度 m に対して,

$$m(A) > 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} P^n \mathbf{1}_A(x) = \infty \quad \forall x \in X$$

を満たすとき，1979 年に S. Horowitz が以下を証明した ([4] を参照)；

- P が有限な不変測度 μ のもとで Harris-recurrent，かつ，aperiodic であるとき，任意の $f \in L^1(X, \Sigma, \mu)$ に対して,

$$\lim_{n \to \infty} P^n f(x) = \int_X f(x) d\mu \qquad \text{a.e.}$$

  が成り立つ.
- P が σ-有限な不変測度 μ のもとで Harris-recurrent であるとき，任意の $f \in L^p(X, \Sigma, \mu)$ $(1 \leq p < \infty)$ に対して,

$$\lim_{n \to \infty} P^n f(x) = 0 \qquad \text{a.e.}$$

  が成り立つ.

上の結果を踏まえて，確率空間上での作用素 P が bi-stochasic マルコフ作用素である場合について概収束を考察した.

2　周期的な部分 σ-加法族と結果

線形作用素 P を確率空間 (X, Σ, m) における bi-stochastic マルコフ作用素とし，P を $L^2(X, \Sigma, m)$ に制限したとき，集合

$$K = \{f \in \mathcal{H} : \|P^n f\| = \|P^{*n} f\| = \|f\|,\ n = 1, 2, \cdots\}$$

に対して，次の 3 つの Σ の要素の族を考える；

$$\Sigma_K = \{A \in \Sigma : \mathbf{1}_A \in K\},$$
$$\Sigma_i(P^k) = \{A \in \Sigma : P^k \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_A\} \qquad (k = 0, 1, 2, \dots),$$
$$\Sigma_d(P) = \{A \in \Sigma : P^n \mathbf{1}_A = \text{characteristic function for } n = 1, 2, \cdots\}.$$

Remark 2.1. *bi-stochastic* マルコフ作用素 P の定義より，P を $L^2(X, \Sigma, m)$ に制限した $P|_{L^2}$ を考えた場合，$P|_{L^2}$ の共役作用素 $\tilde{P}^*$ は $L^2(X, \Sigma, m)$ 上で P^* に一致することに注意する.

K と Σ_K に対して，次の命題が成り立つ (Foguel [2] の Theorem A, ChapVIII を参照).

Proposition 2.1 ([2]). *(X, Σ, m) を確率空間, 線形作用素 $P : L^2(X, \Sigma, m) \to L^2(X, \Sigma, m)$ を positive contraction とする．更に，条件 (ii) と (iii) を満たすとする．このとき，以下が成り立つ :*

(1) $K = \{f \in L^2(X, \Sigma, m) : P^n P^{*n} f = P^{*n} P^n f = f,\ n = 1, 2, \cdots\}$．更に，$K$ は線形空間であり，$PK,\ P^*K \subset K$ を満たす．ここで，P^* は P の共役作用素とする.

(2) 任意の $f \in K$ に対して，$|Pf| = P|f|$，かつ，$|P^*f| = P^*|f|$ が成り立つ.

(3) 任意の $A \in \Sigma_K$ に対して，$P\mathbf{1}_A$ と $P^*\mathbf{1}_A$ は特性関数となる.

(4) Σ_K は Σ の部分 σ-加法族となる.

(5) 各自然数 $k \in \mathbb{N}$ に対して，$\Sigma_i(P^k) \subset \Sigma_K$.

証明. (1) K の条件と P が contraction であることより，任意の $f \in K$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\|f\|^2 = \|P^n f\|^2 = \langle P^n f, P^n f\rangle = \langle P^{*n} P^n f, f\rangle \le \|P^{*n} P^n f\| \cdot \|f\| \le \|f\|^2$$

となるので，$\|f\|^2 = \langle P^{*n} P^n f, f\rangle$，かつ，$\|P^{*n} P^n f\| \le \|f\|$ を満たすので，コーシー・シュワルツの不等式の等号が成り立つ．従って $f = P^{*n} P^n f$ を得る．同様にして，P^* も L^2 上で contraction であることより，$f = P^n P^{*n} f$ を得る.

逆に，$f \in L^2$ が，全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して $f = P^{*n} P^n f = P^n P^{*n} f$ を満たすとする．このとき，

$$\|f\|^2 = \langle f, f\rangle = \langle P^{*n} P^n f, f\rangle = \langle P^n f, P^n f\rangle = \|P^n f\|^2$$

が成り立つ．同様に，$f = P^n P^{*n} f$ の場合も成り立つので，$\|f\|^2 = \|P^n f\|^2 = \|P^{*n} f\|^2$ を得る．以上より，

$$K = \{f \in L^2 : f = P^{*n} P^n f = P^n P^{*n} f,\ n = 1, 2, 3, \cdots\}.$$

また，上記の等式が成り立つことより，任意の $f \in K$ に対して，

$$\|P^n(P^*f)\| = \|P^{n-1}PP^*f\| = \|P^{n-1}f\| = \|f\|,$$

より，$Pf \in K$．同様に，$P^*f \in K$ が成り立つので，PK, $P^*K \subset K$ を得る．更に，P も P^* も線形作用素なので，任意の $f, g \in K$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して，

$$P^{*n}P^n(\alpha f + \beta g) = P^{*n}(\alpha P^n f + \beta P^n g) = \alpha P^{*n}P^n f + \beta P^{*n}P^n g = \alpha f + \beta g,$$
$$P^n P^{*n}(\alpha f + \beta g) = P^n(\alpha P^{*n} nf + \beta P^{*n} g) = \alpha P^n P^{*n} f + \beta P^n P^{*n} g = \alpha f + \beta g.$$

よって，K は線形空間となる．

(2) 任意の $f \in K$ に対して，$\|f\|_2 = \|Pf\|_2$ であることと，P は positive なので，$|Pf| \leq P|f|$ を満たす．従って，任意の $f \in K$ に対して，

$$\begin{aligned}\|P|f| - |Pf|\|_2^2 &= \int_X (P|f| - |Pf|)^2 m(dx) = \|P|f|\|_2 + \|Pf\|_2^2 - 2\langle P|f|, |Pf|\rangle \\ &\leq 2\|f\|_2^2 - 2\|Pf\|_2^2 = 0.\end{aligned}$$

よって，$|Pf| = P|f|$ a.e. 同様にして，$|P^*f| = P^*|f|$ a.e. が成り立つ．

(3) 任意の $A \in \Sigma_K$ に対して，

$$\begin{aligned}0 &= P(\mathbf{1}_A \wedge (\mathbf{1}_X - \mathbf{1}_A)) = P\left(\frac{\mathbf{1}_A + (\mathbf{1}_X - \mathbf{1}_A) - |\mathbf{1}_A - (\mathbf{1}_X - \mathbf{1}_A))|}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(P\mathbf{1}_A + (\mathbf{1}_X - P\mathbf{1}_A) - |P\mathbf{1}_A - (\mathbf{1}_X - P\mathbf{1}_A)|\right) \\ &= P\mathbf{1}_A \wedge (\mathbf{1}_X - P\mathbf{1}_A)\end{aligned}$$

となり，これは $P\mathbf{1}_A$ が特性関数であることを意味する．

(4) 条件 (ii) と (iii) より，$X \in \Sigma_K$ は明らか．更に，$A \in \Sigma_K$ と $n \in \mathbb{N}$ において, (1) の結果を用いると，

$$P^n P^{*n} \mathbf{1}_A^c = P^n P^{*n}(\mathbf{1}_X - \mathbf{1}_A) = \mathbf{1}_X - \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_{A^c},$$

が得られる．よって，$A^c \in \Sigma_K$．
一方，P が L^2 上の contraction であるので，$\|f\|_2 = \|P^n f\|_2 \leq \|P^n|f|\|_2 \leq \|f\|_2$ より，$|f| \in K$ であることと，K は線形空間であること ((1) の結果を参照) に注意すると，$A, B \in \Sigma_K$ において，

$$\mathbf{1}_{A\cup B} = \frac{\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B + |\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B|}{2} \in K,$$
$$\mathbf{1}_{A\cap B} = \frac{\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - |\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B|}{2} \in K,$$

より，$A \cup B,\ A \cap B \in \Sigma_K$.

最後に，単調増加な集合列 $\{A_n\} \subset \Sigma_K$ で，$\lim_{n\to\infty} A_n = A$ を満たすとき，A は有限測度を持つ集合なので，$\mathbf{1}_A \in L^2$ である．故に，

$$P^{*n}P^n\mathbf{1}_A = \lim_{n\to\infty} P^{*n}P^n\mathbf{1}_{A_n} = \lim_{n\to\infty}\mathbf{1}_{A_n} = \mathbf{1}_A,$$
$$P^nP^{*n}\mathbf{1}_A = \lim_{n\to\infty} P^{*n}P^n\mathbf{1}_{A_n} = \lim_{n\to\infty}\mathbf{1}_{A_n} = \mathbf{1}_A.$$

以上より，Σ_K は部分 σ-加法族となる．

(5) この命題の厳密な証明は長いので，今回は省くこととする．

□

Remark 2.2. 線形空間 K は閉部分空間となることが示される *(Foguel [2] の Theorem A, ChapVIII を参照)*.

σ-加法族 Σ_K が測度 m の下で purely atomicn になる場合，P のエルゴード性などいくつか良い性質が成り立つ；

Definition 2.1. 線形作用素 P を $L^1(X,\Sigma,m)$ 上の *bi-stochastic* マルコフ作用素とする．このとき，

(1) $P\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_A$ ならば $m(A)(1-m(A)) = 0$ が成り立つとき，P は **ergodic** と呼ぶ.

(2) 空ではない集合 $W \in \Sigma_K$ が周期 k のサイクリックな集合であるとは，$P^i\mathbf{1}_W = \mathbf{1}_{W_i}$ を満たすことである．ここで，$W_0 = W_k = W$ ，かつ，$0 \le i < j < k$ において，$W_i \cap W_j = \phi$ を満たすとする．

このとき，Remark 2.1 より，Proposition 2.1 が成り立つことに注意すると，k 周期のサイクリックな atom $W \in \Sigma_K$ に対して，作用素 $P^{nk}(n \in \mathbb{N})$ は，$L^1(W,\Sigma(W),m)$ 上で ergodic であることが示せる．

Proposition 2.2. 確率空間 (X,Σ,m) 上の *bi-stochastic* マルコフ作用素 $P : L^1(X,\Sigma,m) \to L^1(X,\Sigma,m)$ において，測度空間 (X,Σ_K,m) が *purely atomic*，かつ，k 周期のサイクリックな *atom*$W \in \Sigma_K$ が存在するならば，$P^k(\mathbf{1}_{W_i}\cdot f) = \mathbf{1}_{W_i}P^k$, $P^{*k}(\mathbf{1}_{W_i}\cdot f) = \mathbf{1}_{W_i}P^{*k}$ が成り立つ．更に，P^{nk} の $L^1(W,\Sigma(W),m)$ への制限は各 $n \in \mathbb{N}$ に対して *ergodic* である.

Proof. $0 \le j \le k-1$ に対して，$P^j\mathbf{1}_W = \mathbf{1}_{W_j}$ とおく．ここで，各 $0 \le f \le 1$ と $0 \le j \le k-1$ に対して, $P^k(\mathbf{1}_{W_j}\cdot f) = \mathbf{1}_{W_j}\cdot P^kf$ が成り立つことに注意する. 今，条件

(ii) と (iii) より，$P^k\mathbf{1}_{W_i} = \mathbf{1}_{W_i}$ と $P^k\mathbf{1}_{W_i^c} = \mathbf{1}_{W_i^c}$ を満たすので, 全ての $0 \le f \le 1$ に対して,

$$
\begin{aligned}
0 &\le \mathbf{1}_{W^c} P^k(\mathbf{1}_W \cdot f) \le \mathbf{1}_{W^c} P^k \mathbf{1}_W = 0, \\
0 &\le \mathbf{1}_W P^k(\mathbf{1}_{W^c} \cdot f) \le \mathbf{1}_W P^k \mathbf{1}_{W^c} = 0.
\end{aligned}
$$

が成り立つ．従って,

$$
P^k(\mathbf{1}_{W_i} \cdot f) = \mathbf{1}_{W_i} P^k(\mathbf{1}_{W_i} \cdot f) + \mathbf{1}_{W_i} P^k(\mathbf{1}_{W_i{}^c} \cdot f) = \mathbf{1}_{W_i} P^k f.
$$

共役作用素 P^* に対しても同様の議論から，${P^*}^k(\mathbf{1}_{W_i} \cdot f) = \mathbf{1}_{W_i} {P^*}^k f$ が全ての $0 \le f \le \mathbf{1}_X$ に対して満たされることが分かる．

次に，Proposition 2.1 の (5) より, $\Sigma_i(P^{nk}) \subset \Sigma_K$ が成り立つので, $A \subset W$ かつ $A = A \cap W \in \Sigma_K$ を満たす任意の $A \in \Sigma_i(P^{nk})$ に対して，W が k 周期のサイクリックな atom なので,

$$
\Sigma_i(P^{nk}, W) := \{A \subset W : \ P^{nk}\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_A\} = \{\phi, W\},
$$

が成り立つ．これは，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，$L^1(W, \Sigma(W), m)$ への制限 P^{nk} が ergodic であることを意味する．ここで，$\Sigma(W) = \{A \in \Sigma : \ A \subset W\}$.

□

ここで,

$$
h_{n,j}(x) = \sup\{({P^*}^{n+j} - {P^*}^n) f(x) \ : \ -1 \le f \le 1\}
$$

を定義する．ここで，右辺は $a.e.$ の意味での sup である．

上で定義した関数 $h_{n,j}(x)$ に対して次が成り立つ ([3]).

(1) $0 \le h_{n,j}(x) \le 2$ a.e.

(2) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$h_{n,j}(x) \ge h_{n+1,j}(x)$.

(3) 極限 $\lim_{n\to\infty} h_{n,j}(x)$ は定数 α_j に収束する．

更に，Foguel が，$P^* : L^\infty \to L^\infty$ が ergodic，かつ， conservative な positive contraction であるとき， 各固定された自然数 $j \in \mathbb{N}$ に対して，$\lim_{n\to\infty} h_{n,j}(x) = 0$，または，2 a.e. のどちらかが成り立つことを示した ([3] を参照)．これは，Ornstein と Sucheston による “The 0-2 law” として有名な論文の結果から導かれた結果である ([7] 参照)．これらの結果を踏まえて，以下の定理が導かれた ([5] 参照).

Proposition 2.3. 確率空間 (X, Σ, m) 上の *bi-stochastic* マルコフ作用素 $P : L^1(X, \Sigma, m) \to L^1(X, \Sigma, m)$ と，*purely atomic* な測度空間 (X, Σ_K, m) において，$W \in \Sigma_K$ を k 周期のサイクリック *atom* とし，$X = \bigcup_{i=0}^{k-1} W_i$ を満たすとする．このとき，もし

$$\lim_{n\to\infty} h_{nk,k}(x) = 0 \qquad \textit{a.e.}$$

を満たすならば,

$$\lim_{n\to\infty} \left\| P^{nk}u - \frac{1}{m(W)} \sum_{i=0}^{k-1} \langle u, \mathbf{1}_{W_i} \rangle \cdot \mathbf{1}_{W_i} \right\|_1 = 0$$

が全ての $u \in L^1(X, \Sigma, m)$ に対して成り立つ.

Proof. まず，$P\mathbf{1}_X = \mathbf{1}_X = P^*\mathbf{1}_X$ なので,

$$m(W_i) = \langle P^i \mathbf{1}_W, \mathbf{1}_X \rangle = \langle \mathbf{1}_W, P^{*i} \mathbf{1}_X \rangle = \langle \mathbf{1}_W, \mathbf{1}_X \rangle = m(W)$$

が各 $0 \leq i \leq k-1$ に対して成り立つことに注意する. 更に, $P^k \mathbf{1}_{W_i} = \mathbf{1}_{W_i}$ であるので,

$$P^{nk} \left(\frac{1}{m(W)} \sum_{i=0}^{k-1} \langle u, \mathbf{1}_{W_i} \rangle \cdot \mathbf{1}_{W_i} \right) = \frac{1}{m(W)} \sum_{i=0}^{k-1} \langle u, \mathbf{1}_{W_i} \rangle \cdot \mathbf{1}_{W_i}$$

が全ての $u \in L^1(X, \Sigma, m)$ に対して成り立つ.

各 $u \in L^1(X, \Sigma, m)$ において,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left\| P^{nk}(I - P^k)u \right\|_1 &= \lim_{n\to\infty} \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} \left| \langle P^{nk}(I - P^k)u, f \rangle \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} \left| \langle u, P^{*nk}(I - P^{*k})f \rangle \right| \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} \langle |\, u|\, , |\, P^{*nk}(I - P^{*k})f|\, \rangle \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \langle |\, u|\, , H_{nk,k} \rangle = 0.
\end{aligned}$$

従って，$u \in L^1(X, \Sigma, m)$ を任意にとって固定する．$g_A = u - \frac{1}{m(W)} \sum_{i=0}^{k-1} \langle u, \mathbf{1}_{W_i} \rangle \cdot \mathbf{1}_{W_i}$ とおくと，Proposition 2.2 より，$L^1(W_i)$ への制限 P^k は ergodic である. 従って，$L^1(W_i)$ への制限 P^k に Ornstein と Sucheston の論文 [7] での Corollary 1.3 を当てはめると,

$$\lim_{n\to\infty} \|P^{nk}u\|_{L^1(W_i)} = 0 \qquad \text{for all } u \in L^1(W_i) \text{ with } \int_{W_i} udm = 0$$

が各 $0 \leq i < k$ に対して成り立つ. このとき，各 $0 \leq j < k$ と $u \in L^1(X, \Sigma, m)$ に対して，

$$\begin{aligned}\int_{W_j} g_A dm &= \int_{W_j} \left(u - \frac{1}{m(W)} \sum_{i=0}^{k-1} \langle u, \mathbf{1}_{W_i} \rangle \cdot \mathbf{1}_{W_i} \right) dm \\ &= \left\langle u, \mathbf{1}_{W_j} \right\rangle - \langle u, \mathbf{1}_{W_j} \rangle = 0\end{aligned}$$

を得るので，$\lim_{n\to\infty} \|P^{nk} g_A\|_{L^1(W_i)} = 0$ が成り立つ． よって，$g_A = \sum_{i=0}^{k-1} (\mathbf{1}_{W_i} \cdot g_A)$ より，

$$\lim_{n\to\infty} \|P^{nk} g_A\|_1 = \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{i=0}^{k-1} (\mathbf{1}_{W_i} \cdot P^{nk} g_A) \right\|_1 \leq \sum_{i=0}^{k-1} \left(\lim_{n\to\infty} \|P^{nk} g_A\|_{L^1(W_i)} \right) = 0$$

が成り立つ． これは，P^kasymptotically periodic であることを意味する． □

更に，以下の２つの定理が成り立つ ([5])；

Theorem 2.1. 確率空間 (X, Σ, m) 上の *bi-stochastic* マルコフ作用素 $P : L^1(X, \Sigma, m) \to L^1(X, \Sigma, m)$ と，*purely atomic* な測度空間 (X, Σ_K, m) において， $W \in \Sigma_K$ を k 周期のサイクリック *atom* とし，$X = \bigcup_{i=0}^{k-1} W_i$ を満たすとする．このとき，もし任意の $A \subset W_i$ と $0 \leq i \leq k-1$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty} P^{*nk} \mathbf{1}_A(x) = \frac{m(A)}{m(W)} \mathbf{1}_{W_i}(x) \qquad a.e.$$

を満たすならば，$\lim_{n\to\infty} h_{nk,k}(x) = 0$ *a.e.* が成り立つ．

Theorem 2.2 (2023)**.** 確率空間 (X, Σ, m) 上の *bi-stochastic* マルコフ作用素 $P : L^1(X, \Sigma, m) \to L^1(X, \Sigma, m)$ と，*purely atomic* な測度空間 (X, Σ_K, m) において， $W \in \Sigma_K$ を k 周期のサイクリック *atom* とし， $X = \bigcup_{i=0}^{k-1} W_i$ を満たすとする．このとき，もし任意の $x \in X$ と $A \subset W_i$ *(*$0 \leq i \leq k-1$*)* に対して， ある列 $\{M_n(x)\}$ で全ての $m \geq 1$ に対して $\lim_{n\to\infty} M_n(x) = 0$ を満たすものが存在し，

$$|\, P^{*nk}(I - P^{*mk}) \mathbf{1}_A(x)| \leq M_n(x) \qquad a.e.,$$

を満たすとしたら，

$$\lim_{n\to\infty} P^{*nk} f(x) = \frac{1}{m(W)} \sum_{i=0}^{k-1} \langle f, \mathbf{1}_{W_i} \rangle \mathbf{1}_{W_i}(x) \quad a.e.$$

が全ての $f \in L^\infty(X, \Sigma, m)$ に対して成り立つ．

※このとき，M_n は x と $A \subset W_i$ に依存することに注意する．

上記の定理を満たす例として，積分作用素があげられる ([1] を参照)；

Example 2.1. 閉区間 $[0,1]$ 上で定義されたルベーグ測度を λ とし，可測関数 $k:[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}$ を

$$k(x,y)=\begin{cases}2 & (x,y)\in\left(\left[0,\frac{1}{2}\right]\times\left[\frac{1}{2},1\right]\right)\cup\left(\left[\frac{1}{2},1\right]\times\left[0,\frac{1}{2}\right]\right),\\ \\ 0 & \textit{otherwise},\end{cases}$$

と定義する．このとき，

$$Pf(x)=\int_{[0,1]}k(x,y)f(y)\lambda(dy)$$

と定義すると，$P:L^1([0,1],\lambda)\to L^1([0,1],\lambda)$ は *ergodic bi-stochastic* マルコフ作用素となり，実際には，

$$Pf=-f \qquad \textit{for} \quad f=\mathbf{1}_{[0,\frac{1}{2}]}-\mathbf{1}_{[\frac{1}{2},1]}.$$

を満たす，周期 2 の *Harris* 作用素となる．従って，*Theorem 2.1, 2.2* を満たす．

参考文献

[1] G. Cohen, M. Lin, L^2-Quasi-compact and hyperbounded Markov operators, arXiv:2206.08003.

[2] S. R. Foguel, *The ergodic theory of Markov processes*, Van Nostrand Mathematical Studies 21, New York, 1969.

[3] S. R. Foguel, A new approach to the study of Harris type Markov operators, Rocky Mountain Journal of Mathematicas. 19(1989), 491-512.

[4] S. Horowitz, Pointwise convergence of the iterates of a harris-recurrent Markov operator, Israel Journal of Mathematics. 33 (1979), 177-180.

[5] Y. Iwata, Almost everywhere convergence of the iterates of a bi-stochastic Markov operator, Positivity (2023), preprint.

[6] A. Lasota; M.C. Mackey, Chaos, fractals, and noise. Stochastic aspects of dynamics, Second edition. Applied Mathematical Sciences, 97. Springer-Verlag, New York, (1994).

[7] D. Ornstein, L. Sucheston, An operator theorem on L^1 convergence to zero with applications to Markov kernels, Ann. Math. Stat. 41 (1970), 1631-1639.