ランダム連続写像の作用発展に対する情報系分解

矢野 孝次 (大阪大学)

無限過去を持つ時間発展であって iid のランダム連続写像により駆動されるものについて，観測過程の情報系を駆動ノイズ，無限過去ノイズと第三ノイズからなる三つの独立成分へと分解する問題に対し，これまでの研究ではいくつかの特別な状況下において論じてきた．本稿では，観測過程がコンパクトポーランド空間に値をとる場合について，ポーランド半群上の Rees 分解と無限畳み込みの理論を用いて，かなり一般の枠組みでこの問題を解決した結果を紹介する．この結果は，鷹野岳氏との共同研究 [3] に基づく．

1　導入

可測空間 V に値をとる確率過程 $X = \{X_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ は，V の可測変換に値をとる iid ランダム写像列 $N = \{N_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ により順次写されて

$$X_k = N_k X_{k-1} \quad \mathbb{P}\text{-a.s. for } k \in \mathbb{Z} \tag{1.1}$$

を満たすとする (但し，点 v の写像 f による像 $f(v)$ を単に fv と表す)．これを**作用発展**と呼ぶ．正確に言うと，V の可測変換のあるクラス S_0 に可測構造が入っていて，その上の確率測度 μ が与えられたときに，$\{X, N\}$ が **μ-evolution** であるとは, $\{X, N\}$ が式 (1.1) を満たし，かつ各時刻 k で N_k が共通の分布 μ を持ち過去の情報

$$\mathcal{F}^{X,N}_{k-1} := \sigma(X_j, N_j : j \le k-1) \tag{1.2}$$

と独立であることを言う．このとき, 二次元過程 (X, N) は $\mathbb{Z}$ で添字付けられた $V \times S_0$-値 Markov 過程であり, その推移確率は次で与えられる:

$$\mathbb{P}\Big((X_k, N_k) \in \cdot \;\Big|\; \mathcal{F}^{X,N}_{k-1}\Big) = \mu\Big\{\sigma \in S_0 : (\sigma x, \sigma) \in \cdot\Big\}\Big|_{x=X_{k-1}}. \tag{1.3}$$

さらに，μ-evolution が**定常**であるとは，(X, N) の分布がシフト不変であること，すなわち $(X_{k+1}, N_{k+1})_{k\in\mathbb{Z}} \overset{\mathrm{d}}{=} (X_k, N_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ なることを言う．

情報系分解問題とは，$\{X, N\}$ を μ-evolution とするとき，**全体ノイズ**

$$\mathcal{F}^{X,N}_k := \sigma(X_j, N_j : j \le k) \tag{1.4}$$

の分解

$$\mathcal{F}^{X,N}_k = \mathcal{F}^N_k \vee \mathcal{F}^X_{-\infty} \vee \mathcal{H}_k \quad \mathbb{P}\text{-a.s. for } k \in \mathbb{Z} \tag{1.5}$$

であって，三つの情報系 $\mathcal{F}_k^N$，$\mathcal{F}_{-\infty}^X, \mathcal{H}_k$ が独立であるような適当な情報系 $\mathcal{H}_k$ を見つける問題である．但し，$\bigvee_\lambda \mathcal{F}_\lambda = \sigma(\bigcup_\lambda \mathcal{F}_\lambda)$ および $\mathcal{F}_{-\infty}^X := \bigcap_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}_k^X$ である．**駆動ノイズ** $\mathcal{F}_k^N$ を第一ノイズ，**無限過去** $\mathcal{F}_{-\infty}^X$ を第二ノイズと考えるとき，この問題は**第三ノイズ** $\mathcal{H}_k$ を如何にして見出すかという問題である．もう少し強い主張として，駆動ノイズの部分系 $\mathcal{G}_k^N \subset \mathcal{F}_k^N$ を見つけて**観測ノイズ** $\mathcal{F}_k^X = \sigma(X_j : j \le k)$ の独立成分への分解

$$\mathcal{F}_k^X = \mathcal{G}_k \vee \mathcal{F}_{-\infty}^X \vee \mathcal{H}_k \quad \mathbb{P}\text{-a.s. for } k \in \mathbb{Z} \tag{1.6}$$

を得ることができれば，全体ノイズの情報系分解 (1.5) が得られる．もう少し詳しい背景および易しい具体例を [6] にて扱っているので参照されたい．

2 Rees 分解

位相半群における Rees 分解と無限畳み込みの理論のうちから必要なものを紹介しよう．詳しくは，教科書 [2] および論文 [4] を参照されたい．

S_0 を位相半群とする．すなわち，S_0 は位相の入った半群であり，積演算 $S_0 \times S_0 \ni (f,g) \mapsto fg \in S_0$ が連続なるものである．さらに，S_0 の位相はポーランド，すなわち，その位相を導くような完備可分距離を持つとする．S_0 上の確率測度全体を $\mathcal{P}(S_0)$ で表す．$\mu \in \mathcal{P}(S_0)$ に対し，μ の位相的サポートを

$$\mathcal{S}(\mu) = \{x \in S_0 : \mu(U) > 0 \text{ for all open neighborhood } U \text{ of } x\} \tag{2.1}$$

と表す．$\mu_1, \mu_2 \in S_0$ に対し，その**畳み込み**が

$$\mu_1 * \mu_2(B) = \iint 1_B(fg)\,\mu_1(\mathrm{d}f)\,\mu_2(\mathrm{d}g) \tag{2.2}$$

で定まり，

$$\mathcal{S}(\mu_1 * \mu_2) = \overline{\mathcal{S}(\mu_1)\mathcal{S}(\mu_2)} \tag{2.3}$$

が成り立つ．$\mu \in \mathcal{P}(S_0)$ に対し，μ の n 回畳み込みを μ^n で表す．$\mathcal{P}(S_0)$ は畳み込みに関して半群の構造を持つ．さらに，確率測度の弱収束の位相を入れると，$\mathcal{P}(S_0)$ はポーランド半群である．

半群 S_0 において，$e^2 = e$ を満たす元を**ベキ等元**と呼び，ベキ等元の全体を $E(S_0)$ で表す．

定理 2.1 (Rees 分解). $\mu \in \mathcal{P}(S_0)$ とし，$S = \overline{\bigcup_n \mathcal{S}(\mu)^n}$ とする．$\{\mu^n\}_{n=1}^\infty$ は tight であると仮定する．このとき，以下が成り立つ．

(i) $\{\mu^n\}_{n=1}^\infty$ の部分列極限全体を $\mathcal{K}$ と表すとき，$\mathcal{K}$ はコンパクトアーベル群であり，その単位元を η と書くと，次式が成り立つ:

$$\mathcal{K} = \overline{\{\eta, \mu * \eta, \mu^2 * \eta, \ldots\}}. \tag{2.4}$$

(ii) ある $\nu \in \mathcal{P}(S_0)$ が存在して，

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mu^k \to \nu \tag{2.5}$$

および次式が成り立つ:

$$\mathcal{S}(\nu) = \{f \in S : \text{すべての } s \in S \text{ は } fV \text{ 上で単射}\}. \tag{2.6}$$

(iii) $e \in E(\mathcal{S}(\eta))$ を一つとり (必ずとれる) 固定して，

$$L = E(\mathcal{S}(\eta)e),\ R = E(e\mathcal{S}(\eta)),\ G = e\mathcal{S}(\nu)e,\ H = e\mathcal{S}(\eta)e \tag{2.7}$$

とおく．このとき，G はコンパクト群，H は G のコンパクト正規部分群であり，積分解 $\mathcal{S}(\eta) = LHR$ および $\mathcal{S}(\nu) = LGR$ が成り立ち，積写像

$$L \times H \times R \ni (f, g, h) \mapsto fgh \in \mathcal{S}(\eta), \quad L \times G \times R \ni (f, g, h) \mapsto fgh \in \mathcal{S}(\nu)$$

はいずれも同相写像である．それらの逆写像を次のように表す:

$$\mathcal{S}(\eta) \ni z \mapsto (z^L, z^H, z^R) \in L \times H \times R, \quad \mathcal{S}(\nu) \ni z \mapsto (z^L, z^G, z^R) \in L \times G \times R.$$

(iv) η の L 成分および R 成分への射影をそれぞれ

$$\eta_L = \eta(z : z^L \in \cdot), \quad \eta_R = \eta(z : z^R \in \cdot) \tag{2.8}$$

で定めると，η と ν の畳み込み分解が得られる:

$$\eta = \eta_L * \omega_H * \eta_R, \quad \nu = \eta_L * \omega_G * \eta_R. \tag{2.9}$$

但し，ω_H および ω_G はそれぞれ H および G の標準ハール測度である．

(v) ある $\gamma \in G$ が存在して $G/H = \overline{\{H, \gamma H, \gamma^2 H, \ldots\}}$ が成り立ち，

$$\mu^i * \eta = \eta_L * \omega_{\gamma^i H} * \eta_R \quad (i = 1, 2, \ldots) \tag{2.10}$$

が成り立つ．但し，$\omega_{\gamma^i H} = \delta_{\gamma^i} * \omega_H$ とした．

一般に，コンパクト群 G とそのコンパクト部分群 H に対し，可測写像 $\boldsymbol{s} : G/H \to G$ であって

$$\boldsymbol{s}(gH)H = gH \quad (g \in G) \tag{2.11}$$

を満たすものが存在する ([1, Exercise 8.4] を参照．これを**可測 section** と呼ぶ).

3 情報系分解

V をコンパクトポーランド空間とし，$S_0 = C(V, V)$ を V から V への連続写像全体に一様位相を入れたものとする．S_0 は写像の合成によってポーランド半群の構造を持つので，前節の理論を適用することができる．まず，特別な場合の情報系分解を述べよう．

定理 3.1. 定理 2.1 と同じ仮定と記号の下で，$\{Y, N\}$ は LG-valued の定常 μ-evolution であるとする．さらに，L はコンパクトであると仮定する．このとき，以下が成り立つ．

(i) ある G/H-valued 確率変数 C と，H-値確率変数 $U_k \overset{\mathrm{d}}{=} \omega_H$ が存在して

$$Y_k^G = \boldsymbol{s}(\gamma^k C) U_k \quad \text{a.s. for } k \in \mathbb{Z} \tag{3.1}$$

が成り立つ．

(ii) $j < k$ に対して $M_{k,j}^G = Y_k^G (Y_{j-1}^G)^{-1}$ とおくとき，$M_{k,j}^G$ はノイズ $\mathcal{F}_k^N$-可測であって，

$$Y_j = Y_j^L (M_{k,j}^G)^{-1} \boldsymbol{s}(\gamma^k C) U_k \quad \text{a.s. for } j \le k,\ k \in \mathbb{Z} \tag{3.2}$$

が成り立つ (但し，$M_{k,k}^G = e$ とした)．

(iii) 観測過程 Y の情報系分解

$$\mathcal{F}_k^Y = \mathcal{G}_k^N \vee \mathcal{F}_{-\infty}^Y \vee \sigma(U_k) \quad \text{a.s. for } k \in \mathbb{Z} \tag{3.3}$$

が成り立つ．但し，$M_j^G := Y_j^G (Y_{j-1}^G)^{-1}$ として

$$\mathcal{G}_k^N := \sigma(Y_j^L, M_j^G : j \le k) \quad \text{a.s. for } k \in \mathbb{Z} \tag{3.4}$$

$$\mathcal{F}_{-\infty}^Y = \sigma(C) \quad \text{a.s.} \tag{3.5}$$

であり，三つの情報系 $\mathcal{G}_k^N$, $\mathcal{F}_{-\infty}^Y$, $\sigma(U_k)$ は独立である．

一般の場合の情報系分解は，定理 3.1 を用いて与えられる．少し一般化した形で与えよう．

定理 3.2. 定理 2.1 と同じ仮定と記号の下で，$\{Y, N\}$ は LG-valued の定常 μ-evolution であるとする．V_0 はポーランド空間であって，S が連続に作用すると仮定する．ある eV_0 のコンパクト部分集合 W が存在して，積写像

$$L \times G \times W \ni (x, g, w) \mapsto xgw \in V_0 \tag{3.6}$$

が全単射可測かつその逆写像

$$V_0 \ni z \mapsto (z^L, z^G, z^W) \in L \times G \times W \tag{3.7}$$

も可測と仮定する．$\{X, N\}$ を V_0-値定常 μ-evolution とする．このとき，以下が成り立つ．

(i) $Y_k := eX_k = X_k^L X_k^G$ とおくと，$\{Y, N\}$ は LG-値定常 μ-evolution である．従って，定理 3.1 が適用できる．

(ii) ある W-値確率変数 Z が存在して，$X_k^W = Z$ a.s. for $k \in \mathbb{Z}$ が成り立つ．

(iii) $M_{k,j}^G =: Y_k^G (Y_{j-1}^G)^{-1} = X_k^G (X_{j-1}^G)^{-1}$ に対して，

$$X_j = Y_j^L (M_{k,j}^G)^{-1} \boldsymbol{s}(\gamma^k C) U_k Z \quad \text{a.s. for } j \le k,\, k \in \mathbb{Z} \tag{3.8}$$

が成り立つ．

(iv) 観測過程 X の情報系分解

$$\mathcal{F}_k^X = \mathcal{G}_k^N \vee \mathcal{F}_{-\infty}^X \vee \sigma(U_k) \quad \text{a.s. for } k \in \mathbb{Z} \tag{3.9}$$

が成り立つ．但し，$M_j^G := Y_j^G (Y_{j-1}^G)^{-1} = X_j^G (X_{j-1}^G)^{-1}$ として

$$\mathcal{G}_k^N := \sigma(Y_j^L, M_j^G : j \le k) \quad \text{a.s. for } k \in \mathbb{Z} \tag{3.10}$$

$$\mathcal{F}_{-\infty}^X = \sigma(C, Z) \quad \text{a.s.} \tag{3.11}$$

であり，三つの情報系 $\mathcal{G}_k^N, \mathcal{F}_{-\infty}^Y, \sigma(U_k)$ は独立である．さらに，C と Z も独立である．

4　例

今回の一般化によって，状態空間として，マルコフ連鎖のパス空間をとる場合を扱うことができるようになった．そのような例を紹介したい．以下，有限集合 V に対し，V に値をとるパスの空間を

$$\widetilde{V} := V^\infty := \left\{ \vec{v} = (\ldots, v_{-2}, v_{-1}, v_0) : v_i \in V \ (i \in \mathbb{Z}_-) \right\} \tag{4.1}$$

と書く．

4.1　ランダム縮小写像による作用発展

V を三点集合 $V = \{1, 2, 3\}$ とし，$a \in V$ に対して写像 $\phi_a : \widetilde{V} \to \widetilde{V}$ を

$$\phi_a(\vec{v}) = (\vec{v}, a) = (\ldots, v_{-1}, v_0, a) \tag{4.2}$$

で定める．このとき，$\widetilde{V}$ はシェルピンスキーガスケット，$\{\phi_a : a \in V\}$ はその縮小写像からなる生成系と考えることができる．確率測度 $\widetilde{\mu}$ を

$$\widetilde{\mu} = \frac{1}{3}\delta_{\phi_1} + \frac{1}{3}\delta_{\phi_2} + \frac{1}{3}\delta_{\phi_3} \tag{4.3}$$

で定めよう．このとき，$\{\widetilde{\mu}^n\}$ は tight となる．

対応する Rees 分解における構成要素 $\widetilde{L}$, $\widetilde{G}$, $\widetilde{R}$ を与えよう．$\vec{v} \in \widetilde{V}$ に対し，定値写像 $\widetilde{V} \to \widetilde{V}$ を

$$\iota_{\vec{v}}(\cdot) = \vec{v} \tag{4.4}$$

で定める．そこで

$$\widetilde{e} = \iota_{\vec{1}}, \quad \vec{1} = (\dots, 1, 1, 1) \in \widetilde{V} \tag{4.5}$$

と定める．このとき，$\widetilde{e}\widetilde{V} = \{\vec{1}\}$ であり，

$$\widetilde{L} = \{\iota_{\vec{v}} : \vec{v} \in \widetilde{V}\}, \quad \widetilde{G} = \widetilde{R} = \{\widetilde{e}\} \tag{4.6}$$

と与えられる．

V 上の一様分布に従う iid 列 $\{U_k\}$ をとるとき，

$$\vec{U} = (\dots, U_{-2}, U_{-1}, U_0) \tag{4.7}$$

はシェルピンスキーガスケット $\widetilde{V}$ 上の一様分布確率変数とみなすことができる．この状況下で，$\{\widetilde{\mu}^n\}$ の部分列極限点の全体は $\eta = \eta^{\widetilde{L}}$ のみから成るので

$$\widetilde{\mu}^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \eta^{\widetilde{L}} \tag{4.8}$$

が成立しており，$\eta^{\widetilde{L}}$ は $\vec{U}$ の分布と等しいことが分かる．定常 $\widetilde{\mu}$-evolution

$$\widetilde{X}_k = \widetilde{N}_k \widetilde{X}_{k-1} \tag{4.9}$$

は，式 (3.8) より

$$\widetilde{X}_k = Y_k^{\widetilde{L}} \widetilde{1} \quad \text{a.s. for } k \in \mathbb{Z} \tag{4.10}$$

の形をしているので，観測過程の情報系は駆動ノイズのみからなることが分かる．

4.2　第三ノイズが生ずる作用発展

V を五点集合 $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ とし，写像 $f, g : V \to V$ を

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

で与えられる置換と定める．こうして

$$\mu = \frac{1}{2}\delta_f + \frac{1}{2}\delta_g \tag{4.12}$$

と定めるとき，対応する Rees 分解における構成要素 L, G, H, R は,

$$e = g^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

として

$$L = \{e, fe\}, \quad G = H = \{e, g, g^2, ef^2, gf^2, g^2f^2\}, \quad R = \{e, ef\} \tag{4.14}$$

で与えられる．ここで

$$V_0 = \Big\{\text{permutations of } (2,4,5) \text{ or } (1,3,5)\Big\}, \quad W = \{(2,4,5)\} \tag{4.15}$$

として定理 3.1 と定理 3.2 を適用することができ，H が空でないことから第三ノイズは自明ではない．詳しくは [5] を参照されたい．

上で与えた写像 f, g に対し，パス空間の変換 $\phi_f, \phi_g : \widetilde{V} \to \widetilde{V}$ を

$$\phi_f(\vec{v}) = (\vec{v}, fv_0) = (\ldots, v_{-1}, v_0, fv_0) \tag{4.16}$$

$$\phi_g(\vec{v}) = (\vec{v}, gv_0) = (\ldots, v_{-1}, v_0, gv_0) \tag{4.17}$$

で定め,

$$\widetilde{\mu} = \frac{1}{2}\delta_{\phi_f} + \frac{1}{2}\delta_{\phi_g} \tag{4.18}$$

と定める．このとき，$\{\widetilde{\mu}^n\}$ は tight となる．

対応する Rees 分解における構成要素 $\widetilde{L}$, $\widetilde{G}$, $\widetilde{R}$ を与えよう．$\widetilde{e} : \widetilde{V} \to \widetilde{V}$ および $\vec{e} : V \to \widetilde{V}$ を

$$\widetilde{e}(\vec{v}) = \vec{e}(v_0) = (\ldots, g, g^2, e, g, g^2, e)(v_0) \quad \Big(\vec{v} = (\ldots, v_{-1}, v_0) \in \widetilde{V}\Big) \tag{4.19}$$

で定める．また，$K = LGR$ として

$$K_\mu^\infty = \Big\{\vec{h} = (\ldots, h_{-2}, h_{-1}, h_0) \in K^\infty : h_k \in \mathcal{S}(\mu)h_{k-1} \ (k \in \mathbb{Z})\Big\} \tag{4.20}$$

とおく．また，各 $\vec{h} \in K_\mu^\infty$ に対し,

$$\psi_{\vec{h}}(\vec{v}) = \vec{h}(v_0) = (\ldots, h_{-2}, h_{-1}, h_0)(v_0) \quad \Big(\vec{v} = (\ldots, v_{-1}, v_0) \in \widetilde{V}\Big) \tag{4.21}$$

と定める．このとき,

$$\widetilde{K} = \widetilde{L}\widetilde{G}\widetilde{R} = \{\psi_{\vec{h}} : \vec{h} \in K_\mu^\infty\} \tag{4.22}$$

$$\widetilde{L} = \{\psi_{\vec{h}} : \vec{h} \in K_\mu^\infty, \ h_0 \in L\} \tag{4.23}$$

$$\widetilde{G} = \widetilde{H} = \{\widetilde{e}\phi_h : h \in G\} \tag{4.24}$$

$$\widetilde{R} = \{\widetilde{e}\phi_h : h \in R\} \tag{4.25}$$

で与えられる．

$\{\widetilde{Y}, \widetilde{N}\}$ を $\widetilde{L}\widetilde{G}$-valued の定常 $\widetilde{\mu}$-evolution とするとき，

$$\widetilde{Y}_k = \psi_{\vec{Y}_k}, \quad \widetilde{N}_k = \phi_{N_k} \tag{4.26}$$

によって K_μ^∞-valued の確率変数 $\vec{Y}_k$ および $\{f, g\}$-valued の確率変数 N_k を導入すると，

$$\vec{Y}_k = (\ldots, Y_{k-2}, Y_{k-1}, Y_k) \quad (k \in \mathbb{Z}) \tag{4.27}$$

となるような LG-valued の確率変数列 $\{Y_k\}$ を定めることができて，

$$Y_k = N_k Y_{k-1} \quad (k \in \mathbb{Z}) \tag{4.28}$$

を満たす．従って，$\{Y, N\}$ は LG-valued の定常 μ-evolution となる．よって $\eta^{\widetilde{L}}$ は

$$\widetilde{Y}_0^{\widetilde{L}} = \psi_{\vec{Y}_0}^{\widetilde{L}} = \psi_{\vec{Y}_0(Y_0^G)^{-1}} \tag{4.29}$$

の分布で与えられる．

参考文献

[1] D. L. Cohn. *Measure theory.* Birkhäuser Advanced Texts: Basler Lehrbücher. [Birkhäuser Advanced Texts: Basel Textbooks]. Birkhäuser/Springer, New York, second edition, 2013.

[2] G. Högnäs and A. Mukherjea. *Probability measures on semigroups.* Probability and its Applications (New York). Springer, New York, second edition, 2011. Convolution products, random walks, and random matrices.

[3] G. Takano and K. Yano. Resolution of sigma-fields for action evolutions driven by random continuous mappings. In preparation.

[4] K. Yano. Infinite convolutions of probability measures on Polish semigroups. *Probab. Surv.*, 19:129–159, 2022.

[5] 伊藤悠・世良透・矢野孝次. 多粒子有限状態の無限過去を持つ時間発展に対する情報系分解問題. 確率論シンポジウム, 数理解析研究所講究録, 2116:76–84, 2019.

[6] 矢野孝次. 無限過去を持つ時間発展の情報系分解問題について. ランダム力学系理論の総合的研究, 数理解析研究所講究録, 2115:135–139, 2019.