マルコフ作用素の収縮性からみたランダム写像に対する物理測度の有限性

中村 文彦（北見工業大学）

1. はじめに

Palis 予想として知られる歴史的な問い「“有限個” のアトラクタを持つ力学系はどの程度存在するか」に対して, 例えば S.Newhouse は, ホモクリニック接触をもつ微分同相写像の近傍に無限個のアトラクタを有する力学系を豊富に構成できることを証明し, その後この結果は J.Palis, M.Viana, L.J.Díaz らによってより広いクラスに拡張された [11, 14, 15, 16, 17]. また無限個のアトラクタの存在が, 高次元多様体上の自己同型群のパラメトリック族において局所的に Kolmogorov 典型であることなども確認されている [5, 6, 7, 9, 10]. 一方で, Araújo [1] は, ランダム力学系の枠組みでこのアトラクタの有限性と, そのアトラクタ上での物理測度を与える十分条件を提示した.

本原稿では, Araújo の結果をマルコフ作用素の観点から再考することで, 物理測度の有限性に対する必要十分条件を得た結果について紹介する. 詳細は [4][1]を参照せよ. また作用素の性質として知られるいくつかの “収縮性” の階層構造について言及し, その各階層の違いを示すための具体例を紹介する. この階層構造の中に現れる “平均収縮性” と呼ばれる性質が物理測度の有限性と同値となる.

2. 物理測度の有限性

X をポーランド空間, $\mathscr{B}$ をそのボレル σ-加法族, m を X 上の確率測度とする. $(T, \mathscr{A}, p)$ を確率空間とし, その無限直積空間 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) = (T^{\mathbb{N}}, \mathscr{A}^{\mathbb{N}}, p^{\mathbb{N}})$ を考える. 可測写像 $f : T \times X \to X$ を与え, $t \in T$ に対して $f_t = f(t, \cdot)$ と記述する. このとき, 次の非自励反復合成を考える.

$$f_\omega^0 = \mathrm{id} \quad \text{および} \quad f_\omega^n = f_{\omega_n} \circ \cdots \circ f_{\omega_1} \quad (n \in \mathbb{N}, \omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots) \in \Omega).$$

ここで, Ω 上のベルヌーイ確率 $\mathbb{P} = p^{\mathbb{N}}$ を与えるために, 各ステップにおけるノイズ $\{\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots) \mapsto \omega_n\}_{n \geq 1}$ は独立同分布に選ばれるとする.

定義 2.1. f が**有限個の物理測度を持つ**（あるいは (FPM)[2] を満たす）とは, 以下の条件を満たす有限個のエルゴード的不変確率測度 $\mu_1, \ldots, \mu_r$ が存在するときをいう.

1) それらは m に関して絶対連続である.
2) それらは互いに（m-零集合を除いて）交わらない台を持つ.

[1]本研究は, Pablo G. Barrientos, Yushi Nakano, Hisayoshi Toyokawa らとの論文 [4] に基づくものである.
[2]finitely many physical measure を略して (FPM) と表す.

3) 任意の $\mathscr{B}$-可測な有界実関数 ψ に対して,

$$m\left(B_\omega(\mu_1,\psi)\cup\cdots\cup B_\omega(\mu_r,\psi)\right)=1\quad(\mathbb{P}\text{-a.e.}\omega\in\Omega).$$

ただし,

$$B_\omega(\mu_i,\psi)=\left\{x\in X:\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\psi(f_\omega^j(x))=\int\psi\,d\mu_i\right\}\quad(i=1,\ldots,r).$$

3) から, 零集合を除くどのようなノイズ列 ω に対しても, それに依存して推移する軌道 $f_\omega^j(x)$ の時間平均が, 初期点 x の与え方に応じていずれかの確率測度 $\mu_1\cdots,\mu_r$ が定める空間平均に収束することがわかる. この定義の下で, f が (FPM) を満たすための必要十分条件が, 後に定義する f の平均化ペロン–フロベニウス作用素の平均収縮性となることが結論付けられる.

定理. (*Theorem C,* [7]) $(X,\mathscr{B},m)$ をポーランド確率空間, $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})=(T^{\mathbb{N}},\mathscr{A}^{\mathbb{N}},p^{\mathbb{N}})$ を確率空間 $(T,\mathscr{A},p)$ の無限直積空間とする. 可測写像 $f:T\times X\to X$ に対して, 以下は同値.

(i) $\mathcal{L}_f$ は平均収縮性（*mean constrictivity*）を持つ.

(ii) f は (FPM) を満たす.

さらに, f が上いずれかの条件を満たすとき, $\mu_1,\ldots,\mu_r$ が (FPM) に現れる測度を表すとすると, 次が成り立つ.

(1) $(\mathbb{P}\times m)\left(B(\mu_1)\cup\cdots\cup B(\mu_r)\right)=1,$

(2) *m-a.e.* $x\in X$ に対して, $\mathbb{P}\left(B_x(\mu_1)\cup\cdots\cup B_x(\mu_r)\right)=1,$

(3) $\mathbb{P}$*-a.e.* $\omega\in\Omega$ に対して, $m\left(B_\omega(\mu_1)\cup\cdots\cup B_\omega(\mu_r)\right)=1,$

ただし, 各 $i=1,\ldots,r$ に対して,

$$B(\mu_i)=\left\{(\omega,x)\in\Omega\times X:\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\delta_{f_\omega^j(x)}=\mu_i\right\},$$

$$B_\omega(\mu_i)=\{x\in X:\ (\omega,x)\in B(\mu_i)\}\ \text{ および }\ B_x(\mu_i)=\{\omega\in\Omega:\ (\omega,x)\in B(\mu_i)\}.$$

3. マルコフ作用素の収縮性とその階層構造

$(X,\mathscr{B},m)$ を確率空間とし, $D(m)=D(X,\mathscr{B},m)$ を密度関数の空間とする. すなわち,

$$D(m)=\left\{h\in L^1(m):h\geq 0\ m\text{-a.e.},\ \|h\|=1\right\}.$$

線形作用素 $P:L^1(m)\to L^1(m)$ が **マルコフ作用素** であるとは, 正（すなわち, $\varphi\geq 0$ m-a.e. ならば, $P\varphi\geq 0$ m-a.e.）であり, 任意の $\varphi\geq 0$ m-a.e. を満たす $\varphi\in L^1(m)$ に対して,

$$\int P\varphi\,dm=\int\varphi\,dm. \tag{3.1}$$

が成り立つときをいう. 本原稿におけるマルコフ作用素の重要な性質が, 以下の **収縮性** (constrictivity) である.

定義 3.1. $L^1(m)$ 上のマルコフ作用素 P が,

(1) **収縮的** (constrictive) とは, あるコンパクト集合 $F \subset L^1(m)$ が存在して, 任意の $h \in D(m)$ に対して, 次が成立するときをいう.

$$\lim_{n\to\infty} d(P^n h, F) = 0,$$

(2) **一様収縮的** (uniformly constrictive) とは, あるコンパクト集合 $F \subset L^1(m)$ が存在して, 次が成立するときをいう.

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{h\in D(m)} d(P^n h, F) = 0.$$

(3) **平均収縮的** (mean constrictive) とは, あるコンパクト集合 $F \subset L^1(m)$ が存在して, 任意の $h \in D(m)$ に対して, 次が成立するときをいう.

$$\lim_{n\to\infty} d(A_n h, F) = 0,$$

ただし, $d(\varphi, F) = \inf_{\psi\in F} \|\varphi - \psi\|$ であり,

$$A_n\varphi = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} P^i\varphi \quad (\varphi \in L^1(m)).$$

である. 定義から明らかに, (UC) $\Rightarrow$ (C) $\Rightarrow$ (MC) が成り立つ. また P の一様収縮性は, P が $L^1(m)$ において準コンパクト (quasi-compact) であることと同値であることが知られている [8, Theorem 2].

マルコフ作用素の重要な例の 1 つが, 非特異変換 $g : X \to X$ 対して定義される **ペロン–フロベニウス作用素** である. g が X 上の測度 m に関して非特異であるとは, 任意の m-零集合の g による逆像が再び m-零集合となるときをいう. このような非特異変換 g のペロン–フロベニウス作用素 $\mathcal{L}_g : L^1(m) \to L^1(m)$ は次式で定義される. 任意の $\varphi \in L^1(m)$ および $A \in \mathscr{B}$ に対して,

$$\int_A \mathcal{L}_g\varphi \, dm = \int_A \varphi \, dm.$$

詳細については [2, 3, 12, 13] を参照せよ.

$f : T \times X \to X$ を 2章で与えたものとし, $t \in T$ に対して $f_t = f(t, \cdot)$ のペロン–フロベニウス作用素を $\mathcal{L}_t$ と書く. さらに, **平均化ペロン–フロベニウス作用素** $\mathcal{L}_f : L^1(m) \to L^1(m)$ を次式で定義する.

$$\mathcal{L}_f\varphi(x) = \int_T \mathcal{L}_t\varphi(x)\, dp(t).$$

これは, 一回の時間発展に発生するノイズについて平均化することを意味している. このとき, $\mathcal{L}_f$ もまたマルコフ作用素となる.

一様収縮性 (UC), 収縮性 (C), および平均収縮性 (MC) に加え, さらに以下の 3 つの性質を導入し, これらの性質が持つ階層構造について紹介する.

(AC) 漸近的収縮性を持つクラス

定義 3.2. $L^1(m)$ 上のマルコフ作用素 P が**漸近的収縮性** (asymptotically constrictive) (AC) を持つとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が存在し, 次を満たすときをいう.

$$\text{任意の } \varphi \in D(m) \text{ と}, m(A) < \delta \text{ を満たす } A \in \mathscr{B} \text{ に対して}, \limsup_{n\to\infty} \int_A P^n\varphi\, dm < \varepsilon.$$

これは収縮的でない例を探している際に発見された新しい性質であるが, 以下の収縮的なマルコフ作用素 $P : L^1(m) \to L^1(m)$ の同値な表現と見比べると, (C) $\Rightarrow$ (AC) が直ちにわかる.

(C) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ が存在し, 任意の $\varphi \in D(m)$ に対して $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して次を満たす.

$$\text{任意の } n \geq n_0 \text{ と}, m(A) < \delta \text{ を満たす } A \in \mathscr{B} \text{ に対して}, \int_A P^n\varphi\, dm < \varepsilon.$$

(WAP) 弱概周期的なクラス

定義 3.3. $L^1(m)$ 上のマルコフ作用素 P が**弱概周期的** (weakly almost periodic) であるとは, 任意の $\varphi \in L^1(m)$ に対して, $(P^n\varphi)_{n\geq 1}$ が弱コンパクトであるときをいう. すなわち任意の列 $(P^{n_k}\varphi)_{k\geq 1}$ がさらに弱収束する部分列 $(P^{n_{k_j}}\varphi)_{j\geq 1}$ を含むときである.

これは $L^1(m)$ 上のマルコフ作用素の性質としてよく知られており [20], Dunford–Pettis の定理によれば, この性質の必要十分条件は以下となる.

(WAP) 任意の $\varepsilon > 0$ と $\varphi \in L^1(m)$ に対して, $\delta > 0$ が存在して,

$$\text{任意の } n \in \mathbb{N} \text{ と}, m(A) < \delta \text{ を満たす } A \in \mathscr{B} \text{ に対して}, \int_A P^n\varphi\, dm < \varepsilon.$$

(S) 不変密度を持つクラス

最後に, $L^1(m)$ 上のマルコフ作用素が不変密度を持つクラスを (S) と表すことにする[3]. ここで, $h \in D(m)$ が P の**不変密度** (invariant density) であるとは, $Ph = h$ を満たすときをいう.

以上の性質の階層は次の図の通りにまとめられる.

$$\mathtt{(UC)}\ \underset{\text{命題 4.1}}{\overset{\text{自明}}{\underset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow}}}\ \mathtt{(C)}\ \underset{\text{命題 4.2}}{\overset{\text{自明}}{\underset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow}}}\ \mathtt{(AC)}\ \underset{\text{命題 4.3}}{\overset{[4]}{\underset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow}}}\ \mathtt{(MC)}\ \underset{\text{命題 4.3}}{\overset{[4]}{\underset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow}}}\ \mathtt{(WAP)}\ \underset{\text{命題 4.4}}{\overset{\text{自明}}{\underset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow}}}\ \mathtt{(S)}$$

図 1. (UC) から (S) までの性質の階層構造. ただし, (AC) $\Rightarrow$ (MC) $\Rightarrow$ (WAP) についての詳細は [4] を参照せよ.

3 ペロン–フロベニウス作用素の不変測度の存在についての Straube の結果 [19] にちなんで (S) と表すことにする.

4. 具体例

ここでは図 1 における逆向きの包含関係が成立しないことを示すために, 反復関数系におけるいくつかの例を紹介する. 確率付きの反復関数系 (IFS) は有限集合 $T = \{1, 2, \ldots, k\}$ と確率測度 p におけるランダム写像 $f : T \times X \to X$ から定まる. ここでは, $p(\{i\}) = p_i > 0$（$i = 1, \ldots, k$）とする. $\Omega = T^{\mathbb{N}}$ および $\mathbb{P} = p^{\mathbb{N}}$ とすると, $\mathbb{P}$ は Ω 上のベルヌーイ確率となり, 対応する平均化ペロン–フロベニウス作用素は次で表せる.

$$\mathcal{L}_f \varphi = \int_T \mathcal{L}_t \varphi \, dp(t) = \sum_{i=1}^{k} p_i \mathcal{L}_i \varphi \quad (\varphi \in L^1(m)).$$

ここで $\mathcal{L}_i$ は $f_i = f(i, \cdot)$ に対するペロン–フロベニウス作用素である（$i = 1, \ldots, k$）.

(a) ランダム拡大写像. X を, ボレル σ-加法族 $\mathscr{B}$ とルベーグ測度 m を備えた単位区間 $[0, 1]$ とする. 各 $i = 1, \ldots, k$ に対して, f_i を有限分割を持つ C^2 級の非特異変換とし, 次の平均拡大性の条件を満たすとする. 任意の $x \in X$ に対して,

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{p_i}{\left| f_i'(x) \right|} < 1. \tag{4.1}$$

このとき, f に対して次の命題が成立する.

命題 4.1. $\mathcal{L}_f$ は (C) を満たすが, (UC) は満たさない.

(b) ランダム縮小写像. $(X, \mathscr{B}, m)$ を上の例と同じとし, $k = 2$ として次を考える.

$$f_1(x) = \frac{x}{2}, \quad f_2(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \quad (x \in X) \quad \text{かつ} \quad p_1 = p_2 = \frac{1}{2}.$$

これはベルヌーイ畳み込みの特別な例として知られている [18]. この f に対して次の命題が成立する.

命題 4.2. $\mathcal{L}_f$ は (AC) を満たすが, (C) は満たさない.

(c) ランダム回転写像. $X = \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ を, ボレル σ-加法族 $\mathscr{B}$ とルベーグ測度 m を備えた単位円周とする. $k = 2$ とし, 回転角度 $\alpha, \beta \in [0, 1]$ をもつ 2 つの回転写像 f_1, f_2 を考える.

$$f_1(x) = x + \alpha \pmod 1 \quad \text{および} \quad f_2(x) = x + \beta \pmod 1,$$

また, $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$ とする.

命題 4.3. この f に対して以下が成立する.

(1) $\alpha - \beta$ が無理数ならば, $\mathcal{L}_f$ は (C) を満たす.
(2) α と β がともに無理数で, $\alpha - \beta$ が有理数ならば, $\mathcal{L}_f$ は (MC) を満たすが (AC) は満たさない.
(3) α と β がともに有理数ならば, $\mathcal{L}_f$ は (WAP) を満たすが (MC) は満たさない.

(d) ランダム縮小写像と拡大写像の直和. $k = 2$ とし, (S) を満たす力学系と満たさない力学系の直和で力学系を与える. すなわち, $X = X_- \sqcup X_+$ とし, X において X_- および X_+ の測度が正である確率測度 m を与え, $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$ として次の通りに写像 $f_1(x), f_2(x)$ を与える.

$$f_1(x) = \begin{cases} \tau_1^-(x) & \text{for } x \in X_- \\ \tau_1^+(x) & \text{for } x \in X_+ \end{cases} \quad \text{および} \quad f_2(x) = \begin{cases} \tau_2^-(x) & \text{for } x \in X_- \\ \tau_2^+(x) & \text{for } x \in X_+ \end{cases}$$

ここで $\tau_1^+, \tau_2^+ : X_+ \to X_+$ によって生成されるランダム力学系は (S) を満たし, $\tau_1^-, \tau_2^- : X_- \to X_-$ によって生成されるランダム力学系は (S) を満たさないとする. 典型的な例としては, τ_1^+, τ_2^+ は拡大条件 (4.1) を満たす 1 次元の区分的 C^2 非特異変換, $\tau_1^-(x) = \tau_2^-(x) = \frac{x}{2}$ と与えれば良い. この f に対して次の命題が成立する.

命題 4.4. $\mathcal{L}_f$ は (S) を満たすが, (WAP) は満たさない.

(e) 決定論的システム. これまでに紹介したランダム力学系の例を少し変更することで, 図 1 における逆向きの包含関係が成立しない決定論的力学系の例も与えることができる.

命題 4.5. 以下が成立する.

(1) 任意の区分的 C^2 非特異変換で有限分割を持ち, 条件 (4.1) を満たすとき, (C) を満たすが, (UC) は満たさない.
(2) パイこね変換は (AC) を満たすが, (C) は満たさない.
(3) 任意の無理数回転は (MC) を満たすが, (AC) は満たさない.
(4) 任意の有理数回転は (WAP) を満たすが, (MC) は満たさない.
(5) X を 2 つの正の測度を持つ集合 X_- と X_+ に分け, $g : X \to X$ を X の分割を保つ可測変換で, g の X_+ 上での制限が (S) を満たし, X_- 上での制限が (S) 満たさない場合, g は (S) を満たすが, (WAP) は満たさない.

ただし, パイこね変換は $X = [0, 1]^2$ 上の以下の写像 $g : X \to X$ である.

$$g(x, y) = \begin{cases} (2x, \frac{y}{2}) & (0 \leq x < \frac{1}{2}), \\ (2x - 2, \frac{y}{2} + \frac{1}{2}) & (\frac{1}{2} \leq x \leq 1). \end{cases}$$

References

[1] V. Araújo. Attractors and time averages for random maps. *Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse Non Linéaire*, 17(3):307–369, 2000.

[2] V. Baladi. *Positive transfer operators and decay of correlations*, Vol. 16 of *Advanced Series in Nonlinear Dynamics*. World Scientific, 2000.

[3] V. Baladi. *Dynamical zeta functions and dynamical determinants for hyperbolic maps*, Vol. 68 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*. Springer, Cham, 2018.

[4] P. G. Barrientos, F. Nakamura, Y. Nakano, and H. Toyokawa. Finitude of physical measures for random maps. *arXiv preprint arXiv:2209.08714*, 2022.

[5] P. G. Barrientos and A. Raibekas. Robust degenerate unfoldings of cycles and tangencies. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 33(1):177–209, 2021.

[6] P. G. Barrientos and A. Raibekas. Berger domains and kolmogorov typicality of infinitely many invariant circles. *Journal of Differential Equations*, 408:254–278, 2024.
[7] P. G. Barrientos and J. D. Rojas. Typical coexistence of infinitely many strange attractors. *Mathematische Zeitschrift*, 303(2):34, 2023.
[8] W. Bartoszek. On uniformly smoothing stochastic operators. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 36(1):203–206, 1995.
[9] P. Berger. Generic family with robustly infinitely many sinks. *Inventiones mathematicae*, 205(1):121–172, 2016.
[10] P. Berger. Emergence and non-typicality of the finiteness of the attractors in many topologies. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 297(1):1–27, 2017.
[11] E. Colli. Infinitely many coexisting strange attractors. *Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse Non Linéaire*, 15(5):539–579, 1998.
[12] E. Y. Emel'yanov. *Non-spectral asymptotic analysis of one-parameter operator semigroups*, Vol. 173 of *Operator Theory: Advances and Applications*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2007.
[13] S. R. Foguel. The ergodic theory of Markov processes. *Israel Journal of Mathematics*, 4:11–22, 1966.
[14] S. Gonchenko, D. V. Turaev, and L. P. Shil'nikov. On the existence of Newhouse domains in a neighborhood of systems with a structurally unstable Poincaré homoclinic curve (the higher-dimensional case). *Russian Academy of Sciences, Doklady, Mathmatics*, 47:268–273, 1993.
[15] B. Leal. High dimension diffeomorphisms exhibiting infinitely many strange attractors. *Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse Non Linéaire*, 25(3):587–607, 2008.
[16] S. E. Newhouse. The abundance of wild hyperbolic sets and non-smooth stable sets for diffeomorphisms. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 50:101–151, 1979.
[17] J. Palis and M. Viana. High dimension diffeomorphisms displaying infinitely many periodic attractors. *Annals of mathematics*, pp. 207–250, 1994.
[18] Y. Peres and B. Solomyak. Absolute continuity of Bernoulli convolutions, a simple proof. *Mathematical Research Letters*, 3(2):231–239, 1996.
[19] E. Straube. On the existence of invariant, absolutely continuous measures. *Communications in Mathematical Physics*, 81(1):27–30, 1981.
[20] H. Toyokawa. σ-finite invariant densities for eventually conservative Markov operators. *Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series A*, 40(5):2641–2669, 2020.

Faculty of engineering
Kitami Institute of Technology
Hokkaido 090-8507
JAPAN
E-mail address: nfumihiko@mail.kitami-it.ac.jp

北見工業大学・工学部　中村文彦