Factorization of Hardy spaces using the ball Banach spaces

中央大学・理工学研究科・澤野嘉宏 *

Yoshihiro Sawano
Department of Mathematics, Graduate School of Science and Engineering,
Chuo University, 13-27 Kasuga 1-chome, Bunkyoku, Tokyo, Japan.

Mathematics Subject Classification 2010 : 42B35, 42B20, 42B25.

Abstract

本稿の目的は，非退化な特異作用素に対する H^1 の分解結果を確立することである．基本的には [8] に従うが，その論文と前後して得られているほかの論文の情報を整理している．その結果以前の論文の証明を再検討することによって，新たな原子分解結果が得られた．この原子分解結果は，Tolsa によって考案された原子ブロックに関連している．

1 導入

この論文の目的は，球バナッハ空間を用いた因数分解を使って，$H^1(\mathbb{R}^n)$ の特徴付けを与えることである．[8] に従うが，アトム分解にのみ注力したいために，定式化を [8] より簡略にすることを目指しつつ，証明を行う．ここで，$H^1(\mathbb{R}^n)$ とは，

$$\|f\|_{H^1} := \sup_{t>0} \|e^{t\Delta} f\|_{L^1} < \infty$$

を満たすすべての関数 $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ からなるハーディ空間である．

本稿では，Coifman，Rochberg，Weiss による H^1 における因数分解定理を一般化する．本稿で使う記号をまとめておく．

1. $A \lesssim B$ は c が存在して $A \le c\,B$ を表すものとする．
2. $A \gtrsim B$ は $B \lesssim A$ と同じことである．
3. $A \sim B$ は $A \lesssim B$ かつ $B \lesssim A$ を表す．
4. 関数 f と測度が正の集合 E に対して f の E 上の平均を $m_E(f)$ と表す．すなわち，$m_E(f) := \dfrac{1}{|E|}\displaystyle\int_E f(x)\mathrm{d}x$ である．
5. 記号 $B(x, R)$ は，$x \in \mathbb{R}^n$ を中心とし，半径 $R > 0$ の開球を表す．球 $B = B(x, r)$ が与えられたとき，B の中心と半径をそれぞれ $c(B) := x$, $r(B) := r$ と定める．

*E-mail address: **yoshihiro-sawano@celery.ocn.ne.jp**

6. $e_j := (\delta_{jk})_{k=1}^n$ は第 j 基本ベクトルを表す.

7. 線形空間 V の部分集合 A と $v \in V$ に対してそのミンコフスキー和を $v+A := \{v+a \,:\, a \in A\}$ と定義する.

非退化特異作用素の定義について，[3] を参照する.

開集合 V が錐であるとは，$\alpha, \beta > 0$, $x, y \in V$ のときに，$\alpha x + \beta y \in V$ を満たすことである. T を V では非退化な特異作用素とする．正確な定義を以下に与える.

定義 1.1. $\mathcal{K} \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : x = y\})$ とする．核 $\mathcal{K}$ を持つ錐である開集合 V では非退化な特異積分作用素とは以下の条件に適う $L^2(\mathbb{R}^n)$-有界線形作用素 T のことである.

(1) すべての $f \in L^2_{\rm c}(\mathbb{R}^n)$ に対して，$\operatorname{supp}(f)$ の外でほとんどいたるところ,

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{K}(x,y) f(y) {\rm d}y \tag{1}$$

が成り立つ.

(2) 定数 D_1 と D_2 が存在して，$\mathcal{K}$ が次の 2 条件を満たす.

  (i) 【サイズ条件】$x \neq y$ ならば,

$$|\mathcal{K}(x,y)| \le D_1 |x-y|^{-n} \tag{2}$$

  が成り立つ.

  (ii) 【勾配条件】$\nabla_x \mathcal{K}$ と $\nabla_y \mathcal{K}$ が存在して，任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して，$x \neq y$ ならば, $|\nabla_x \mathcal{K}(x,y)| + |\nabla_y \mathcal{K}(x,y)| \le D_2 |x-y|^{-n-1}$ が成り立つ.

(3) $\mathcal{K}$ は非退化条件を満たす．つまり，任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$ で，$x-y \in V$ ならば，$\mathcal{K}(x,y) \gtrsim |x-y|^{-n}$ である.

さらに，$\mathcal{K}$ が $\mathcal{K}(x,y) = \widetilde{\mathcal{K}}(x-y)$ の形をとる場合，T は V では非退化な $\widetilde{\mathcal{K}}$ が生成する畳み込み作用素と呼ばれる.

次に，球バナッハ関数空間の定義を思い出す．$\mathbb{M}^+(\mathbb{R}^n)$ を $\mathbb{R}^n$ 上のすべての非負可測関数の集合とする.

ここで，可測集合 E に対して特性関数を χ_E と表す．写像 $\rho : \mathbb{M}^+(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ は，次の条件を満たせば，$\mathbb{R}^n$ 上の球バナッハ関数ノルムと呼ばれる.

(P1)
- $\rho(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$ a.e. が成り立つ.
- $\rho(af) = a\rho(f)$ が成り立つ.
- $\rho(f+g) \le \rho(f) + \rho(g)$ が成り立つ.

(P2) $0 \le g \le f$ a.e. ならば，$\rho(g) \le \rho(f)$ が成り立つ.

(P3) $0 \le f_j \uparrow f$ a.e. ならば，$\rho(f_j) \uparrow \rho(f)$ が成り立つ.

(P4) $\rho(\chi_B) < \infty$ が成り立つ.

(P5) $\|\chi_B f\|_{L^1} \lesssim \rho(f)$ が成り立つ.

(P3) は Fatou の性質と呼ばれる．ここで，ρ が球バナッハ関数空間の球バナッハ関数ノルムであれば，その随伴ノルム ρ' は次のように定義される．

$$\rho'(g) := \sup\left\{\|f\cdot g\|_{L^1} : f\in\mathbb{M}^+(\mathbb{R}^n), \rho(f)\le 1\right\}, \quad (g\in\mathbb{M}^+(\mathbb{R}^n)).$$

同様に，X' を ρ' の生成する球バナッハ関数空間の Köthe 双対として定義できる．

$j=1,2,\dots,n$ とする．このとき，$f\in C^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^n)$ に対してリース変換と呼ばれる線形作用素を

$$R_j f(x) := \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(x,\varepsilon)} \frac{x_j-y_j}{|x-y|^{n+1}} f(y)\mathrm{d}y \quad (x\in\mathbb{R}^n)$$

と定義する．この作用素は，$1<q<\infty$ の範囲で $L^q(\mathbb{R}^n)$ 上の有界線形作用素へと拡張される．

任意の特異積分作用素 T および $f\in L^2_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^n)$ に対して，複素ヒルベルト空間 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上の双対作用素 T^* は，

$$T^*f(x) = \int_{\mathbb{R}^n}\overline{\mathcal{K}(y,x)}f(y)\mathrm{d}y \text{ a.e. } x\notin \operatorname{supp}(f) \tag{3}$$

を満たす．また，T^* も特異積分作用素となる．

次に，Hardy–Littlewood 最大作用素 M の定義を思い出す．この作用素は可測関数 f に対して，次のように定義される．

$$Mf(x) := \sup_{R>0}\frac{1}{R^n}\int_{B(x,R)}|f(y)|\,\mathrm{d}y$$

S^{n-1} を $\mathbb{R}^n$ の単位球面とする．Tolsa の研究 [11] を参考にして，次の定理を証明することを目的とする．定理 1.2 の仮定を満たしているバナッハ関数空間は [2] にまとめてある．

定理 1.2. X をバナッハ関数空間とし，M が X および X' 上で有界であると仮定する．

(i) $\{B(x_j,r_j)\}_{j=1}^\infty, \{B(y_j,r_j)\}_{j=1}^\infty$ を球の列とする．また，$\{g_j,h_j\}_{j=1}^\infty\subset L^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^n)$ が

$$\sum_{j=1}^\infty \|g_j\|_X\|h_j\|_{X'}<\infty$$

を満たすとする．このとき，

$$\sum_{j=1}^\infty (h_jTg_j - g_jT^*h_j) \tag{4}$$

は $H^1(\mathbb{R}^n)$ の元 f に収束し，

$$\sum_{j=1}^\infty \|g_j\|_X\|h_j\|_{X'} \gtrsim \|f\|_{H^1}$$

が成り立つ．

(ii) 逆に，任意の $f\in H^1(\mathbb{R}^n)$ は

$$f = \sum_{j=1}^\infty (h_jTg_j - g_jT^*h_j) \tag{5}$$

の形で分解できる．この収束は $H^1(\mathbb{R}^n)$ において成り立ち，$\{g_j,h_j\}_{j=1}^\infty\subset L^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^n)$ は

$$\sum_{j=1}^\infty \|g_j\|_{L^\infty}\|h_j\|_{L^\infty}{r_j}^n \lesssim \|f\|_{H^1}, \quad |g_j|\le \chi_{B(x_j,r_j)}, \quad |h_j|\le\chi_{B(y_j,r_j)} \tag{6}$$

を満たすように選べる．ただし，$\{B(x_j,r_j)\}_{j=1}^\infty$, $\{B(y_j,r_j)\}_{j=1}^\infty$ は球の列である．

(iii) $1 < q < \infty$ とし，$f \in L^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^n) \cap H^1(\mathbb{R}^n)$ とする．その円錐 V がある $K \gg 1$ および $v \in S^{n-1}$ に対して $B(Kv, 3) \subset V$ を満たすとする．T を V では非退化な偶関数で実数値を持つ核を持つ畳み込み作用素とする．また，$B = B(x, R)$ を球とし，

$$\mathrm{supp}(f) \subset B \cup B(x + KRv, R), \quad \int_{B \cup B(x+KRv,R)} f(y)\mathrm{d}y = 0$$

が成り立つと仮定する．このとき，$L^\infty(\mathbb{R}^n)$ において (5) の分解が存在し，$\{g_j, h_j\}_{j=1}^\infty \subset L^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^n)$ は

$$\mathrm{supp}(g_j) \subset B, \quad \mathrm{supp}(h_j) \subset B(x + KRv, R), \quad \|g_j\|_{L^\infty} = 1 \tag{7}$$

および

$$\sum_{j=1}^\infty \|h_j\|_{L^\infty} \lesssim \|f\|_{L^\infty} \tag{8}$$

を満たす.

2 予備知識

定理 1.2 の証明のために，以下の事実を用いる．

補題 2.1. $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ が $H^1(\mathbb{R}^n)$ に属するための必要十分条件は，条件

$$\mathrm{supp}(f_j) \subset B_j, \quad f = \sum_{j=1}^\infty f_j, \quad \sum_{j=1}^\infty \|f_j\|_{L^\infty}|B_j| < \infty, \quad \int_{\mathbb{R}^n} f_j(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

を満たす関数列 $\{f_j\}_{j=1}^\infty \subset L^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^n)$ が存在することである．また，このような場合において，関数列 $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ は

$$\sum_{j=1}^\infty \|f_j\|_{L^\infty}|B_j| \sim \|f\|_{H^1}$$

を満たすように選べる．ここで，$\sim$ に含まれる定数は f に依存しない.

Proof. [10, Chapter 4, p. 107, Theorem 2] および [9, Theorem 3.9] を参照. □

$L^\infty(\mathbb{R}^n)$ が $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ に埋め込まれているが，これについて次の性質を用いる．

補題 2.2. $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ が $H^1(\mathbb{R}^n)$ に属するための必要十分条件は，$\lim_{|x|\to\infty} g(x) = 0$ を満たす任意の連続関数 g について，不等式

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| \le C\|g\|_{\mathrm{BMO}} \tag{9}$$

が成り立つことである．この場合，条件に適う C のうち，最小のもの C_0 は

$$C_0 \sim \|f\|_{H^1}$$

を満たす.

この結果はよく知られている．読者の便宜のために，証明を再掲する．

Proof. VMO($\mathbb{R}^n$) をそのような g の張る空間の閉包とする．(9) が成り立つとすると，写像

$$g \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

は VMO($\mathbb{R}^n$) 上で有界線形写像に拡張される．VMO($\mathbb{R}^n$) の双対空間が $H^1(\mathbb{R}^n)$ であることは，Coifman と Weiss の結果による [4]．したがって，このような写像は $H^1(\mathbb{R}^n)$ のある関数 F によって実現されなければならない．任意に $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ を選べるので，実際に f は $H^1(\mathbb{R}^n)$ の関数 F であることがわかる．逆に $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$ ならば，式 (9) はハーン・バナッハの定理と Coifman と Weiss の上記の結果から容易に従う． □

出来による両側評価を引用する．完全に調べ切れているわけではないが，この方面におけるかなり先駆的な結果であったと考えられる．

補題 2.3. [7, Lemma 2.2] X をバナッハ関数空間とし，M が X 上で有界であるならば，すべての球 B に対して，

$$\|\chi_B\|_X \|\chi_B\|_{X'} \sim |B|$$

が成り立つ．

2.1 定理 1.2(ii) の証明

証明は [5, 6] に従う．彼らの構成は定理 1.2(iii) を証明するために必要である．したがって，詳細な証明を与える．

補題 2.4. T を非退化特異積分作用素とする．$B = B(x_0, R)$ を球とする．$K \gg 1$ を整数とする．$f \in L_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ が

$$\mathrm{supp}(f) \subset B, \quad \int_B f(x)\mathrm{d}x = 0 \tag{10}$$

を満たすと仮定する．y_0 は $|y_0 - x_0| = KR$ を満たし，$B(y_0 - x_0, 3R) \subset V$ となるようにとり，

$$g := \chi_{B(y_0,R)}, \quad h := -\frac{f}{Tg(x_0)}$$

定める．

(i) K に依存する定数による評価

$$\|h\|_{L^\infty} = \|g\|_{L^\infty}\|h\|_{L^\infty} \lesssim \|f\|_{L^\infty}. \tag{11}$$

が成り立つ．

(ii) $f^1, f^2 \in L_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ が存在して，

$$\int_{B(x_0,R)\cup B(y_0,R)} (f^1(x) + f^2(x))\mathrm{d}x = 0 \tag{12}$$

と

$$f = gT^*h - hTg + \sum_{k=1}^{2} f^k \tag{13}$$

を満たす．さらに K に依存しない定数による評価

$$\mathrm{supp}(f^1) \subset B(x_0, R), \quad \mathrm{supp}(f^2) \subset B(y_0, R), \quad \|f^k\|_{L^\infty} \lesssim \frac{\|f\|_{L^\infty}}{K}. \tag{14}$$

が成り立つ．

(iii) K に依存しない定数による評価

$$\|f^1 + f^2\|_{H^1} = \mathrm{O}\left(\frac{\log K}{K}\right)\|f\|_{H^1}. \tag{15}$$

が成り立つ．

Proof.

(i) T が非退化特異積分作用素であることから，

$$|Tg(x_0)| \gtrsim K^{-n}. \tag{16}$$

よって，(11) は g と h の定義から導かれる．

(ii) $f^1 := f + hTg$, $f^2 := -gT^*h$ とおく．$F := f^1 + f^2 = f + hTg - gT^*h$ の L^∞-ノルムを評価する．f^1, f^2 の定義から (12) および (13) は明らかである．

(iii) (13) または (12) から，$f^1 + f^2$ は積分が消える．したがって，補題 2.1 と (14) を用いて (15) が得られる．

□

補題 2.4 に基づき，定理 1.2(ii) の証明を完了する．$f \in H^1(\mathbb{R}^n)$ とすると，$f^1, f^2, \ldots, f^N \in L^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^n)$ および球 $B^1, B^2, \ldots, B^N$ が存在し，

$$\|f - f^1 - f^2 - \cdots - f^N\|_{H^1} \le \frac{1}{4}\|f\|_{H^1}, \tag{17}$$

$$\sum_{j=1}^{N} \|f^j\|_{L^\infty}|B^j| \lesssim \|f\|_{H^1} \tag{18}$$

を満たす．

補題 2.4 を適用すると，$g^j, h^j \in L^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^n)$ および球 B^j_g, B^j_h を得て，

$$\|h^j\|_{L^\infty} \lesssim \|f^j\|_{L^\infty}. \tag{19}$$

K を大きく選ぶことで，

$$\|f^j - g^jTh^j + h^jT^*g^j\|_{H^1} \le \frac{1}{4N}\|f^j\|_{H^1}$$

となり，証明が完了する．

2.2 定理 1.2(iii) の証明

定理 1.2(ii) の証明を精査する．実際，補題 2.5 によれば，任意の原子的ブロックは台を変更せずに分解可能であることが分かる．しかし，定理 1.2(ii) の証明は，これは原子には適用できないことを示している．そこで，次の補題にあるような修正を施す．

補題 2.5. $K \geq 3$ とし，T を偶関数の実数値核 K_T を持つ畳み込み作用素とする．$v \in S^{n-1}$ および $\kappa > 0$ が

$$\inf_{x \in V} |x|^n K_T(x) > 0$$

を満たすと仮定する．ここで，$V := \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot v > \kappa|x|\}$ である．また，B_1 および B_2 を

$$B_2 = Kr(B_1)v + B_1$$

かつ

$$B_2 - B_1 := \{b_2 - b_1 : b_1 \in B_1, b_2 \in B_2\} \subset V$$

を満たす球とする．

$f_1, f_2 \in L^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^n)$ が

$$\mathrm{supp}(f_1) \subset B_1, \quad \mathrm{supp}(f_2) \subset B_2, \quad \int_{B_1 \cup B_2} (f_1(x) + f_2(x))\mathrm{d}x = 0 \tag{20}$$

を満たすと仮定する．$f := f_1 + f_2$ と定める．さらに，

$$g_1 := \chi_{B_2}, \quad h_1 := -\frac{f_1}{T\chi_{B_2}(c(B_1))}, \quad g_2 := \chi_{B_1}, \quad h_2 := -\frac{f_2}{T\chi_{B_1}(c(B_2))},$$
$$F := f + h_1 T g_1 - g_1 T^* h_1 + h_2 T g_2 - g_2 T^* h_2 - \frac{m_{B_1}(f_1)}{T\chi_{B_2}(c(B_1))} g_1 T^* g_2 + \frac{m_{B_1}(f_1)}{T\chi_{B_2}(c(B_1))} g_2 T g_1$$

と定義する．

(i) F のモーメントは消える．つまり，

$$\int_{B_1 \cup B_2} F(x)\mathrm{d}x = 0 \tag{21}$$

が成り立つ．

(ii) 評価

$$\|g_1\|_{L^\infty} = \|g_2\|_{L^\infty} = 1 \tag{22}$$

および

$$\|h_1\|_{L^\infty} + \|h_2\|_{L^\infty} \lesssim \|f\|_{L^\infty}. \tag{23}$$

が成り立つ．さらに，

$$\|g_1\|_{L^\infty}\|h_1\|_{L^\infty} + \|g_2\|_{L^\infty}\|h_2\|_{L^\infty} + \left|\frac{m_{B_1}(f_1)}{T\chi_{B_2}(c(B_1))}\right| \|g_1\|_{L^\infty}\|g_2\|_{L^\infty} \lesssim \|f\|_{L^\infty}. \tag{24}$$

(iii) 評価

$$|F| \lesssim \frac{1}{K}\|f\|_{L^\infty}\chi_{B_1 \cup B_2}. \tag{25}$$

が成り立つ．

この補題と先の議論を組み合わせることで，定理 1.2(iii) の証明が完成する．

References

[1] C. Bennett, and R. C. Sharpley. Interpolation of Operators. Academic Press, 1988.

[2] S. Barsa, M. Lind and Y. Sawano, A new variational characterization of Sobolev spaces based on Banach lattices, in preparation.

[3] V. I. Burenkov, V. S. Guliev, T. V. Tararykova, and A. Serbetci, Necessary and sufficient conditions for the boundedness of genuine singular integral operators in local Morrey-type spaces, Dokl. Math. **78**, 651-–654 (2008). https://doi.org/10.1134/S1064562408050025

[4] R.R. Coifman and G. Weiss. Extensions of Hardy spaces and their use in analysis. Bull. Amer. Math. Soc., **83**, no. 4 (1977): 569–645.

[5] R. R. Coifman, R. Rochberg and G. Weiss, Factorization theorems for Hardy spaces in several variables. Ann. of Math. (2), 1976, **103**(3): 611–635.

[6] N. A. Dao and S. G. Krantz, On the predual of a Morrey–Lorentz space and its applications to the linear Calderón-Zygmund operators, Front. Math. **19** (2024), no. 3, 385–418.

[7] M. Izuki, Another proof of characterization of BMO via Banach function spaces, Revista de la union matematica Argentina vol. **57**, no. 1, 2016, 103–109. **229** (2018), 561–567.

[8] Y. Sawano, Factorization of Hardy spaces using the ball Banach spaces, Conference Proceedings "The 50, 70, 80, $\dots\infty$ Conference in Mathematics" (Karlstad, Sweden, 2024), 243-257, Element, Zagreb, 2024.

[9] Y. Sawano, Theory of Besov Spaces, Developments in Mathematics, vol. 56. Springer, Singapore (2018), xxiii+945 pp. ISBN: 978-981-13-0835-2; 978-981-13-0836-9

[10] E.M. Stein, Harmonic Analysis, Real-variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.

[11] X. Tolsa, BMO, H^1, and Calderón–Zygmund operators for non doubling measures, Mathematische Annalen, **319**(2001), 89–149.