Weighted generalized Morrey smoothness spaces

追手門学院大学　野井貴弘[1]

Takahiro Noi
Otemon Gakuin University

2020 Classification 46B35; 42B35.

1　導入

本稿では斉次の Triebel-Lizorkin 空間 $\dot{F}^s_{q,r}(\mathbb{R}^n)$ を weighted genralized Morrey 空間の枠組みで一般化することで得られる weighted generalized Triebel-Lizorkin-Morrey 空間 $\dot{\mathcal{E}}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q,r}(w)$ と weighted generalized Triebel-Lizorkin 型空間 $\dot{F}^{s,\varphi}_{q,r}(w)$ について，基本的な性質を紹介する．原子分解などのより詳しい内容は [12] にまとめている．

Besov 空間 $B^s_{q,r}(\mathbb{R}^n)$ と Triebel-Lizorkin 空間 $F^s_{q,r}(\mathbb{R}^n)$ の一般化として，Besov-Morrey 空間 $\mathcal{N}^s_{u,q,r}(\mathbb{R}^n)$ や Triebel-Lizorkin-Morrey 空間 $\mathcal{E}^s_{u,q,r}(\mathbb{R}^n)$ と呼ばれる関数空間と Besov 型関数空間 $B^{s,\tau}_{q,r}(\mathbb{R}^n)$ や Triebel-Lizorkin 型関数空間 $F^{s,\tau}_{q,r}(\mathbb{R}^n)$ と呼ばれる関数空間がある．著者は中村氏と澤野氏との共同研究 [11] にて，Besov-Morrey 空間 $\mathcal{N}^s_{u,q,r}(\mathbb{R}^n)$ と Triebel-Lizorkin-Morrey 空間 $\mathcal{E}^s_{u,q,r}(\mathbb{R}^n)$ のノルムに登場する Morrey 空間 $\mathcal{M}^u_q(\mathbb{R}^n)$ のノルムの部分を generalized Morrey 空間 $\mathcal{M}^\varphi_q(\mathbb{R}^n)$ のノルムに置き換えることによって一般化した関数空間 generalized Besov-Morrey 空間 $\mathcal{N}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q,r}(\mathbb{R}^n)$ と generalized Triebel-Lizorkin-Morrey 空間 $\mathcal{E}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q,r}(\mathbb{R}^n)$ を導入し，これらの関数空間に対して，関数の分解法である原子分解やトレース作用素の有界性について考察した．[11] では Besov 型関数空間 $B^{s,\tau}_{q,r}(\mathbb{R}^n)$ や Triebel-Lizorkin 型関数空間 $F^{s,\tau}_{q,r}(\mathbb{R}^n)$ に対しても，generalized Morrey 空間 $\mathcal{M}^\varphi_q(\mathbb{R}^n)$ の要素を取り込むことで一般化した generalized Besov 型関数空間 $B^{s,\varphi}_{q,r}(\mathbb{R}^n)$ と generalized Triebel-Lizorkin 型関数空間 $F^{s,\varphi}_{q,r}(\mathbb{R}^n)$ を導入し[2]，それぞれの関数空間におけるトレース作用素の有界性も研究している．その後，Haroske et al. [7, 8] によっ

[1]E-mail adress: t-noi@otemon.ac.jp

[2]Liang et al. [9] は Nakamura et al. [11] よりも前に，[11] とは異なる generalized Besov 型関数空間と generalized Triebel-Lizorkin 型関数空間を定義し，原子分解やウェーブレット分解などを考察してい

て $B^{s,\varphi}_{q,r}(\mathbb{R}^n)$ と $F^{s,\varphi}_{q,r}(\mathbb{R}^n)$ におけるウェーブレット分解が研究され，その応用としていくつかの埋め込みの結果が得られている．近年 Sun et al. [16] により，非斉次な場合に対して quasi-Ball Banach function space を土台にしたより一般的な関数空間が考察されており，この関数空間は特別な場合には $B^{s,\varphi}_{q,r}(\mathbb{R}^n)$ や $F^{s,\varphi}_{q,r}(\mathbb{R}^n)$ と一致することから，[16] における関数空間は Liang et al. [9] で定義された関数空間よりも一般的なものになっている．

以上のことから，本稿では斉次の generalized Triebel-Lizorkin-Morrey 空間 $\dot{\mathcal{E}}^s_{\mathcal{M}^{\varphi}_q,r}(\mathbb{R}^n)$ と generalized Triebel-Lizorkin 型空間 $\dot{F}^{s,\varphi}_{q,r}(\mathbb{R}^n)$ に対して，さらに荷重 w を付けて一般化した weighted generalized Triebel-Lizorkin-Morrey 空間 $\dot{\mathcal{E}}^s_{\mathcal{M}^{\varphi}_q,r}(w)$ と weighted Triebel-Lizorkin 型空間 $\dot{F}^{s,\varphi}_{q,r}(w)$ に対して基本的な性質を考察している[3]．

2 関数空間

この章では weighted generalized Triebel-Lizorkin-Morrey 空間 $\dot{\mathcal{E}}^s_{\mathcal{M}^{\varphi}_q,r}(w)$ と weighted Triebel-Lizorkin 型空間 $\dot{F}^{s,\varphi}_{q,r}(w)$ の定義を与える．どちらの関数空間も weighted generalized Morrey 空間 $\mathcal{M}^{\varphi}_q(w)$ と関連しており，特に $\dot{\mathcal{E}}^s_{\mathcal{M}^{\varphi}_q,r}(w)$ の (準) ノルムは $\mathcal{M}^{\varphi}_q(w)$ の (準) ノルムを用いて定義される．

まず始めに $\mathcal{M}^{\varphi}_q(w)$ を定義し，その後，2.1節で $\dot{\mathcal{E}}^s_{\mathcal{M}^{\varphi}_q,r}(w)$ と $\dot{F}^{s,\varphi}_{q,r}(w)$ を定義するために必要な記号などをまとめる．そして，2.2節で $\dot{\mathcal{E}}^s_{\mathcal{M}^{\varphi}_q,r}(w)$ と $\dot{F}^{s,\varphi}_{q,r}(w)$ を定義する．

generalized Morrey 空間の定義においてよく用いられるクラス $\mathcal{G}_q$ の定義を与える．

$0 < q < \infty$ とする．非減少関数 $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ で

$$\varphi(t_1){t_1}^{-n/q} \geq \varphi(t_2){t_2}^{-n/q} \quad (0 < t_1 \leq t_2 < \infty). \tag{2.1}$$

をみたすもの全体を $\mathcal{G}_q(\mathbb{R}^n)$ で表す．

$\mathbb{R}^n$ 上ほとんどいたるところ正値な局所可積分関数を荷重 (weight) という．

る．Liang et al. [9] における generalized Besov 型関数空間と generalized Triebel-Lizorkin 型関数空間は [11] で定義した generalized Besov 型関数空間, generalized Triebel-Lizorkin 型関数空間とは若干異なる関数空間であることに注意されたい．

[3][12] では weighted generalized Besov-Morrey 空間 $\dot{\mathcal{N}}^s_{\mathcal{M}^{\varphi}_q,r}(w)$ と weighted Besov 型空間 $\dot{B}^{s,\varphi}_{q,r}(w)$ についても考察している．

定義 2.1 (weighted generalized Morrey 空間 $\mathcal{M}_q^{\varphi}(w)$). $0 < q < \infty$, $\varphi \in \mathcal{G}_q(\mathbb{R}^n)$ とし，w を荷重とする．$\mathbb{R}^n$ 上の可測関数 f で

$$\|f\|_{\mathcal{M}_q^{\varphi}(w)} := \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \varphi(\ell(Q)) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x)|^q w(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \tag{2.2}$$

をみたすもの全体の集合を weighted generalized Morrey 空間 $\mathcal{M}_q^{\varphi}(w)$ という.

2.1 いくつかの記号と用語の準備

weighted generalized Triebel-Lizorkin-Morrey 空間 $\dot{\mathcal{E}}^s_{\mathcal{M}_q^{\varphi},r}(w)$ と weighted Triebel-Lizorkin 型空間 $\dot{F}^{s,\varphi}_{q,r}(w)$ を定義するにあたり，必要となる立方体などについて，次の記号を用いる.

(1) 可測集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ に対して，$|E|$ で E のルベーグ測度を表すものとする．また，χ_E を E の特性関数とする.

(2) $\mathbb{R}^n$ において，各辺が座標軸に平行な立方体全体の集合を $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ または単に $\mathcal{Q}$ で表す.

(3) $Q \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ の辺長を $\ell(Q)$ で表す．つまり，$\ell(Q) = |Q|^{1/n}$ である.

(4) $Q \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ に対して，$j_Q := -\log_2 \ell(Q)$ と定義する．2 進立方体

$$Q_{jk} = \prod_{i=1}^{n} \left[2^{-j}k_i, 2^{-j}(k_i+1)\right) \quad (j \in \mathbb{Z}, \quad k = (k_1, k_2, \cdots, k_n) \in \mathbb{Z}^n)$$

に対して，$j_{Q_{jk}} = j$ である.

(5) a を正数とし，$Q \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ とする．中心が Q と同じであり，辺長が $a\ell(Q)$ である立方体を aQ で表す.

(6) $\mathbb{R}^n$ における 2 進立方体全体の集合を $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ または単に $\mathcal{D}$ で表す.

(7) $\lfloor \cdot \rfloor$ をガウス記号とする.

2.2 関数空間の定義

2.1節に引き続き，$\dot{\mathcal{E}}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q,r}(w)$ と $\dot{F}^{s,\varphi}_{q,r}(w)$ を定義するための準備を行う．

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ を急減少関数の空間とする．$\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ は

$$\operatorname{supp}\hat{\phi} \subset \left\{\xi \in \mathbb{R}^n \, : \, \frac{1}{2} < |\xi| \le 2\right\}, \tag{2.3}$$

$$|\hat{\phi}(\xi)| \ge C > 0 \ \text{ if } \ \frac{3}{5} \le |\xi| \le \frac{5}{3} \tag{2.4}$$

をみたすものを考える．ここで，$\hat{\phi}$ は ϕ のフーリエ変換，つまり

$$\hat{\phi}(\xi) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) e^{-ix\cdot\xi} dx \qquad (\xi \in \mathbb{R}^n)$$

である．

(2.3) をみたす $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ は

$$\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n) = \left\{\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \, : \, \int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha \phi(x)\, dx = 0 \quad (\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n)\right\}.$$

に属する．$\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$ を $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ の部分空間として扱う．このとき，$\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$ は完備距離空間であることが知られている（例えば [15, (3.7)] を参照）．$\mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$ を $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$ の双対空間とする．$\mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$ に弱 $*$-位相を導入すると $\mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$ は完備であることが知られている（例えば [3], [15, (3.7)] を参照）．$\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ を $\mathbb{R}^n$ における多項式全体の集合とすると，$S'_\infty(\mathbb{R}^n) \sim S'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}$ (位相同型) である（例えば [18, Proposition 8.1], [13, Theorem 2.7], [14, Theorem 2.25] あるいは [11, Theorem 6.28] を参照）．$f \in \mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$ と $g \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$ に対して，$\langle f, g\rangle := f(g)$ とし，ϕ と f の畳み込みを $\phi * f = \langle f, \phi(x - \cdot)\rangle$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ と定義する．

$\dot{\mathcal{E}}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q,r}(w)$ と $\dot{F}^{s,\varphi}_{q,r}(w)$ はそれぞれ，次の混合ノルム $\mathcal{M}^\varphi_q(w,\ell^r)$ と $L^q_\varphi(w,\ell^r)$ によって定義される．

定義 2.2. $0 < q < \infty$, $0 < r \le \infty$, $\varphi \in \mathcal{G}_q(\mathbb{R}^n)$ とし，w を荷重とする．

(1) $\mathbb{R}^n$ 上の可測関数列 $G = \{g_j\}_{j=-\infty}^\infty$ で

$$\|G\|_{\mathcal{M}^\varphi_q(w,\ell^r)} := \left\| \left\| \{g_j\}_{j=-\infty}^\infty \right\|_{\ell^r} \right\|_{\mathcal{M}^\varphi_q(w)} < \infty$$

をみたすもの全体の集合を $\mathcal{M}^\varphi_q(w,\ell^r)$ と表す．

(2) $\mathbb{R}^n$ 上の可測関数列 $G=\{g_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ に対して

$$\|G\|_{L^q_\varphi(w,\ell^r)} := \sup_{P\in\mathcal{Q}} \frac{\varphi(\ell(P))}{|P|^{\frac{1}{q}}} \left[\int_P \left\|\{|g_j(x)|\}_{j=\lfloor j_P\rfloor}^{\infty}\right\|_{\ell^r}^q w(x)\,dx\right]^{\frac{1}{q}}$$

とする．$\|G\|_{L^q_\varphi(w,\ell^r)}$ が有限となる $G=\{g_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ の集合を $L^q_\varphi(w,\ell^r)=L^q_\varphi(\mathbb{R}^n,w,\ell^r)$ と表す.

(3) $w\equiv 1$ であるとき，$\mathcal{M}^\varphi_q(w,\ell^r)$ を $\mathcal{M}^\varphi_q(\ell^r)$ と表す．同様に $L^q_\varphi(w,\ell^r)$ を $L^q_\varphi(\ell^r)$ と表す.

$\dot{\mathcal{E}}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q,r}(w)$ と $\dot{F}^{s,\varphi}_{q,r}(w)$ を順に定義していく．それぞれの定義において，$\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して $\phi_j(x)$ ($x\in\mathbb{R}^n$, $j\in\mathbb{Z}$) を $\phi_j(x):=2^{jn}\phi(2^jx)$ と定義する.

定義 2.3 (generalized Triebel-Lizorkin-Morrey 空間 $\dot{\mathcal{E}}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q,r}(w)$)**.** $\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ は (2.3) と (2.4) をみたすとする．$s\in\mathbb{R}$, $0<q<\infty$, $0<r\le\infty$, $\varphi\in\mathcal{G}_q$ とし，w は荷重とする．次に定義する $\|f\|_{\dot{\mathcal{E}}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q,r}(w)}$ が有限となる $f\in\mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$ 全体の集合を weighted generalized Triebel-Lizorkin-Morrey 空間 $\dot{\mathcal{E}}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q,r}(w)$ という：

$$\begin{aligned}\|f\|_{\dot{\mathcal{E}}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q,r}(w)} &:= \left\|\left\{2^{js}|\phi_j*f(\cdot)|\right\}_{j=-\infty}^{\infty}\right\|_{\mathcal{M}^\varphi_q(w,\ell^r)}\\ &= \sup_{P\in\mathcal{Q}} \frac{\varphi(\ell(P))}{|P|^{\frac{1}{q}}}\left[\int_P \left\|\left\{2^{js}|\phi_j*f(x)|\right\}_{j=-\infty}^{\infty}\right\|_{\ell^r}^q w(x)\,dx\right]^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

注意 2.4. (1) $\|f\|_{\dot{\mathcal{E}}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q,r}(w)}$ において，$\sup\limits_{P\in\mathcal{Q}}$ は $\sup\limits_{P\in\mathcal{D}}$ に置き換えてもよい．実際，同値な (準) ノルムになる.

(2) $\dot{\mathcal{E}}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q,r}(w)$ が適切に定義されているためには，(準) ノルムが (2.3) と (2.4) をみたす ϕ の取り方に依らないことを示す必要がある．そのためには荷重 w に条件が必要となり，例えば w は定理 3.3で述べるような $A_q(\mathbb{R}^n)$ や $\mathcal{B}_{\varphi,q}(\mathbb{R}^n)$ といった集合に属し，さらに weighted integral condition (2.11) をみたすなどの条件が必要である．w がこれらの条件をみたすときには $\dot{\mathcal{E}}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q,r}(w)$ は ϕ の取り方に依らないことを示すことができる（定理 3.3）.

定義 2.5 (generalized Triebel-Lizorkin 型空間 $\dot{F}^{s,\varphi}_{q,r}(w)$). $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ は (2.3) と (2.4) をみたすとする．$s \in \mathbb{R}$, $0 < q < \infty$, $0 < r \le \infty$, $\varphi \in \mathcal{G}_q$ とし，w は荷重とする．次に定義する $\|f\|_{\dot{F}^{s,\varphi}_{q,r}(w)}$ が有限となる $f \in \mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$ 全体の集合を weighted generalized Triebel-Lizorkin 型空間 $\dot{F}^{s,\varphi}_{q,r}(w)$ という：

$$\begin{aligned}\|f\|_{\dot{F}^{s,\varphi}_{q,r}(w)} &:= \left\| \left\{ 2^{js}|\phi_j * f(\cdot)| \right\}_{j=-\infty}^{\infty} \right\|_{L^q_\varphi(w,\ell^r)} \\ &= \sup_{P \in \mathcal{Q}} \frac{\varphi(\ell(P))}{|P|^{\frac{1}{q}}} \left[\int_P \left\| \left\{ 2^{js}|\phi_j * f(x)| \right\}_{j=\lfloor j_P \rfloor}^{\infty} \right\|_{\ell^r}^q w(x)\, dx \right]^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

$w \equiv 1$ の場合，$\dot{F}^{s,\varphi}_{q,r}(w)$ を $\dot{F}^{s,\varphi}_{q,r}(\mathbb{R}^n)$ と表す.

注意 2.6. (1) $\|f\|_{\dot{F}^{s,\varphi}_{q,r}(w)}$ において，$\sup\limits_{P\in\mathcal{Q}}$ は $\sup\limits_{P\in\mathcal{D}}$ に置き換えてもよい．実際，同値な (準) ノルムになる.

(2) $\dot{\mathcal{E}}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q,r}(w)$ の場合と同様に，$\dot{F}^{s,\varphi}_{q,r}(w)$ の (準) ノルムが (2.3) と (2.4) をみたす ϕ の取り方に依らないことを示す必要がある．そのためには荷重 w に条件が必要となる．例えば定理 3.1で述べるように，$w \in A_\infty(\mathbb{R}^n)$ であれば $\dot{F}^{s,\varphi}_{q,r}(w)$ は ϕ の取り方に依らないことを示すことができる.

2.3 荷重クラスと最大不等式について

荷重 w と可測集合 E に対して，

$$w(E) := \int_E w(x)dx, \qquad \langle w\rangle_E := |E|^{-1}\int_E w(x)dx$$

と定義する.

ボレル可測関数 f に対して，weighted Hardy-Littlewood maximal operator M_w を

$$M_w f(x) := \sup_{Q\in\mathcal{Q}\,:\,x\in Q} \frac{1}{w(Q)}\int_Q |f(y)|\, w(y)\, dy \tag{2.5}$$

により定義する．$w \equiv 1$ であるときは M_w を単に M と表し，これを Hardy-Littlewood maximal operator という.

定義 2.7 (Muchenhoupt class A_q). 荷重 w に対して

$$[w]_{A_1} := \operatorname{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{Mw(x)}{w(x)} = \inf\{\alpha > 0 : \forall Q \in \mathcal{D}, \langle w\rangle_Q \le \alpha \operatorname{ess\,inf}_{x\in Q} w(x)\}$$

と定義する．$1 < q < \infty$ に対して $[w]_{A_q}$ を

$$[w]_{A_q} := \sup_{Q\in\mathcal{D}} \frac{w(Q)}{|Q|} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{-\frac{q'}{q}} dx \right)^{\frac{q}{q'}}$$

と定義し，$[w]_{A_\infty}$ を

$$[w]_{A_\infty} := \sup_{Q\in\mathcal{D}} \frac{w(Q)}{|Q|} \exp\left(-\frac{1}{|Q|} \int_Q \log[w(x)] dx \right)$$

と定義する．$1 \le q \le \infty$ に対して

$$A_q(\mathbb{R}^n) = A_q := \left\{ w : \mathrm{weight}, [w]_{A_q} < \infty \right\}$$

と定義する．

注意 2.8. A_q について次の性質が成り立つことが知られている：

(1) $1 \le p \le q$ とするとき，$A_p \subset A_q$ (例えば [2, Proposition 7.2] を参照).

(2) $A_\infty = \bigcup_{q\ge 1} A_q$ (例えば [5, Corollary 9.3.4] を参照).

(3) $w \in A_\infty$ とする． このとき，ある正定数 $C_1, C_2, \alpha_1, \alpha_2$ が存在し，任意の立方体 E と立方体 $Q \subset E$ に対して

$$C_1 \left(\frac{|E|}{|Q|} \right)^{\alpha_1} \le \frac{w(E)}{w(Q)} \le C_2 \left(\frac{|E|}{|Q|} \right)^{\alpha_2} \tag{2.6}$$

が成り立つ．$w \in A_q$ であるときは $\alpha_2 = q$ である．(例えば [2, p. 133-140] を参照).

例 2.9 ([4]). $|x|^\alpha \in A_q(\mathbb{R}^n)$ である必要十分条件は $-n < \alpha < n(q-1)$ である．

$\eta > 0$ とする．べき乗最大作用素 $M^{(\eta)}$ を $M^{(\eta)} f := M[|f|^\eta]^{\frac{1}{\eta}}$ により定義する．つぎの不等式が成り立つことがよく知られている．

定理 2.10 (weighted Fefferman-Stein inequalities). $0 < q < \infty$ とし，$0 < r \le \infty$ とする．

(1) $0 < \eta < \min\{1, q\}$ かつ $w \in A_{\frac{q}{\eta}}$ ならば，ある正定数 C が存在し，任意の $f \in L^q(w)$ に対して

$$\left\| M^{(\eta)} f \right\|_{L^q(w)} \le C \left\| f \right\|_{L^q(w)}. \tag{2.7}$$

(2) $0 < \eta < \min\{1, q, r\}$ かつ $w \in A_{\frac{q}{\eta}}$ ならば，ある正定数 C が存在し，任意の $\{f_j\}_{j=-\infty}^{\infty} \subset L^q(w)$ に対して

$$\left\| \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \left| M^{(\eta)} f_j \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{L^q(w)} \le C \left\| \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} |f_j|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{L^q(w)}. \tag{2.8}$$

証明は，(2.7) については例えば Duoandikoetxea [2, Theorem 7.3] を，(2.8) については例えば Torchinsky [17, §XII. 6.3] を参照されたい．

さらに，次の不等式が成り立つことも知られている．(例えば [1] や [6] を参照)．

定理 2.11 (weighted Fefferman-Stein vector valued inequality). $1 < q < \infty$, $1 < r \le \infty$ とし，$w \in A_\infty$ とする．このとき，ある正定数 C が存在し，任意の $\{f_j\}_{j=-\infty}^{\infty} \subset L^q(w)$ に対して

$$\left\| \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} |M_w f_j|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{L^q(w)} \le C \left\| \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} |f_j|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{L^q(w)}. \tag{2.9}$$

Weighted generalized Morrey 空間 $\mathcal{M}_q^\varphi(w)$ における Hardy-Littlewood maximal operator M の有界性については w が A_q に属するだけでは不十分であることが知られている．本研究では中村 [10] によって導入された荷重クラス $\mathcal{B}_{\varphi,q}(\mathbb{R}^n)$ と weighted integral condition (2.15) が重要な役割を果たす．

定義 2.12 (荷重クラス $\mathcal{B}_{\varphi,q}(\mathbb{R}^n)$). $0 < q < \infty$, $\varphi \in \mathcal{G}_q$ とし，

$$\Phi_{\varphi,q,w}(Q) := \varphi(\ell(Q)) \left(\frac{w(Q)}{|Q|} \right)^{\frac{1}{q}} \quad (Q \in \mathcal{Q})$$

と定義する．荷重 w が $\mathcal{B}_{\varphi,q}(\mathbb{R}^n)$ に属するとは，ある定数 $C_{\varphi,q} > 0$ が存在して，任意の $Q_0 \in \mathcal{Q}$ に対して

$$\sup_{Q \in \mathcal{Q}\,:\,Q \subset Q_0} \Phi_{\varphi,q,w}(Q) \le C_{\varphi,q} \Phi_{\varphi,q,w}(Q_0) \tag{2.10}$$

が成り立つときをいう．

例 2.13 ([10, Example 2.3])**.** $1 \le q < \infty$, $\varphi \in \mathcal{G}_q$, $\alpha > -n$ とする．$w(x) = |x|^\alpha \in \mathcal{B}_{\varphi,q}$ である必要十分条件は，ある定数 $C_{\varphi,q} > 0$ が存在して，

$$\varphi(R_0){R_0}^{\frac{\alpha}{q}} \le C_{\varphi,q}\,\varphi(R_1){R_1}^{\frac{\alpha}{q}} \quad (R_0 \le R_1)$$

が成り立つことである．特に，$\varphi(t) = t^{\frac{n}{p}}$ $(1 \le q \le p < \infty)$ であるとき，

$$|x|^\alpha \in \mathcal{B}_{\varphi,q} \Longleftrightarrow \alpha \ge -\frac{q}{p} \cdot n$$

である．

定理 2.14 ([10, Theorem 1.3])**.** $1 < q < \infty$ とし $\varphi \in \mathcal{G}_q(\mathbb{R}^n)$ とする．$w \in A_q(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{B}_{\varphi,q}(\mathbb{R}^n)$ ならば，*Hardy-Littlewood maximal operator* M は $\mathcal{M}_q^\varphi(w)$ 上の有界作用素である．

w が $\mathcal{B}_{\varphi,q}(\mathbb{R}^n)$ に属するだけでは $\mathcal{M}_q^\varphi(w, \ell^r)$ における Hardy-Littlewood maximal operator M の有界性は示すことができず，例えば次に定義する weighted integral condition が必要になる．

定義 2.15 (weighted integral condition)**.** $0 < q < \infty$, $\varphi \in \mathcal{G}_q$ とし，w を荷重とする．φ, w, q が weighted integral condition をみたすとは，ある定数 $C > 0$ が存在して，

$$\int_1^\infty \frac{1}{\Phi_{\varphi,w,q}(sQ)}\frac{ds}{s} \le \frac{C}{\Phi_{\varphi,w,q}(Q)} \quad (Q \in \mathcal{Q}) \tag{2.11}$$

が成り立つときをいう．

注意 2.16. $w \equiv 1$ であるとき，φ, w, q に対する weighted integral condition (2.11) は

$$\int_r^\infty \frac{1}{\varphi(s)}\frac{ds}{s} \le \frac{C}{\varphi(r)} \quad (r \le s)$$

と同じである．さらに [11, Proposition 2.7] によって，次の条件と同値であることが知られている：ある $\varepsilon > 0$ と $C > 0$ が存在し，

$$\varphi(r)r^{-\epsilon} \le C\varphi(s)s^{-\epsilon} \quad (r \le s) \tag{2.12}$$

が成り立つ．(2.12) は [11, Definition 1.3] において，$r < \infty$ の場合に $\dot{\mathcal{E}}^s_{\mathcal{M}_q^\varphi,r}(\mathbb{R}^n)$ を定義する際に仮定した条件である．また，非斉次の generalized Triebel-Lizorkin 型空間 $F^{s,\varphi}_{q,r}(\mathbb{R}^n)$ を定義する際にも仮定された条件である ([7, Definition 4.1])．

$\mathcal{M}_q^\varphi(w,\ell^r)$ における次の不等式は [10, Theorem 1.4] の直接の系である．

定理 2.17. $1<q<\infty$, $1<r<\infty$, $\varphi\in\mathcal{G}_q(\mathbb{R}^n)$ とし $w\in A_q(\mathbb{R}^n)\cap\mathcal{B}_{\varphi,q}(\mathbb{R}^n)$ とする．このとき，次は同値である．

(1) φ, w, q に対する *weighted integral condition* (2.11) が成り立つ．

(2) ある定数 $C>0$ が存在し，任意の $\{f_j\}_{j\in\mathbb{Z}}\in\mathcal{M}_q^\varphi(w,\ell^r)$ に対し

$$\|\{Mg_j\}_{j=-\infty}^\infty\|_{\mathcal{M}_q^\varphi(w,\ell^r)}\le C\|\{g_j\}_{j=-\infty}^\infty\|_{\mathcal{M}_q^\varphi(w,\ell^r)}. \tag{2.13}$$

$\dot{F}_{q,r}^{s,\varphi}(w)$ の基本的な性質を調べるために $L_\varphi^q(w,\ell^r)$ における Hardy-Littlewood maximal operator M の有界性を用いようとするのは自然な発想であるが，定理2.17と同様に w は $A_\infty(\mathbb{R}^n)$ に属するだけでは不十分で，例えば $\mathcal{B}_{\varphi,q}(\mathbb{R}^n)$ にも属する必要がある．さらには，φ, w, q に対する weighted integral condition (2.11) が成立する必要もある．具体的には次の定理が成り立つ．

定理 2.18. $1<q<\infty$, $1<r<\infty$, $\varphi\in\mathcal{G}_q(\mathbb{R}^n)$ とし $w\in A_q(\mathbb{R}^n)\cap\mathcal{B}_{\varphi,q}(\mathbb{R}^n)$ とする．このとき，次は同値である．

(1) φ, w, q に対する *weighted integral condition* (2.11) が成り立つ．

(2) ある定数 $C>0$ が存在し，任意の $\{g_j\}_{j=-\infty}^\infty\in L_\varphi^q(w,\ell^r)$ に対して

$$\left\|\{Mg_j\}_{j=-\infty}^\infty\right\|_{L_\varphi^q(w,\ell^r)}\le C\left\|\{g_j\}_{j=-\infty}^\infty\right\|_{L_\varphi^q(w,\ell^r)}. \tag{2.14}$$

証明は [7, proof of Theorem 3.6 (ii)] と [10, proof of Thorem 1.4] における議論を用いればよいので割愛する．

注意 2.19. Haroske と Liu[7] は非斉次の generalized Triebel-Lizorkin 型空間 $F_{q,r}^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ について考察しており，この関数空間が適切に定義されていることを示すために定理2.18の非斉次版で $w=1$ の場合の結果 [7, Theorem 3.6 (ii)] を用いている．そのため，[7] では $F_{q,r}^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ の定義において，$r<\infty$ の場合に $\varphi\in\mathcal{G}_q$ は (2.12) をみたすことを仮定している．一方，本研究では定理2.18の代わりに定理2.11を用いるため，$\varphi\in\mathcal{G}_q$ が (2.12) をみたすという仮定がなくても $\dot{F}_{q,r}^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ が適切に定義されていることを示すことができる．

3　主結果

本講演（RIMS 共同研究（公開型)「実解析・複素解析・函数解析の総合的研究」）で発表した主結果は以下のとおりである．

定理 3.1. $s \in \mathbb{R}$, $0 < q < \infty$, $0 < r \leq \infty$, $\varphi \in \mathcal{G}_q$ とし，$\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ は (2.3) と (2.4) をみたすとする．$w \in A_\infty(\mathbb{R}^n)$ とする．このとき，以下が成立する．

(1) *weighted generalized Triebel-Lizorkin* 型空間 $\dot{F}^{s,\varphi}_{q,r}(w)$ の (準) ノルムは ϕ の取り方によらない．

(2) $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{F}^{s,\varphi}_{q,r}(w) \hookrightarrow S'_\infty(\mathbb{R}^n)$ が成り立つ．

命題 3.2. $s \in \mathbb{R}$, $0 < q < \infty$, $0 < r \leq \infty$, $\varphi \in \mathcal{G}_q(\mathbb{R}^n)$ とし，$w \in \mathcal{B}_{\varphi,q}(\mathbb{R}^n) \cap A_\infty(\mathbb{R}^n)$ とする．さらに，$r < \infty$ であるときは， φ, w, q は *weighted integral condition* (2.11) をみたすとする．このとき，$\dot{\mathcal{E}}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q,r}(w) = \dot{F}^{s,\varphi}_{q,r}(w)$ *(ノルム同値)* が成り立つ．

定理 3.3. $s \in \mathbb{R}$, $0 < q < \infty$, $0 < r \leq \infty$, $\varphi \in \mathcal{G}_q$ とし，$\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ は (2.3) と (2.4) をみたすとする．$w \in \mathcal{B}_{\varphi,q}(\mathbb{R}^n) \cap A_\infty(\mathbb{R}^n)$ とし，さらに，$r < \infty$ であるときは， φ, w, q は *weighted integral condition* (2.11) をみたすとする．

(1) *weighted generalized Triebel-Lizorkin-Morrey* 空間 $\dot{\mathcal{E}}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q,r}(w)$ の (準) ノルムは ϕ の取り方によらない．

(2) $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{\mathcal{E}}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q,r}(w) \hookrightarrow S'_\infty(\mathbb{R}^n)$ が成り立つ．

定理 3.1の証明は大変長く，多くの補題が必要となるため，[12] を参照されたい．定理 3.3は命題 3.2と定理 3.1の系である．

命題 3.2は次に述べる定理 3.4と補題 3.5によって示すことができる．定理 3.4の証明についても [12] を参照されたい．

定理 3.4. $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ は (2.3) と (2.4) をみたすとする．$a \in (0, \infty)$ とする．任意の $j \in \mathbb{Z}$, $f \in \mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$ と $x \in \mathbb{R}^n$ に対して，

$$\phi_j^{*,a} f(x) := \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{|\phi_j * f(y)|}{(1 + 2^j|x - y|)^a}.$$

と定義する．$s \in \mathbb{R}$, $0 < q < \infty$, $0 < r \le \infty$, $\varphi \in \mathcal{G}_q(\mathbb{R}^n)$ とし，ある $u \in [1,\infty)$ に対して $w \in A_u(\mathbb{R}^n)$ であるとする．$a > n(1+u)/\min\{q,r\}$ ならば

$$\sup_{P \in \mathcal{Q}} \frac{\varphi(\ell(P))}{|P|^{\frac{1}{q}}} \left[\int_P \left(\sum_{j=\lfloor j_P \rfloor}^{\infty} 2^{jsr} |\phi_j^{*,a} f(x)|^r \right)^{\frac{q}{r}} w(x)\,dx \right]^{\frac{1}{q}}$$

は $\dot{F}^{s,\varphi}_{q,r}(w)$ の同値なノルムである．$r = \infty$ の場合も同様である．

補題 3.5. $0 < q < \infty$, $\varphi \in \mathcal{G}_q(\mathbb{R}^n)$ とし，$\eta > 0$ とする．

(1) w が $\mathcal{B}_{\varphi^\eta, \frac{q}{\eta}}(\mathbb{R}^n)$ に属する必要十分条件は $w \in \mathcal{B}_{\varphi,q}(\mathbb{R}^n)$.

(2) φ^η, w, $\frac{q}{\eta}$ に対する *weighted integral condition*

$$\int_1^\infty \frac{1}{\Phi_{\varphi^\eta, w, \frac{q}{\eta}}(sQ)} \frac{ds}{s} \le \frac{C}{\Phi_{\varphi^\eta, w, \frac{q}{\eta}}(Q)} \quad (Q \in \mathcal{Q}) \tag{3.1}$$

が成り立つ必要十分条件は，φ, w, q に対する *weighted integral condition*

$$\int_1^\infty \frac{1}{\Phi_{\varphi, w, q}(sQ)} \frac{ds}{s} \le \frac{C}{\Phi_{\varphi, w, q}(Q)} \quad (Q \in \mathcal{Q})$$

が成り立つことである．

証明. (1) $\Phi_{\varphi^\eta, w, \frac{q}{\eta}} = (\Phi_{\varphi,w,q})^\eta$ より自明である．(2) $\Phi_{\varphi^\eta, w, \frac{q}{\eta}} = (\Phi_{\varphi,w,q})^\eta$ と [10, Lemma 2.2] より示すことができる． □

以上の準備の下，命題 3.2を示す.

命題 3.2の証明. 各空間のノルムの定義より，$\|f\|_{\dot{F}^{s,\varphi}_{q,r}(w)} \le \|f\|_{\dot{\mathcal{E}}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q, r}(w)}$ は自明である．よって，逆向きの不等式が成り立つことを示す．そのためには，ある正定数 C が存在し，任意の $P \in \mathcal{D}$ に対して

$$I_P := \frac{\varphi(\ell(P))}{|P|^{\frac{1}{q}}} \left(\int_P \left(\sum_{j=-\infty}^{j_P} 2^{jsr} |\phi_j * f(x)|^r \right)^{\frac{q}{r}} w(x)\,dx \right)^{\frac{1}{q}} \le C \|f\|_{\dot{F}^{s,\varphi}_{q,r}(w)} \tag{3.2}$$

が成立することを示せばよい.

$j \le j_P$ とし，$x, y \in \mathbb{R}^n$ は $|x-y| \le n \cdot 2^{-j}$ をみたすとする．このとき，任意の正数 a に対して

$$|\phi_j * f(x)| \lesssim \frac{|\phi_j * f(x)|}{(1+2^j|x-y|)^a} \lesssim \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{|\phi_j * f(x)|}{(1+2^j|x-y|)^a} \sim \phi_j^{*,a} f(y)$$

が成り立つ[4]．$A_\infty(\mathbb{R}^n)$ の性質より，$w \in A_u(\mathbb{R}^n)$ となる $u \in [1, \infty)$ が存在する．この u に対して a を $a > n(1+u)/\min\{q, r\}$ をみたすようにとる．x を中心とする辺長が 2^{-j} の立方体を $Q(x, 2^{-j})$ と表す．$j_{Q(x,2^{-j})} = j$ であることに注意すると，定理3.4より，任意の $x \in \mathbb{R}^n$ と $j \in \mathbb{Z}$ に対して，

$$\begin{aligned}
2^{jsq}|\phi_j * f(x)|^q &\lesssim \frac{1}{w(Q(x,2^{-j}))} \int_{Q(x,2^{-j})} 2^{jsq}|\phi_j^{*,a} f(y)|^q w(y)\,dy \\
&\lesssim \frac{1}{w(Q(x,2^{-j}))} \int_{Q(x,2^{-j})} \left(\sum_{i=j_{Q(x,2^{-j})}}^{\infty} 2^{isr}|\phi_i^{*,a} f(y)|^r \right)^{\frac{q}{r}} w(y)\,dy \\
&\lesssim \frac{1}{w(Q(x,2^{-j}))} \left(\frac{\varphi(\ell(Q(x,2^{-j})))}{|Q(x,2^{-j})|^{\frac{1}{q}}} \right)^{-q} \times \\
&\quad \times \left(\frac{\varphi(\ell(Q(x,2^{-j})))}{|Q(x,2^{-j})|^{\frac{1}{q}}} \right)^{q} \int_{Q(x,2^{-j})} \left(\sum_{i=j_{Q(x,2^{-j})}}^{\infty} 2^{isr}|\phi_i^{*,a} f(y)|^r \right)^{\frac{q}{r}} w(y)\,dy \\
&\lesssim \frac{1}{w(Q(x,2^{-j}))} \left(\frac{\varphi(\ell(Q(x,2^{-j})))}{|Q(x,2^{-j})|^{\frac{1}{q}}} \right)^{-q} \|f\|^q_{\dot{F}^{s,\varphi}_{q,r}(w)}
\end{aligned}$$

を得る．式を整理すると，任意の $x \in \mathbb{R}^n$ と $j \in \mathbb{Z}$ に対して，

$$2^{js}|\phi_j * f(x)| \lesssim \Phi_{\varphi,w,q}(Q(x,2^{-j}))^{-q} \|f\|_{\dot{F}^{s,\varphi}_{q,r}(w)}$$

となる．この不等式より

$$I_P = \frac{\varphi(\ell(P))}{|P|^{\frac{1}{q}}} \left(\int_P \left(\sum_{j=-\infty}^{j_P} 2^{jsr}|\phi_j * f(x)|^r \right)^{\frac{q}{r}} w(x)\,dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

[4] $\lesssim$ と $\sim$ の意味は次のとおりである：$A, B \ge 0$ とする．示すべき内容において重要なパラメータや要素に依存しない正定数 C で $A \le CB$ をみたすものが存在するとき，この不等式を $A \lesssim B$ と表す．同様に，$A \ge CB$ をみたす正定数 C が存在するとき，この不等式を $A \gtrsim B$ と表す．さらに，$A \lesssim B \lesssim A$ であるとき，$A \sim B$ と表す．

$$\lesssim \|f\|_{\dot{F}^{s,\varphi}_{q,r}(w)} \frac{\varphi(\ell(P))}{|P|^{\frac{1}{q}}} \left(\int_P \left(\sum_{j=-\infty}^{j_P} \Phi_{\varphi,w,q}(Q(x,2^{-j}))^{-qr} \right)^{\frac{q}{r}} w(x)\,dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

を得る．よって，(3.2) を示すためには，任意の $P \in \mathcal{D}$ に対して

$$J_P := \frac{\varphi(\ell(P))}{|P|^{\frac{1}{q}}} \left(\int_P \left(\sum_{j=-\infty}^{j_P} \Phi_{\varphi,w,q}(Q(x,2^{-j}))^{-qr} \right)^{\frac{q}{r}} w(x)\,dx \right)^{\frac{1}{q}} \lesssim 1 \tag{3.3}$$

が成り立つことを示せばよいことがわかる．以下，このことを示す．まず，$j \le j_P$ であるので，

$$\bigcup_{x \in P} Q(x,2^{-j}) = \left(1 + \frac{2^{-j}}{2^{-j_P}}\right) P \subset 2 \cdot 2^{j_P - j} P$$

が成り立つことに注意する．(2.6) より，任意の $x \in P$ に対して

$$\frac{1}{w(Q(x,2^{-j}))} = \frac{1}{w(2 \cdot 2^{j_P-j}P)} \cdot \frac{w(2 \cdot 2^{j_P-j}P)}{w(Q(x,2^{-j}))} \lesssim \frac{1}{w(2 \cdot 2^{j_P-j}P)}$$

が成立する．この不等式と $\varphi \in \mathcal{G}_q$ より

$$\begin{aligned}
J_P &= \frac{\varphi(\ell(P))}{|P|^{\frac{1}{q}}} \left(\int_P \left(\sum_{j=-\infty}^{j_P} \Phi_{\varphi,w,q}(Q(x,2^{-j}))^{-qr} \right)^{\frac{q}{r}} w(x)\,dx \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \frac{\varphi(\ell(P))}{|P|^{\frac{1}{q}}} \left(\int_P \left(\sum_{j=-\infty}^{j_P} \frac{1}{w(Q(x,2^{-j}))^{\frac{r}{q}}} \left(\frac{\varphi(\ell(Q(x,2^{-j})))}{|Q(x,2^{-j})|^{\frac{1}{q}}} \right)^{-r} \right)^{\frac{q}{r}} w(x)\,dx \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\lesssim \frac{\varphi(\ell(P))}{|P|^{\frac{1}{q}}} \left(\int_P \left(\sum_{j=-\infty}^{j_P} \frac{1}{w(2 \cdot 2^{j_P-j}P)^{\frac{r}{q}}} \left(\frac{\varphi(\ell(Q(x,2^{-j})))}{|Q(x,2^{-j})|^{\frac{1}{q}}} \right)^{-r} \right)^{\frac{q}{r}} w(x)\,dx \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\lesssim \varphi(\ell(P)) \left(\frac{w(P)}{|P|} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{j=-\infty}^{j_P} \frac{1}{w(2 \cdot 2^{j_P-j}P)^{\frac{r}{q}}} \left(\frac{\varphi(\ell(2 \cdot 2^{j_P-j}P)))}{|2 \cdot 2^{j_P-j}P|^{\frac{1}{q}}} \right)^{-r} \right)^{\frac{1}{r}} \\
&\sim \Phi_{\varphi,w,q}(P) \left(\sum_{j=-\infty}^{j_P} \frac{1}{\Phi_{\varphi^r,w,\frac{q}{r}}(2 \cdot 2^{j_P-j}P)} \right)^{\frac{1}{r}} \\
&\sim \Phi_{\varphi,w,q}(P) \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\Phi_{\varphi^r,w,\frac{q}{r}}(2^i P)} \right)^{\frac{1}{r}}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

を得る．最後の式における級数は補題 3.5, (2.10) と weighted integral condition (3.1) より

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\Phi_{\varphi^r,w,\frac{q}{r}}(2^i P)} \lesssim \int_1^{\infty} \frac{1}{\Phi_{\varphi^r,w,\frac{q}{r}}(sP)} \frac{ds}{s} \lesssim \frac{1}{\Phi_{\varphi^r,w,\frac{q}{r}}(P)} \tag{3.5}$$

と評価できる．実際，(2.10) より

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\Phi_{\varphi^r,w,\frac{q}{r}}(sP)} \frac{ds}{s} \gtrsim \sum_{i=1}^{\infty} \int_{2^{i-1}}^{2^i} \frac{1}{\Phi_{\varphi^r,w,\frac{q}{r}}(2^i P)} \frac{ds}{s} \sim \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\Phi_{\varphi^r,w,\frac{q}{r}}(2^i P)}$$

が成り立つ．(3.4) と (3.5) より，各 $P \in \mathcal{D}$ に対して

$$\begin{aligned} J_P &\lesssim \Phi_{\varphi,w,q}(P) \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\Phi_{\varphi^r,w,\frac{q}{r}}(2^i P)} \right)^{\frac{1}{r}} \lesssim \Phi_{\varphi,w,q}(P) \left(\frac{1}{\Phi_{\varphi^r,w,\frac{q}{r}}(P)} \right)^{\frac{1}{r}} \\ &\lesssim \Phi_{\varphi,w,q}(P) \cdot \frac{1}{\Phi_{\varphi,w,q}(P)} \lesssim 1 \end{aligned}$$

となり，(3.3) が成り立つ． □

参考文献

[1] M. Bownik, Anisotropic Triebel-Lizorkin spaces with doubling measures, J Geom Anal, vol. 17, no. 3, pp. 387–424, 2007.

[2] J. Duoandikoetxea, Fourier Analysis, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.

[3] I. M. Gel'fand and G. E. Shilov, Generalized Functions, Academic Press, London, UK, 1968.

[4] L. Grafakos, Classical Fourier Analysis, Third Edition, Springer, GTM249.

[5] L. Grafakos, Modern Fourier Analysis, Second Edition, Springer, GTM250.

[6] L. Grafakos, L. Liu and D. Yang, Vector-valued singular integrals and maximal functions onspaces of homogeneous type, Math. Scand. 104 (2009), 296–310.

[7] D. D. Haroske and Z. Liu, Generalized Besov-type and Triebel-Lizorkin-type spaces, Studia Math. 273 (2023), 161-199

[8] D. D. Haroske, Z. Liu, S.D.Moura and L. Skrzypczak, Embeddings of generalized Morrey smoothness spaces, Acta. Math. Sin.-English Ser. 41, 413–456 (2025). https://doi.org/10.1007/s10114-025-3553-3

[9] Y. Liang, Y. Sawano, T. Ullrich, D. Yang and W. Yuan, A new framework for generalized Besov-type and Triebel-Lizorkin-type spaces, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) **489** (2013), 114 pp.

[10] S. Nakamura, Generalized weighted Morrey spaces and classical operators, Math. Nachr. **289** (2016), 2235–2262.

[11] S. Nakamura, T. Noi and Y. Sawano, Gereralized Morrey spaces and trace operator, Sci. China Math. **59** (2016), 281–336.

[12] T. Noi, Weighted generalized Morrey smoothness spaces, to be submitted.

[13] Y. Sawano, Homogeneous Besov spaces, Kyoto J Math. **60** (1) 1 - 43, April 2020.

[14] Y. Sawano, Theory of Besov Spaces. Springer: Springer Singapore, 2018.

[15] E. M. Stein and G. Weiss, Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1971.

[16] J. Sun, D. Yang and W. Yuan, W. A framework of Besov-Triebel-Lizorkin type spaces via ball quasi-Banach function sequence spaces I: real-variable characterizations, Math. Ann. 390, 4283–4360 (2024).

[17] A. Torchinsky, Real–Variable Methods in Harmonic Analysis, Academic Press, San Diego, 1986

[18] W. Yuan, W. Sickel and D. Yang, Morrey and Campanato Meet Besov, Lizorkin and Triebel. Lecture Notes in Math., vol. 2005, Springer, Berlin, 2010.