Besov空間における高階発展方程式

大阪経済法科大学・岩田順敬 *

Yoritaka Iwata
Osaka University of Economics and Law,
Gakuonji 6-10, Yao, Osaka 581-8511, Japan.

Mathematics Subject Classification 2010 : 37L05, 47D60, 30H25.

Abstract

Besov空間上で高階抽象発展方程式を考える。 Banach空間の非有界作用素に対する対数表現理論を用いることで、高階発展作用素の生成に関する定理を証明する。 本稿で示される結果は、既存のBesov空間上で構築された一階双曲型抽象発展方程式論を高階方程式に拡張するものである。

1　導入

これまで抽象発展方程式論においては、解析を行う舞台の具体性を取り除いて、Banach空間やHilbert空間という基本的な性質のみを持つものとして理論が構成されてきた(例えば、[13]を参照)。 Banach空間やHilbert空間の例としては、関数の集合に代数的な構造や距離が与えられたものもあるが、それ以外に数列や行列、実数や複素数から構成されるものもある。 その意味では、Banach空間という設定は微分方程式を扱うには一般的すぎる設定であると言うこともできる。 本稿ではBanach空間に対して、より具体的なBesov空間という関数空間としての構造を与えることで、より具体的な設定の下での抽象発展方程式論を構成する。 つまり、解析の舞台となる空間に対してより具体的設定を与えることで、これまでには無かった理論を展開できるかという点に、Besov空間上で抽象発展方程式を考える上での要点がある。 とくにここで関数空間として補間空間としての性質を有するBesov空間を採用するのは、関数空間の中ではBesov空間が自在に可積分性を制御できるという意味で一般的な母体を与えるものになっているからである。

他方、近年までは、Besov空間を非斉次発展方程式の枠組みに導入するという試みは、主に放物型発展方程式に対して行われてきた。 Besov空間を舞台にして、双曲型抽象発展方程式において非斉次発展方程式が抽象的に論じられた研究としては、本研究に先立って行われたIwata[7]がある。 ここで、例えば[2]のように具体的に方程式を限定した上で、Besov空間を舞台に双曲型方程式に対して行われた研究は既にいくつか存在している。 本稿では、一階抽象双曲型発展方程式に対してBesov空間を解析の舞台として得られた結果[8]を拡張することで、高階抽象双曲型発展方程式に対する発展作用素の生成に関する定理を証明する。

*E-mail address: **y-iwata@s.keiho-u.ac.jp**

2　数学的設定

2.1　Banach空間上の高階抽象双曲型発展方程式

空間XがBanach空間とした場合の一般論から始める。 Banach空間Xにおいて、非斉次項をもつn階抽象発展方程式を考える。

$$
\begin{aligned}
&d^n u/dt^n - A_n u = f(t), \qquad t \in (a,b], \\
&u(a) = u_a
\end{aligned} \tag{1}
$$

ここでnは自然数で、tは時間変数、A_1は変数tに依存しない無限小生成作用素、$u(t)$はBanach空間X上の要素を表している。 A_1はC^0-群の生成素ではあるものの、解析的群の生成素であるとは限らないものと仮定する。 このような方程式は、双曲型発展方程式に分類される[10, 11]。 非斉次項$f(\cdot)$は時間的に強連続なX値関数として$C((a,b);X)$で与えられるものとする。 A_1によって生成される発展作用素（作用素の群）を$U(t)$と表すことにすれば、$n=1$の場合を考えたことになる。 ここで半群ではなく群として$U(t)$を考えたことから、$U(t)^{-1} = U(-t)$が存在する。 現在の設定の下で、一階方程式は一意な時間局所解を持つ。 このような解で時間的に連続性を持つ解は、形式的に

$$
u(t) = U(t)u_s + \int_s^t U(\tau) f(t-\tau)\ d\tau, \qquad a \le s \le t \le b \tag{2}
$$

と表現することができ、軟解(mild solution)と呼ばれる。 非斉次抽象発展方程式が研究され始めた初期の段階から軟解はよく研究されていて、解の存在や一意性に関する基本的な結果が既に得られている(例えば、[13]を参照）。

$t \in [a,b]$とする。 Banach空間X上で１パラメータの有界作用素

$$
U(t) : X \to X
$$

を考える。 ここで$U(t)$はX上の有界作用素であることから、必然的に閉区間$t \in [a,b]$に対して空集合ではないレゾルベント集合を持つと仮定する。 有界作用素$U(t)$に対して、レゾルベント作用素を次で定義する。

$$
I_\eta(t) = (I - \eta^{-1} U(t))^{-1}
$$

複素数ηは$U(t)$のレゾルベント集合から選ばれた複素数を表している。 複素数ηについては$U(t)$のレゾルベント集合から選ばれるということの他には特に大きさなどについて満たすべき条件はない。 また$U(t)$のレゾルベント集合から選ばれたηに対して、作用素$I_\eta(t)$は空間X上の有界な逆作用素$I_\eta(t)^{-1} = I - \eta^{-1}U(t)$の存在を許す有界作用素として定義できる。

2.2　差分作用素を用いたBesov空間の定義

Muramatsu[12]に基いて、Lebesgue空間、Sobolev空間、Besov空間の定義と表記を導入する。 これらの空間はいずれも、一般的に、Banach空間としての性質を有している。

mを整数、p、qを実数とする。 とくにp、qに対しては、$1 \le p, q \le \infty$が成立するものとする。 yに対するk次の差分作用素をΔ_y^kで表す。 1次及び2次の差分作用素は

$$
\begin{aligned}
&\Delta_y f(x) = f(x+y) - f(x), \\
&\Delta_y^2 f(x) = f(x+2y) - 2f(x+y) + f(x)
\end{aligned}
$$

である。 Ωをn次元ユークリッド空間$\mathbb{R}^n$内の開集合とし、yと次数kに依存した領域$\Omega_{k,y}$を

$$\Omega_{k,y} = \bigcap_{j=0}^{k}(\Omega - jy) = \{x; \quad x + jy \in \Omega \text{ for } j = 0, \cdots, k\}$$

で与える。

$L_p(\Omega)$： Lebesgue測度dxについてのL_p空間。

$L_p^*(\Omega)$ ： 測度$|x|^{-n}dx$についてのL_p空間。

$L_p(\Omega; X)$： Ω上で定義され、強可測なX値関数の全体がなす空間。つまり、この空間に属する関数fに対して$||f(t)||_X \in L_p(\Omega)$が成立する。

$L_p^*(\Omega; X)$： $L_p(\Omega; X)$について、L_pをL_p^*に置き換えて得られる空間。

次にSobolev空間$W_p^m(\Omega; X)$を定義する。$m \geqq 0$の場合は、

$W_p^m(\Omega; X)$： m次までのすべての導関数が$L_p(\Omega; X)$に属しているような関数fの全体からなる空間。この空間には $||f||_{W_p^m(\Omega,X)} = \sum_{|\alpha|\leqq m} ||\partial_x^\alpha f||_{L_p(\Omega,X)}$の形のノルムが備えらえる。

一方で$m < 0$の場合は、

$W_p^m(\Omega; X)$： $f_\alpha \in L_p(\Omega; X)$として、$f(x) = \sum_{|\alpha|\leqq -m} \partial_x^\alpha f_\alpha(x)$の形の超関数の全体から構成される空間。 この空間には $\|f\|_{W_p^m(\Omega.X)} = \inf \sum_{|\alpha|\leqq -m} ||f_\alpha||_{L_p(\Omega,X)}$の形のノルムが備えられる。 ここで、下限infは上記の表現式を持つすべての関数に対して取られる。

最後にBesov空間$B_{p.q}^\sigma(\Omega; X)$を定義する。 実数$\sigma$を$\sigma = m + \theta$に分解する。 ここで$m$は整数で、$\theta \in (0, 1]$は実数であるとする。 $m \geqq 0$の場合、$f \in W_p^m(\Omega; X)$として、

$B_{p.q}^\sigma(\Omega; X)$： 半ノルム

$$|f|_{B_{p,q}^\sigma(\Omega,X)} = \sum_{|\alpha|=m} \left\| |y|^{-\theta} \{ \|\Delta_y^k \partial_x^\alpha f(x)\|_{L_p(\Omega_{k,y},X)} \} \right\|_{L_q^*(\mathbb{R}^n)}$$

が有限値をとるような関数の全体からなる空間として$B_{p.q}^\sigma(\Omega; X)$を定義する。 ここで実数$k$は$\theta \in (0, 1)$のときは$k = 1$、$\theta = 1$のときは$k = 2$とする。 この空間にはノルム

$$\|f\|_{B_{p,q}^\sigma(\Omega,X)} = \|f\|_{W_{p(\Omega,X)}^m} + |f|_{B_{p,q}^\sigma(\Omega.X)}$$

が備えられる。

一方で$m < 0$の場合は、

$B_{p,q}^\sigma(\Omega; X)$： $f_\alpha \in B_{p.q}^\theta(\Omega; X)$として、$f(x) = \sum_{|\alpha|\leqq -m} \partial_x^\alpha f_\alpha(x)$の形の超関数の全体から構成される空間。 この空間にはノルム

$$||f||_{B_{p.q}^\sigma(\Omega,X)} = \inf \sum_{|\alpha|\leqq -m} ||f_\alpha||_{B_{p,q}^\theta(\Omega,X)}$$

が備えられる。 ここで、下限infは上記の表現式を持つすべての関数に対して取られる。

3 主要な補題

3.1 Besov空間上の抽象発展方程式論

まず文献[1, 12]に基づいて、抽象放物型発展方程式についての結果をまとめる。 これまでの議論と同様に時間区間(a,b)を想定する。 Crandall-Pazy[1]に基づいて、 のうちで非斉次項$f(t)$に起因する項

$$F(t) = \int_s^t U(\tau) f(t-\tau)\ d\tau \tag{3}$$

に着目する。 実際、$U(t)u_s$の部分は、$U(t)$がC^0-群であるという現在の設定を思い起こせば、u_sがXの要素として与えられさえすればBanach空間Xの値として定義できるので、問題にする必要はない。 Crandall-Pazy[1]では、区間(a,b)の任意のコンパクトな区間Kにおいて

$$\int_0^\delta \sup\{||f(t)-f(s)||_X; t,s \in K, |t-s| \leqq h\} \frac{dh}{h} < \infty$$

が満たされるならば、Fが強微分可能であることが証明された。 とくに、fがHölder連続ならば、Fは強連続微分可能となる。 Muramatsu[12]では、この結果を改良した次の補題が証明された。

Lemma 3.1. Fは式(3)によって定義されるものとする。 A_1がX上、$t \geqq 0$で解析的半群を生成すると仮定する。実数σ、$1 \leqq p,q \leqq \infty$に対して、次が成立する。

$$f \in B^{\sigma}_{p.q}((a,b);X)_{1oc} \cap L_1((a,b);X) \quad \Rightarrow \quad F \in B^{\sigma+1}_{p.q}((a,b);X)_{1oc}.$$

ここで、関数空間$\mathcal{F}(I;X)$に対して$\mathcal{F}(I;X)_{\mathrm{loc}}$と書いた場合には、任意の$\phi \in C_0^\infty(I)$に対して$\phi f \in \mathcal{F}(I;X)$を満たすような関数$f$の全体からなる空間を表すものとする。

Muramatsu[12]では、Lemma3.1に基づいて、次の補題が証明された。

Lemma 3.2. Fは式(3)によって定義されるものとする。 *Lemma3.1*と同様に、A_1がX上、$t \geqq 0$で解析的半群を生成すると仮定する。実数σ、$1 \leqq p,q \leqq \infty$に対して、 $f \in B^{\sigma}_{p,q}(I;X)_{1oc} \cap L_1(I;X)$を仮定する。 さらに以下の条件のうちの一つがを満たされるものとする。

(a) $\sigma > \frac{1}{p}$ (b) $\sigma = \frac{1}{p}, \quad q = 1$

このとき、$t \in I$及び$F(t) \in D(A_1)$に対して、Fは区間(a,b)で強連続微分可能で、

$$\frac{dF}{dt}(t) - A_1 F(t) = f(t), \qquad a < t < b,$$

が成立する。

Lemma3.1及びLemma3.2について、実際に[12]では解析的半群の生成素に対して証明された。 本論文での設定にあわせて、以下では、Lemma3.1及びLemma3.2を解析的群の生成素に対する結果として扱う。

3.2 Banach空間上の非有界作用素に対する対数表現

Banach空間上の有界作用素$U(t)$に対して、その生成素A_1は一般的に非有界作用素となる。Banach空間Xにおいて、有界作用素$U(t)$及び$I_\eta(t)$を用いて、Banach空間X上で非有界作用素

$$A_1 : D(A_1) \to X$$

を表す。ここで$D(A_1) \subset X$は作用素Aの定義域を表している。Iwata[3, 4]に基づいて、作用素A_1を対数関数で表現して

$$\mathcal{A}_1(t) = t^{-1} \left(\mathrm{Log}[\eta(I_\eta - I)] - \mathrm{Log}[I_\eta] \right) \tag{4}$$

と定義しなおす[6]。もとの作用素A_1はtに依存しないものとして式(2)で定義されたが、式(4)の右辺に$I_\eta(t)$やt^{-1}があることから、ここでは形式的に$\mathcal{A}_1(t)$と書いておく。上記の設定での$\mathcal{A}_1(t)$が実際にtに依存しないことについては、Iwata[9]のLemma3.2で示されている。一価関数として対数関数を定義するために"Log"は対数の主値を表すものとし、作用素の対数関数はRiesz-Dunford積分によって定義されるものとする。とくに$\mathrm{Log}[\eta(I_\eta - I)]$や$\mathrm{Log}[I_\eta]$が、逆作用素$U(t)^{-1}$が存在するもとで定義可能であることは、Iwata[9]の定理4.1で示されている。このときに、実部、虚部ともに負値をとっても構わない。もし$A_1(t)$が$U(t)$を生成するX上有界な無限小生成作用素で、$A_1(t)$と$U(t)$が可換であるならば、この表現式で表された関係は$\mathcal{A}_1(t)$を$A_1(t)$で置き換えて、自然に満たされることに留意する[3, 4]。式(4)の右辺にあるt^{-1}は作用素の対数表現に現れる弱微分[5]を現在の設定の下で置き換えたものになっている。

結果をまとめると、次の補題のようになる。この補題は作用素$A_1(t)$が$U(t)$を生成するということを必ずしも仮定せずに式(4)に示された表現式のみを仮定して議論がすすめられるという意味で、Iwata[4]で考えられた定理よりも一般的なものとなっている。さらにIwata[4]で仮定された、$U(t)$に対する半群性・群性を仮定する必要がなく、作用素$U(t)$と作用素$A_1(t)$の間に発展作用素と無限小生成作用素という関係性が成り立つ必要もない。基本的には表現式(4)を持つ作用素がBanach空間で定義できれば、次の補題の成立から展開される一連の議論が可能となる。文献[9]のLemma3.1及びLemma3.2をもとにまとめると、次のようになる。

Lemma 3.3. $t \in [a, b]$とし、Banach空間X上で1パラメータの有界作用素$U(t)$が与えられるものとする。Banach空間Xにおいて、時間変数$t \in I = (a, b)$に依存しない

$$\mathcal{A}_1 = t^{-1} \mathrm{Log}[\eta(I_\eta - I) I_\eta^{-1}] \tag{5}$$

と表される作用素を想定すれば、この作用素はtに依存しない作用素としてBanach空間X上でC^0-群$U(t)$を生成する。作用素$U(t)$の拡張として$\mathcal{A}_1$から直接定義された$e^{t\mathcal{A}_1}$は指数関数の漸近展開形で表すことでき解析的群となる。

Proof. 証明の詳細は、文献[9]のLemma3.1及びLemma3.2を参照することとして、ここでは、(5)の表現が得られることを確認する。単位作用素を$I_\eta I_\eta^{-1}$として、作用させることから始めると、

$$\begin{aligned}
A_1(t) &= \partial_t \mathrm{Log}[U(t) I_\eta I_\eta^{-1}] \\
&= \partial_t \mathrm{Log}[U(t)(I - \eta^{-1}U(t))^{-1} I_\eta^{-1}] \\
&= \partial_t \mathrm{Log}[\{-(\eta I - U(t)) + \eta I\}(I - \eta^{-1}U(t))^{-1} I_\eta^{-1}] \\
&= \partial_t \mathrm{Log}[\{-(\eta I - U(t))(I - \eta^{-1}U(t))^{-1} + \eta(I - \eta^{-1}U(t))^{-1}\} I_\eta^{-1}] \\
&= \partial_t \mathrm{Log}[\{-\eta I + \eta(I - \eta^{-1}U(t))^{-1}\} I_\eta^{-1}] \\
&= \partial_t \mathrm{Log}[\eta\{-I + (I - \eta^{-1}U(t))^{-1}\} I_\eta^{-1}]
\end{aligned}$$

となることから明らかである。また(5)で表される作用素がBanach空間X上の有界作用素になることも明らかである。このことから解析的群の性質が従う。 □

文献[8]をもとにtに依存しない作用素に対する結果としてまとめると、次のようになる。Lemma3.3と比較して、この補題においては作用素A_1が解析的群の生成素であるという仮定を行う代わりに、対数表現を持つ連続群（C^0-群）の生成素であることを仮定している。

Lemma 3.4. Fは式(3)によって定義されるものとする。 A_1がX上、$t \geqq 0$でC^0群$U(t)$を生成すると仮定する。 実数σ、$1 \leqq p, q \leqq \infty$及び$U(t)$のレゾルベント集合に属するある複素数$\eta$に対して 無限小生成作用素$A_1$を

$$\mathcal{A}_1 = t^{-1}\mathrm{Log}[\eta(I_\eta - I)I_\eta^{-1}] \tag{6}$$

によって定義しなおす。 $f \in B^{\sigma}_{p,q}(I;X)_{1oc} \cap L_1(I;X)$を仮定する。 さらに以下の条件のうちの一つが満たされるものとする。

(a) $\sigma > \frac{1}{p}$ (b) $\sigma = \frac{1}{p}$, $q = 1$

このとき、$t \in (a,b)$及び$F(t) \in D(A_1)$に対して、Fは区間(a,b)で強連続微分可能で、

$$\frac{dF}{dt}(t) - \mathcal{A}_1 F(t) = f(t), \qquad a < t < b, \tag{7}$$

が成立する。

ここで、方程式(7)の生成素がA_1から有界作用素$\mathcal{A}_1$に変更されていることに留意する。 Lemma3.4は、Lemma3.2にLemma3.3を適用することで示される。

4 主結果

Banach空間X上で、高階非斉次双曲型発展方程式を想定する。

$$\begin{aligned} &d^n u/dt^n - A_n u = f(t), \qquad t \in (a,b], \\ &u(a) = u_a \end{aligned} \tag{8}$$

この方程式は連立一次方程式として

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \\ u_{n-3} \\ \vdots \\ u_1 \\ u \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -A_n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \\ u_{n-3} \\ \vdots \\ u_1 \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

と書き換えることができる。 これはBanach空間の直積空間で一階発展方程式を考えたことに他ならない。 これを直積で表されたBanach空間$\mathfrak{X}$上の方程式

$$\begin{aligned} &d\mathfrak{u}/dt - \mathfrak{A}\mathfrak{u} = \mathfrak{f}(t), \qquad t \in (a,b], \\ &\mathfrak{u}(a) = \mathfrak{u}_a \end{aligned} \tag{10}$$

とみて、次の定理が成立する。

Theorem 4.1. Banach空間$\mathfrak{X}$で方程式(10)のCauchy問題を考える。 $\mathfrak{U}(t)$が作用素 $\mathfrak{A}$によって生成され、$\mathfrak{I}$は$\mathfrak{U}(t)$のレゾルベント作用素をあらわすものとして、$\mathfrak{U}(t)$は空でないレゾルベント集合を持つものと仮定する。

$$\mathfrak{F}(t) = \int_s^t \mathfrak{U}(\tau)\mathfrak{f}(t-\tau)\ d\tau$$

によって定義されるものとする。 このとき、実数σ、$1 \leqq p, q \leqq \infty$及び$U(t)$のレゾルベント集合に属するある複素数$\eta$に対して、無限小生成作用素$\mathfrak{A}$が

$$\mathfrak{A} = t^{-1} \mathrm{Log}[\eta(\mathfrak{I}_\eta - \mathfrak{I})\mathfrak{I}_\eta^{-1}] \qquad n = 2, 3, 4 \cdots \tag{11}$$

によって定義しなおすことができる。 さらに$\mathfrak{f} \in B^{\sigma}_{p,q}((a,b);\mathfrak{X})_{1oc} \cap L_1((a,b);\mathfrak{X})$を仮定し、以下の条件のうちの一つが満たされるものとする。

(a) $\sigma > \frac{1}{p}$ (b) $\sigma = \frac{1}{p}, \quad q = 1$

このとき、$t \in (a,b)$及び$\mathfrak{F}(t) \in D(\mathcal{A})$に対して、$\mathfrak{F}$は区間$(a,b)$で強連続微分可能で、

$$\frac{d\mathfrak{F}}{dt}(t) + \mathfrak{A}\mathfrak{F}(t) = \mathfrak{f}(t), \qquad a < t < b,$$

が成立する。

Proof. 証明は連立一次方程式化したCauchy問題にLemma3.4を適用することで完成する。 言い換えれば、第一に、高階方程式を連立一次方程式として扱うこと、第二に、Besov空間理論が適用可能なように作用素の対数表演から得られた代替的生成素によってCauchy問題を記述しなおすことに要点がある。 □

ここで、生成素がA_1からA_nについて書かれたそれぞれの方程式(8)について、生成素がA_1からA_nに特定の関係性を仮定すれば、同一の解をもつことがIwata[7]によって抽象的枠組みで示されている。 これは、特定の場合においてA_1で表された一階方程式についての連続群の生成が明らかであれば、A_nによる連続群の生成、つまり$\mathfrak{A}$による連続群の生成が従うことを意味する。

5 謝辞

原稿を仕上げるにあたって、追手門学院大学の野井貴弘氏から有益なコメントを頂戴した。この研究は京都大学の補助を得て行われた.

References

[1] M. G. Crandall and A. Pazy, On the differentiability of weak solutions of a differential equation in Banach spaces, J. Math. Mech., 18 (1969), 1007-1016.

[2] Fabrice Planchon, J. Math. Pures Appl. 79, 8 (2000) 809–820

[3] Y. Iwata, Theory of B(X)-module: algebraic module structure of generally-unbounded infinitesimal generators, Adv. Math. Phys. Vol. 2020, Article ID 3989572.

[4] Y. Iwata, Unbounded generalization of logarithmic representation of infinitesimal generators, Math. Meth. Appl. Sci. 9002, 2023.

[5] Y. Iwata, Operator topology, A chapter of a book "Topology", IntechOpen, 2020 (DOI:10.5772/intechopen.92226).

[6] Y. Iwata, Alternative infinitesimal generator of invertible evolution families, Journal of Applied Mathematics and Physics **5** (2017) 822-830.

[7] Y. Iwata, Recurrence formula for some higher order evolution equations, Chaos, Solitons Fractals: X 13 (2024) 100119

[8] 岩田順敬, Besov空間における双曲型発展方程式, 京都大学数理解析研究所講究録 2283, 168

[9] 岩田順敬 1パラメータ連続群を生成する作用素類の表現, 第 9 回 Algebraic Lie Theory and Representation Theory 報告集、pp.108ー115, 2024.

[10] T. Kato, Linear evolution equation of ”hyperbolic” type, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **17** (1970) 241-258.

[11] T. Kato, Linear evolution equation of ”hyperbolic” type II, J. Math. Soc. Japan **25** 4 (1973) 648-666.

[12] T. Muramatsu, Besov spaces and analytic semigroups of linear operators, J. Math. Soc. Japan Vol. 42, No. 1, 1990

[13] H. Tanabe, Equations of evolution, Pitman, 1979.