Weighted maximal inequalities for local Bourgain–Morrey spaces

東京理科大学　野ヶ山徹 *
Toru Nogayama
Department of Mathematics, Faculty of Science Division II,
Tokyo University of Science

1 Introduction

1.1 局所 Bourgain–Morrey 空間

Bourgain–Morrey 空間は 1990 年頃に Bourgain[1] により，その原型となるものが導入され，その後，フーリエ制限問題や偏微分方程式，特に分散型方程式の解析へ応用されている．いくつか記号を用意する．$\nu \in \mathbb{Z}$, $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$ に対して，2 進立方体 $Q_{\nu m}$ を

$$Q_{\nu m} \equiv \prod_{j=1}^{n} \left[\frac{m_j}{2^\nu}, \frac{m_j+1}{2^\nu}\right)$$

と定める．2 進立方体全体の集合を $\mathcal{D}$ で表す．$m \in \{-1, 0\}^n$ である 2 進立方体全体の集合は特に $L\mathcal{D}$ で表す.（$L\mathcal{D}$ に属する 2 進立方体は閉包を取ると原点を含んでいることに注意する.）ほとんど至るところ正値な局所可積分関数を荷重と呼ぶ．立方体 Q と荷重 u に対して，$u(Q) = \displaystyle\int_Q u(y)\mathrm{d}y$ とおく．以上の準備の下，荷重付き局所 Bourgain–Morrey 空間 $L\mathcal{M}^p_{q,r}(u, w)$ を定義する．

Definition 1.1. パラメータ p, q, r を $1 \le q \le p < \infty$, $1 \le r \le \infty$ を満たすものとし，u, v を荷重とする．このとき，可測関数 f に対し，ノルム $\|\cdot\|_{L\mathcal{M}^p_{q,r}(u,v)}$ を

$$\|f\|_{L\mathcal{M}^p_{q,r}(u,v)} = \left\| \left\{ |u(Q_{\nu m})|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \left(\int_{Q_{\nu m}} |f(y)|^q v(y)\mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{q}} \right\}_{\nu \in \mathbb{Z}, m \in \{-1,0\}^n} \right\|_{\ell^r}$$

と定義する．そして，$\|f\|_{L\mathcal{M}^p_{q,r}(u,v)} < \infty$ を満たす関数 f 全体の集合を $L\mathcal{M}^p_{q,r}(u, v)$ で表し，荷重付き局所 Bourgain–Morrey 空間と呼ぶ.

$r = \infty$ とすると，立方体についての上限を考えることになるので，荷重付き局所 Morrey 空間 $L\mathcal{M}^p_q(u, v)$ となることに注意する．$q = p, r = \infty$ とすると，荷重付き Lebesgue 空間 $L^p(v)$ となることも注意しておく.

特に，$u = 1$ のときは Samko type，$u = v$ のときは Komori–Shirai type と呼ばれており，本講演ではこの 2 つのタイプについて考察する．また，荷重としては power weight，つまり，$w_\beta = |x|^\beta$ $(\beta \in \mathbb{R})$ を扱う.

*e-mail:toru.nogayama@gmail.com　tnogayama@rs.tus.ac.jp
本研究は JSPS 科研費 (22KJ2771, 24K22839) の助成を受けたものである.

1.2 A_X 条件

まず，A_q 荷重について思い出しておく．$1<q<\infty$ に対して，$w \in A_q$ であるとは，

$$[w]_{A_q} \equiv \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) \mathrm{d}x \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{-\frac{1}{q-1}} \mathrm{d}x \right)^{q-1} < \infty$$

となることである．

この A_q 条件は Hardy–Littlewood の極大作用素が荷重付き Lebesgue 空間 $L^q(w)$ 上で有界となるための必要十分条件になっていることに注意しておく．

$\sigma(x) = w(x)^{-\frac{1}{q-1}}$ とおくことで，$[w]_{A_q}$ を次のように書き換えることができる．

$$[w]_{A_q} = \sup_Q \left(|Q|^{-1} \|\chi_Q\|_{L^q(w)} \|\chi_Q\|_{L^{q'}(\sigma)} \right)^q .$$

ここで，$\|f\|_{L^q(w)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^q w(x) \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{q}}$ である．

このノルムな形を念頭に置き，次のように A_q 条件を一般化する．

Definition 1.2. X を $\mathbb{R}^n$ 上の Banach function space とする．このとき，A_X 条件が成り立つとは

$$\sup_Q |Q|^{-1} \|\chi_Q\|_X \|\chi_Q\|_{X'} \leq C$$

を満たすことである．ここで，X' は X の associate space であり，

$$X' = \left\{ g : \text{measurable} : fg \in L^1, \forall f \in X \right\}, \quad \|g\|_{X'} = \sup_{f : \|f\|_X \leq 1} \int |f(x) g(x)| \mathrm{d}x$$

と定義されるものである．

X' の定義に注意すると，A_X 条件は次の条件と同値になることに注意する．

ある定数 $C>0$ が存在して，$f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ と $Q \in \mathcal{Q}$ に対して，

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| \mathrm{d}y \right) \|\chi_Q\|_X \leq C \|f\chi_Q\|_X$$

が成り立つ．

実はこの A_X 条件は Hardy–Littlewood の極大作用素 M が有界となるための必要条件になっている．

Proposition 1.3. もし *Hardy–Littlewood* の極大作用素 M が X 上で有界であれば，A_X 条件が成り立つ．

Proof. M が X 上で有界であると仮定する．このとき，

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| \mathrm{d}y \leq \inf_{x \in Q} M[f\chi_Q](x)$$

であるので，

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| \mathrm{d}y \right) \|\chi_Q\|_X \leq \|M[f\chi_Q]\chi_Q\|_X \leq C \|f\chi_Q\|_X$$

が成り立つ． ∎

Proposition 1.3 により，A_X 条件が X 上で極大作用素が有界であるための必要条件になっていることが一般的に分かったので，十分条件であるかを調べたい．しかし，X を変動指数 Lebesgue 空間 $L^{p(\cdot)}$ とすると，A_X 条件は満たすが，M が有界にならないような $p(\cdot)$ の存在が知られている．つまり，十分条件にはならないことが知られている．(詳しくは [3] を参照せよ.)

2 Main theorem

Proposition 1.3 と上の注意により，十分性を調べるには個別の議論が必要である．ここでは荷重付き局所 Morrey 空間において極大作用素が有界となる（必要）十分条件について考察し，以下の結果が得られた．

Theorem 2.1. $1 < q < p < r < \infty$ とする．このとき，*Hardy–Littlewood* の極大作用素が $L\mathcal{M}^p_{q,r}(1, w_\beta)$ 上で有界であることと $A_{L\mathcal{M}^p_{q,r}(1,w_\beta)}$ 条件が成立することは同値である．

Theorem 2.2. $1 < q < p < r < \infty$ とする．このとき，*Hardy–Littlewood* の極大作用素が $L\mathcal{M}^p_{q,r}(w_\beta, w_\beta)$ 上有界であることと $A_{L\mathcal{M}^p_{q,r}(w_\beta,w_\beta)}$ 条件が成立することは同値である．

$r = \infty$ のとき，つまり，通常の荷重付き局所 Morrey 空間における A_X 条件を用いた特徴付けは [2] において成されている．

また，今回は power weight を扱っているので，極大作用素が有界となるパラメータ条件も得られた．

Theorem 2.3 (Samko-type)**.** $1 < q < p < \infty$, $1 < r < \infty$ とする．このとき，β が $-\dfrac{qn}{p} < \beta < nq\left(1 - \dfrac{1}{p}\right)$ を満たすならば，*Hardy–Littlewood* の極大作用素 M は $L\mathcal{M}^p_{q,r}(1, w_\beta)$ 上有界である．

Theorem 2.4 (Komori–Shirai type)**.** $1 < q < p < \infty$, $1 < r < \infty$ とする．このとき，β が $-n < \beta < n\,(p-1)$ を満たす，つまり，$w_\beta \in A_p$ となるならば，*Hardy–Littlewood* の極大作用素 M が $L\mathcal{M}^p_{q,r}(w_\beta, w_\beta)$ 上有界である．

Remark 2.5. 荷重付き局所 Morrey 空間における極大作用素の有界性は [4] において以下のような結果が得られている．

$$\text{(Samko type) } M : L\mathcal{M}^p_q(1, w_\beta) \to L\mathcal{M}^p_q(1, w_\beta) \Longleftrightarrow -\frac{qn}{p} \le \beta < nq\left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

$$\text{(Komori–Shirai type) } M : L\mathcal{M}^p_q(w_\beta, w_\beta) \to L\mathcal{M}^p_q(w_\beta, w_\beta) \Longleftrightarrow -n < \beta < n\,(p-1)$$

3 証明について

証明は以下の手順で行われる．流れは Samko type も Komori–Shirai type も同じなので，Samko type のみ扱う．

- もし $A_{L\mathcal{M}^p_{q,r}(1,w_\beta)}$ 条件が成り立つならば，任意の $Q \in L\mathcal{D}$ に対して，

$$\|\chi_Q\|_{L\mathcal{M}^p_{q,r}(1,w_\beta)} < \infty, \quad \|\chi_Q\|_{L\mathcal{M}^p_{q,r}(1,w_\beta)'} < \infty \tag{3.1}$$

  が成り立たなければならない．

- (3.1) より，パラメータ β は

$$-\frac{qn}{p} < \beta \quad \text{と} \quad \beta < nq\left(1-\frac{1}{p}\right). \tag{3.2}$$

を満たす.

- (3.2) を満たすならば，極大作用素は $L\mathcal{M}^p_{q,r}(1,w_\beta)$ 上で有界である.（Theorem 2.3）
- 極大作用素が $L\mathcal{M}^p_{q,r}(1,w_\beta)$ で有界ならば，$A_{L\mathcal{M}^p_{q,r}(1,w_\beta)}$ 条件が成り立つ.

(3.2) のパラメータ条件は以下の考察から導かれる.

Example 3.1. $1 \leq q < p < \infty$, $1 < r < \infty$, $\alpha, \beta > -n$ とする．このとき，$|x|^\gamma \chi_{[0,1)^n} \in L\mathcal{M}^p_{q,r}(w_\alpha, w_\beta)$ であるための必要十分条件は $\gamma > -\frac{\alpha}{p} - \frac{n}{p} + \frac{\alpha-\beta}{q}$ である.

Example 3.2. $1 < q < p < \infty, 1 < r < \infty, \beta > -n$ とする．$Q \in L\mathcal{D}$ に対し，$\beta \geq nq\,(1-1/p)$ ならば $\|\chi_Q\|_{L\mathcal{M}^p_{q,r}(1,w_\beta)'} = \infty$ となる.

実際，$f_\gamma(x) = |x|^\gamma \chi_{[0,1)^n} \in L\mathcal{M}^p_{q,r}(1,w_\beta)$ であるための必要十分条件は Example 3.1 より，$\gamma > -\frac{n}{p} - \frac{\beta}{q}$ である．そこで，$\gamma \in (-n/p-\beta/q, -n]$ を固定すると，assosiate norm 定義により，

$$\begin{aligned}\|\chi_{[0,1)^n}\|_{L\mathcal{M}^p_{q,r}(1,w_\beta)'} &\geq \int_{[0,1)^n} \frac{f_\gamma(x)}{\|f_\gamma\|_{L\mathcal{M}^p_{q,r}(1,w_\beta)}} \mathrm{d}x \\ &\gtrsim \int_{B(0,1)\cap[0,1)^n} |x|^\gamma \mathrm{d}x \sim \int_0^1 r^{\gamma+n-1}\mathrm{d}r\end{aligned}$$

となる．$\gamma + n \leq 0$ であったので，最後の積分は発散する.

対偶をとって，もし $\|\chi_Q\|_{L\mathcal{M}^p_{q,r}(1,w_\beta)'} < \infty$ ならば，パラメータ β は $\beta < nq\,(1-1/p)$ を満たさなければならない.

最後に，Theorem 2.3 の証明では次の補題を用いる.

Lemma 3.3 ([5, vol.1, p.296, Example 113])**.** $\beta > -n,\ Q \in \mathcal{Q}$ とする．このとき，

$$w_\beta(Q) = \int_Q w_\beta(x)\mathrm{d}x \sim \max(\ell(Q), |c(Q)|)^\beta |Q|$$

が成り立つ．特に，$0 \in \overline{Q}$ であれば，$w_\beta(Q) = \int_Q w_\beta(x)\mathrm{d}x \sim \ell(Q)^{n+\beta}$.

方針は [5, vol.2, p.147, Proposition 131] とほぼ同じであるが一つ注意が必要である．荷重付き局所 Morrey 空間 $L\mathcal{M}^p_q(1,w_\beta)$ において極大作用素の有界性を示す際には，原点を含むような各立方体 Q に対して

$$|Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|(Mf)\chi_Q\|_{L^q(w_\beta)} \lesssim \|f\|_{L\mathcal{M}^p_q(1,w_\beta)} \tag{3.3}$$

を証明すればよい．一方で，荷重付き局所 Bourgain-Morrey 空間 $L\mathcal{M}^p_{q,r}(1,w_\beta)$ における有界性を示す際には $L\mathcal{D}$ に対する和を考慮しなければならない．ここで重要なのが，次の $L\mathcal{D}$ の性質である：$Q \in L\mathcal{D}$ に対して，Q を含むような $L\mathcal{D}$ の立方体は辺長を指定すると一意に定まる．この性質のおかげで，Morrey 空間のときのパラメータと同じ範囲で和がきちんと収束することを証明できる.

References

[1] J. Bourgain, *On the restriction and multiplier problems in* $\mathbb{R}^3$, Geometric aspects of functional analysis (1989–90), Lecture Notes in Math., vol. 1469, Springer, Berlin, 1991, 179–191.

[2] J. Duoandikoetxea, M. Rosenthal, *Muckenhoupt-Type Conditions on Weighted Morrey Spaces*, J. Fourier Anal. Appl., **27** (2021), https://doi.org/10.1007/s00041-021-09839-w

[3] A. K. Lerner, *A note on the maximal operator on weighted Morrey spaces*, Anal Math **49**, (2023), 1073–1086.

[4] S. Nakamura,Y. Sawano, H. Tanaka, *Weighted local Morrey spaces*, Annales Fennici Mathematici, **45** (2020), (1), 67–93.

[5] Y. Sawano, G. Di Fazio and D.I. Hakim, *Morrey spaces. Introduction and Applications to Integral Operators and PDE's. Vol. I and II.* Monographs and Research Notes in Mathematics. Chapman & Hall CRC Press, Boca Raton, FL, 2020.