再生核空間の積分変換の逆変換について

東京学芸大学　山田 陽 *
Akira Yamada
Tokyo Gakugei University

概要

Fourier 変換の積分核と逆変換の積分核は互いに複素共役である．齋藤氏はこの一般化として, 函数 Hilbert 空間における積分変換の理論においても, いくつかの仮定の下に同様な結果が成り立つことを示した．ここでは函数 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の積分変換の逆変換が複素共役な積分核で表されるための必要十分条件を示し, また一般の函数 Hilbert 空間の積分変換に対しても RKHS への等長作用素がある場合に逆変換公式が得られることを簡単な背景と共に解説する．この公式の応用として Plancherel の定理の再生核を用いた別証明を与える．

1　導入: 積分変換と逆変換

Fourier 変換 $\mathcal{F}$ とその逆変換 $\mathcal{F}^*$ はよく知られているように, $f \in L^1(\mathbb{R})$ の場合,

$$\mathcal{F}(f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-itx}\, dt,$$
$$\mathcal{F}^*(f)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{itx}\, dx,$$

で与えられる．Fourier 変換の積分核 e^{-itx} と Fourier 逆変換の積分核 e^{itx} は互いに複素共役であることに注意する．L^p 空間における積分核による積分変換を, Hilbert 空間の枠内で抽象化したものが後述の Hilbert 空間の積分変換であるが, この場合には積分変換の像空間は *RKHS (Reproducing Kernel Hilbert Space)* になり, その再生核は内積で簡単に表現できることが知られている (定理 2.2). 1982 年に斎藤氏は [4] で Hilbert 空間の積分変換においても条件付きではあるが, 上述の Fourier 変換の場合と同様に, その逆変換の積分核は元の変換の積分核の複素共役になることを示した (定理 2.3 の式 (2)).

ここでは函数 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の積分変換の積分核とその逆変換の積分核が互いに共役となるための条件が $\mathcal{H}$ が RKHS であること (定理 3.1) と, (2) の拡張として得られる逆変換公式 (4) について解説する．定理 3.1 より内積の形での逆変換公式は, 変換される Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ が本質的に RKHS の場合に限られる．しかし, $\mathcal{H}$ に等長な任意の RKHS が与えられた場合, 一般逆変換

* Email address: yamada@u-gakugei.ac.jp

公式 (4) を利用して, Plancherel の定理の再生核的別証を示す．このためには $L^2(\mathbb{R}^N)$ に等長な RKHS で問題に適合したものを見つける必要がある．1 次元 L^2 空間ではこのような空間として, よく知られた空間, i.e., 絶対連続函数であって端点で 0, 微分が自乗可積になるような函数空間 (Sobolev 型空間) が容易に見つかる．$N \geq 2$ に関する $L^2(\mathbb{R}^N)$ に等長な RKHS は 1 次元の場合に等長となる RKHS のテンソル積として作ることができる．この解説では積分変換, 逆変換定理, Sobolev 型空間, 積分変換とテンソル積の関係といった項目について説明する．Plancherel の定理の別証については逆変換定理の応用の具体例を示す意味で証明を述べた．特に断りなければ, 全ての作用素は線形作用素である．

2 Hilbert 空間の積分変換

集合 E 上の複素函数からなる Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ が, 任意の $f \in \mathcal{H}$ と点 $x \in E$ に対して, 作用素

$$f \in \mathcal{H} \mapsto f(x) \in \mathbb{C}$$

が有界となるとき, $\mathcal{H}$ を E 上の *RKHS* という．このとき, Riesz の表現定理より $f(x) = \langle f, k_x \rangle$ となる函数 $k_x \in \mathcal{H}$ が存在するが, k_x を点 x における $\mathcal{H}$ の**再生核**, また 2 変数函数 $k(x,y) = \langle k_y, k_x \rangle$ を $\mathcal{H}$ の再生核という．RKHS については [1,2], Hilbert 空間の積分変換の理論と応用については [7,8] 及びそこに挙げられた参考文献を参照してください．

定義 2.1. $\mathcal{H}$ は Hilbert 空間, C は線形空間とする．線形写像 $A\colon \mathcal{H} \to C$ に対して, $\ker A$ が閉ならば線形写像 $A\colon \mathcal{H} \to \operatorname{ran} A$ が**余等長** *(coisometry)* (i.e. $A|_{(\ker A)^\perp}$ が等長作用素) になるような $\operatorname{ran} A$ 上の Hilbert 空間構造は一意的に定まる．この Hilbert 空間を $\mathcal{M}(A)$ で表し, 作用素 A の**作用素域** *(operator range)* という．また $\mathcal{M}(A)$ のノルム $\|\cdot\|_{\mathcal{M}(A)}$ を A の**値域ノルム** *(range norm)* という (cf. [9])．

E を集合, $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, $\phi\colon E \to \mathcal{H}$ を任意の写像とする．$f \in \mathcal{H}$ に対して, E 上の函数 $\hat{\phi} f$ を

$$(\hat{\phi} f)(x) = \langle f, \phi(x) \rangle, \quad x \in E,$$

で定義すると $\hat{\phi}\colon \mathcal{H} \to \mathbb{C}^E$ は連続作用素である．ただし $\mathbb{C}^E$ の位相は直積位相である．$\hat{\phi}$ による作用素域 $\hat{\phi}(\mathcal{H})$ は E 上の RKHS であり, 作用素 $\hat{\phi}\colon \mathcal{H} \to \hat{\phi}(\mathcal{H})$ を写像 ϕ による $\mathcal{H}$ の**積分変換**という．写像 ϕ が文脈から明らかな場合, $\hat{\phi}$ を省略して単に $\hat{f} = \hat{\phi} f$, $\hat{\mathcal{H}} = \hat{\phi}(\mathcal{H})$ と表す．$\ker \hat{\phi} = \phi(E)^\perp$ は $\mathcal{H}$ の閉部分空間であることに注意する．

定理 2.2 ([7, pp. 20–23])**.** 上記の設定の下, 積分変換について次が成り立つ．

(i) 任意の $f \in \mathcal{H}$ に対して, $\|\hat{f}\|_{\hat{\mathcal{H}}} \leq \|f\|_{\mathcal{H}}$. 等号の必要十分条件は $f \in (\ker \hat{\phi})^\perp = \bigvee \phi(E)$ である．ただし $\bigvee \phi(E)$ は $\phi(E)$ の閉線形包を表す．特に, $\hat{\phi}\colon \mathcal{H} \to \hat{\mathcal{H}}$ が等長作用素になる必要十分条件は $\phi(E)$ が $\mathcal{H}$ で完全, i.e., $\phi(E)$ の線形包が $\mathcal{H}$ で稠密であることである．

(ii) $\hat{\mathcal{H}}$ は E 上の RKHS で, 点 $y \in E$ における再生核は $\widehat{\phi(y)}$, また $\hat{\mathcal{H}}$ の再生核は

$$\langle \phi(y), \phi(x) \rangle_{\mathcal{H}} \tag{1}$$

で与えられる.

次は Hilbert 空間の積分変換に対する逆変換定理 [4, Theorem 3.2] の原点となる重要な定理である.

定理 2.3 ([4, Theorem 3.1])**.** E は集合, $\mathcal{H}$ は集合 T 上の函数 Hilbert 空間として, 写像 $\phi\colon E \to \mathcal{H}$ による $\mathcal{H}$ の積分変換を $\hat{\mathcal{H}}$ とする. 次の条件 (i)–(iv)

(i) $\phi(E)$ は $\mathcal{H}$ で完全.
(ii) $\forall t \in T$ に対して $\overline{\phi(t,\cdot)} \in \hat{\mathcal{H}}$.
(iii) $\forall f \in \mathcal{H}$, $\forall t \in T$ に対して $\langle \hat{f}, \overline{\phi(t,\cdot)} \rangle_{\hat{\mathcal{H}}} \in \mathcal{H}$.
(iv) $\forall f \in \mathcal{H}$, $\forall x, y \in E$ に対して $\langle \hat{f}(x), \langle \phi(y), \phi(x) \rangle_{\mathcal{H}} \rangle_{\hat{\mathcal{H}}} = \langle \langle \hat{f}(x), \overline{\phi(t,x)} \rangle_{\hat{\mathcal{H}}}, \phi(t,y) \rangle_{\mathcal{H}}$.

が満たされれば, $\forall f \in \mathcal{H}$ に対して積分変換 $\hat{\phi}$ の逆変換は

$$f(t) = \langle \hat{f}, \overline{\phi(t,\cdot)} \rangle_{\hat{\mathcal{H}}}, \quad t \in T \tag{2}$$

で与えられる.

定理 2.3 は, 仮定がかなり強いが, 最初に述べた Fourier 変換の逆変換の一般化と考えることができる.

3 Main Results

次が我々の逆変換に関する主結果である. 逆変換の積分核が元の変換の積分核の共役で与えられる為の条件は本質的に再生核空間であることを意味する.

定理 3.1 (Main Theorem)**.** E は集合, $\mathcal{H}$ は集合 T 上の函数 Hilbert 空間とする. 写像 $\phi\colon E \to \mathcal{H}$ による $\mathcal{H}$ の積分変換を $\hat{\mathcal{H}}$, $(t,x) \in T \times E$ に対して $\phi(t,x) = \phi(x)(t)$ とするとき, 次は同値である:

(i) $\forall t \in T$ に対して $\overline{\phi(t,\cdot)} \in \hat{\mathcal{H}}$ であり, $\forall f \in \bigvee \phi(E)$ に対して逆変換公式 (2) が成り立つ.
(ii) $\mathcal{H}$ の閉部分空間 $\bigvee \phi(E)$ は T 上の RKHS である.

特に, $\mathcal{H}$ が T 上の RKHS であって $\phi(E)$ が $\mathcal{H}$ で完全ならば, 任意の $f \in \mathcal{H}$ に対して逆変換公式 (2) が成り立つ.

定理 3.1 の応用のためには積分変換の像空間 $\hat{\mathcal{H}}$ のノルムが具体的に分かる必要がある. そのために次の補題を用意する. 再生核空間のノルムが別の空間のノルムで表されるための一つの十分条件である.

補題 3.2. H は集合 E 上の RKHS で再生核 k をもち, F は E の部分集合とする. $k_y = k(\cdot, y)$ を点 $y \in E$ における再生核として, 次の条件

(i) $f \in H$ に対して $f|_F = 0 \implies f = 0$, i.e. F は H の**一意性集合**.
(ii) Hilbert 空間 K への写像 $T\colon \{k_x\}_{x \in F} \to K$ が, $\forall x, y \in F$ に対して

$$k(x, y) = \langle Tk_y, Tk_x \rangle_K \tag{3}$$

を仮定する. このとき, 写像 T は H から K への等長作用素 $\tilde{T}$ に一意的に拡張され, H は K の閉部分空間と等長同型である. 特に, T が $\{k_x\}_{x \in F}$ から F への制限で $K = L^2(F, d\mu)$ のとき, $\tilde{T}$ は F への制限作用素と一致する.

RKHS の積分変換では逆変換公式 (2) が成り立つが, 一般の Hilbert 空間に対しても, それに等長な RKHS があれば次の形で類似の逆変換公式が得られる.

定義 3.3. Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ に対して集合 T 上の RKHS $\mathcal{W}$ が存在して $S\colon \mathcal{H} \to \mathcal{W}$ が等長作用素のとき, 合成写像 $E \xrightarrow{\phi} \mathcal{H} \xrightarrow{S} \mathcal{W}$ を (T 上の) **変換列**と言う.

定理 3.4 (逆変換定理)**.** $E \xrightarrow{\phi} \mathcal{H} \xrightarrow{S} \mathcal{W}$ が T 上の変換列であるとき, 写像 ϕ による $\mathcal{H}$ の積分変換 $\hat{\mathcal{H}}$ において次の等式が成り立つ: $\forall f \in \bigvee \phi(E)$, $\forall t \in T$,

$$(Sf)(t) = \langle \hat{f}, \overline{(S\phi)(t, \cdot)} \rangle_{\hat{\mathcal{H}}}. \tag{4}$$

逆変換定理の簡単な応用例を挙げる.

例 1 (cf. [8, pp. 116, 153])**.** 集合 E 上の可分な Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の CONS $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ に関する $f \in \mathcal{H}$ の Fourier 係数を $(\hat{f}_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ とする:

$$\hat{f}_n = \langle f, g_n \rangle.$$

写像 $\psi\colon E \to \mathcal{H}$ による $\mathcal{H}$ の積分変換 $\hat{\mathcal{H}}$ を考える. このとき, Parseval の等式より

$$S\colon f \in \mathcal{H} \mapsto (\hat{f}_n) \in \ell^2$$

は等長であり, ℓ^2 は $\mathbb{N}$ 上の RKHS だから, $\mathbb{N} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \xrightarrow{S} \ell^2$ は $\mathbb{N}$ 上の変換列である. 逆変換定理の公式 (4) より, $\forall f \in \bigvee \psi(E)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して次の等式を得る:

$$\hat{f}_n = \langle \hat{f}, \overline{\widehat{\psi(\cdot)}_n} \rangle_{\hat{\mathcal{H}}} = \langle \hat{f}(x), \overline{\langle \psi(x), g_n \rangle_{\mathcal{H}}} \rangle_{\hat{\mathcal{H}}}.$$

これを Fourier 級数で表すと, 逆変換公式は $f \in \bigvee \psi(E)$ に対して平均収束の意味で

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \hat{f}, \overline{\widehat{\psi(\cdot)}_n} \rangle_{\hat{\mathcal{H}}} g_n$$

となる.

3.1　1 次元 L^2 空間に等長な RKHS

逆変換定理を応用するためには, 与えられた Hilbert 空間に等長であって各問題に対して適切な RKHS を用意する必要がある. ここでは最も重要な Hilbert 空間の一つである 1 次元区間における L^2 空間に等長な RKHS を示す.

定義 3.5. 記号 (a,b) で拡大実数 $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ の 2 元 a, b の間の数の集合を表す, i.e.

$$(a,b) = \begin{cases} \{x \in \mathbb{R} \colon a < x < b\}, & (a < b), \\ \emptyset, & (a = b), \\ \{x \in \mathbb{R} \colon b < x < a\}, & (b < a). \end{cases}$$

半開区間 $[a,b)$, 閉区間 $[a,b]$ 等の記号も同様に定義する.

この定義の下, $c, x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ のとき $(c,x) \cap (c,y) = (c, \mathrm{med}\{x,y,c\})$ が成り立つことに注意する. ただし, $\mathrm{med}\{x,y,z\}$ は $x, y, z \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ の**中央値** *(median)* を表す.

定義 3.6. $I = (a,b)$, $-\infty \le a < b \le \infty$, を $\overline{\mathbb{R}}$ の開区間として $c \in [a,b]$ とする. 区間 I で絶対連続な複素函数 $f \in AC(I)$ で, $f(c) = 0$ かつ $f' \in L^2_\rho(I)$ であるもの全体のなす空間に内積

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f'(t)\overline{g'(t)}\,\rho(t)\,dt$$

を入れた内積空間を I 上の 1 階 *Sobolev* **型空間** *(Sobolev-type space)* と言い記号 $H_{c,\rho}(I)$ で表す. ただし, 重み函数 ρ は I で a.e. で正値可測であり, 次の条件

$$\frac{\chi_{(c,x)}}{\rho} \in L^1((c,x)), \quad \forall x \in I \tag{5}$$

を満たすと仮定する.

注意. 上の定義において c が I の端点, すなわち $c = a$ または $c = b$ の場合は $f(c)$ の値について少し注意が必要である. $\forall x, y \in I$, $x < y$, に対して Schwarz の不等式より

$$|f(x) - f(y)|^2 = \left|\int_x^y f'(t)\,dt\right|^2 \le \int_x^y |f'|^2 \rho\,dt \int_x^y \frac{dt}{\rho} \le \|f\|^2 \int_x^y \frac{dt}{\rho}.$$

仮定 (5) より, $x, y \to c$ のとき右辺は任意に小さくなるので Cauchy の収束判定条件より $\forall f \in H_{c,\rho}(I)$ に対して $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ が存在する. この極限値を $f(c)$ と定義する. また (5) より, $\rho \equiv 1$ ならば $c \in \mathbb{R}$ でなければならない.

次の定理は [5], [6, p. 75] で扱われている RKHS を少しだけ一般化したものである. 空間 $H_{c,\rho}(I)$ が $L^2_\rho(I)$ の RKHS 等長化であることを示そう.

定理 3.7. $H_{c,\rho}(I)$ は $I \cup \{c\}$ 上の RKHS であり, 次が成り立つ.

(i) $H_{c,\rho}(I)$ の再生核は

$$k(x,y) = \int_{(c,\mathrm{med}\{x,y,c\})} \frac{dt}{\rho(t)} = \Big| \int_c^{\mathrm{med}\{x,y,c\}} \frac{dt}{\rho(t)} \Big|$$

で与えられる. ただし, $\mathrm{med}\{x,y,z\}$ は $x,y,z \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ の**中央値** *(median)* を表す.

(ii) χ_E を集合 E の特性函数とするとき, $H_{c,\rho}(I)$ は写像

$$\phi\colon x \in I \mapsto \frac{\chi_{(c,x)}}{\rho} \in L^2_\rho(I)$$

による Hilbert 空間 $L^2_\rho(I)$ の積分変換である, i.e. $H_{c,\rho}(I) = \hat{\phi}(L^2_\rho(I))$.

(iii) 積分変換 $\hat{\phi}\colon L^2_\rho(I) \to H_{c,\rho}(I)$ は等長. 特に, 函数族 $\phi(I)$ は $L^2_\rho(I)$ で完全である.

3.2 変換列とテンソル積

$\mathbb{R}^N$ の Fourier 変換を逆変換定理で扱うためには, N 次元の L^2 空間に対して扱いやすくて等長な RKHS を見出す必要がある. ここでは前節で示した 1 次元 L^2 空間に等長な RKHS のテンソル積によって, 求める高次元の L^2 空間に等長な RKHS を作ることにする. Hilbert 空間 $\mathcal{H}_i$ $(i = 1,\ldots,n)$ の**テンソル積** *Hilbert* **空間** $\otimes_{i=1}^n \mathcal{H}_i$ は $\mathcal{H}_i$ の代数的テンソル積 $\odot_{i=1}^n \mathcal{H}_i$ を完備化した Hilbert 空間であり, 内積は任意の $a_i, b_i \in \mathcal{H}_i$ $(i = 1,\ldots,n)$ に対して

$$\langle \otimes_{i=1}^n a_i, \otimes_{i=1}^n b_i \rangle_{\otimes_{i=1}^n \mathcal{H}_i} = \prod_{i=1}^n \langle a_i, b_i \rangle_{\mathcal{H}_i}$$

を満たす. また Hilbert 空間の間の有界作用素 $S_i\colon \mathcal{H}_i \to \mathcal{K}_i$ $(i = 1,\ldots,n)$ のテンソル積 $\otimes_{i=1}^n S_i\colon \otimes_{i=1}^n \mathcal{H}_i \to \otimes_{i=1}^n \mathcal{K}_i$ は, $a_i \in \mathcal{H}_i$ $(i = 1,\ldots,n)$ に対して,

$$(\otimes_{i=1}^n S_i)(\otimes_{i=1}^n a_i) = \otimes_{i=1}^n S_i a_i$$

を満たす唯一の有界作用素である (See, e.g., [2,3]). RKHS のテンソル積に関して次の結果はよく知られている.

命題 3.8 ([2, p. 73])**.** *E 上の RKHS X と F 上の RKHS Y のテンソル積 Hilbert 空間 $X \otimes Y$ は $E \times F$ 上の RKHS である. 点 $x \in E$ における X の再生核を k^1_x, 点 $y \in F$ における Y の再生核を k^2_y とすると, 点 $(x,y) \in E \times F$ における $X \odot Y$ の再生核は $k^1_x \otimes k^2_y$ である.*

次にテンソル積 Hilbert 空間と積分変換の関係について述べる. 以下では, 写像 $\phi\colon E \to \mathcal{H}$ による積分変換 $\hat{\phi}(\mathcal{H})$ の点 $x \in E$ における再生核を $k[\phi]_x$ で表す.

命題 3.9. *$\mathcal{H}_i$ は Hilbert 空間, E_i は集合, $\phi_i\colon E_i \to \mathcal{H}_i$ は写像とする $(i = 1,\ldots,n)$. このとき, 写像 $\otimes_{i=1}^n \phi_i\colon \prod_{i=1}^n E_i \to \otimes_{i=1}^n \mathcal{H}_i$ s.t. $(\otimes_{i=1}^n \phi_i)(x_1,\ldots,x_n) = \otimes_{i=1}^n \phi_i(x_i)$ による積分変換は次を満たす:*

(i) $\forall f_i \in \mathcal{H}_i$ $(i=1,\ldots,n)$ に対して, $\widehat{\otimes_{i=1}^n \phi_i}(\otimes_{i=1}^n f_i) = \otimes_{i=1}^n \hat{\phi}_i f_i$.

(ii) $x=(x_i) \in \prod_{i=1}^n E_i$ のとき, $k[\otimes_{i=1}^n \phi_i]_x = \otimes_{i=1}^n k[\phi_i]_{x_i}$. 特に, $\prod_{i=1}^n E_i$ 上の RKHS として

$$\widehat{\otimes_{i=1}^n \phi_i}(\otimes_{i=1}^n \mathcal{H}_i) = \otimes_{i=1}^n \hat{\phi}_i(\mathcal{H}_i).$$

(iii) $\phi_i(E_i)$ が $\mathcal{H}_i$ で完全 $(i=1,\ldots,n)$ ならば, $(\otimes_{i=1}^n \phi_i)(\prod_{i=1}^n E_i)$ も $\otimes_{i=1}^n \mathcal{H}_i$ で完全である.

変換列はテンソル積に関して閉じている.

命題 3.10. $E \overset{\phi_i}{\to} \mathcal{H}_i \overset{S_i}{\to} \mathcal{W}_i$ が集合 T_i 上の変換列 $(i=1,\ldots,N)$ ならば,

$$\prod_{i=1}^N E_i \xrightarrow{\otimes_{i=1}^N \phi_i} \otimes_{i=1}^N \mathcal{H}_i \xrightarrow{\otimes_{i=1}^N S_i} \otimes_{i=1}^N \mathcal{W}_i$$

は直積 $\prod_{i=1}^N T_i$ 上の変換列である.

4 応用

4.1 Paley-Wiener 空間

Fourier 変換を再生核の理論で扱う準備としていわゆる Paley-Wiener 空間を考えよう. $a>0$ のとき, $I_a=(-a,a)$ として写像 $\phi\colon \mathbb{C} \to L^2(I_a)$ を

$$\phi(t,x) = \phi(x)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{it\overline{x}}, \quad (t,x) \in I_a \times \mathbb{C}$$

で定義する. $\phi(\mathbb{C})$ は $L^2(I_a)$ で完全である. したがって, 定理 2.2 より積分変換 $\hat{\phi}\colon L^2(I_a) \to \hat{\phi}(L^2(I_a))$ は等長である. 定義より ϕ による積分変換は $L^2(\mathbb{R})$ の Fourier 変換と次の関係がある: $f \in L^2(\mathbb{R})$ に対して,

$$\hat{\phi}(f|_{I_a}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{I_a} f(t) e^{-it\cdot}\, dt = \mathcal{F}(f\chi_{I_a}).$$

ϕ による積分変換の像空間 $\hat{\phi}(L^2(I_a))$ は $\mathbb{C}$ 上の RKHS $PW(a)$ であり, 位数 a の *Paley-Wiener* **空間**と呼ばれる. $PW(a)$ の再生核は公式 (1) より, $(x,y) \in \mathbb{C}^2$ に対して,

$$\langle \phi(y), \phi(x) \rangle_{L^2(I_a)} = \frac{1}{2\pi} \int_{I_a} e^{it\overline{y}} \overline{e^{it\overline{x}}}\, dt = \frac{\sin(a(x-\overline{y}))}{\pi(x-\overline{y})}$$

となる. 積分核 e^{-itx} は x の整函数だから, 微分と積分の順序交換より $PW(a)$ の元は整函数であることが分かる. 一致の定理より整函数が $\mathbb{R}$ 上で 0 ならば $\mathbb{C}$ で恒等的に 0 になる. よって, 実軸 $\mathbb{R}$ は $PW(a)$ の一意性集合である. 次は $PW(a)$ のノルムについて我々の必要とする等式 (3) である.

補題 4.1. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(a(t-x))\sin(a(t-y))}{(t-x)(t-y)}\, dt = \pi \frac{\sin(a(y-x))}{y-x}.$$

証明. 部分分数に分解すると,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(a(t-x))\sin(a(t-y))}{(t-x)(t-y)}\,dt &= \frac{1}{y-x}\Big\{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(a(t-x))\sin(a(t-y))}{t-y}\,dt \\ &\qquad - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(a(t-x))\sin(a(t-y))}{t-x}\,dt\Big\} \\ &= \frac{F(x,y)-F(y,x)}{y-x}. \end{aligned} \tag{6}$$

ただし, 右辺の 2 つの積分は広義積分であり, 最初の積分を $F(x,y)$ とおいた. $F(x,y)$ を計算すると,

$$\begin{aligned}F(x,y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(a(t-x))\sin(a(t-y))}{t-y}\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(a(t+y-x))\sin(at)}{t}\,dt \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n} \frac{\cos(at)\sin(a(y-x))\sin(at)}{t}\,dt \\ &= \frac{\sin(a(y-x))}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2at)}{t}\,dt = \sin(a(y-x))\int_{0}^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt \\ &= \frac{\pi}{2}\sin(a(y-x)).\end{aligned}$$

これを (6) に代入して求める結果を得る. □

補題 3.2 において $\mathbb{R}$ の Lebesgue 測度を dx として, T を $PW(a)$ の $\mathbb{R}$ への制限作用素, $E=\mathbb{C}$, $F=\mathbb{R}$, $K=L^2(\mathbb{R},dx)$ とおくと, 補題 4.1 より $PW(a)$ のノルムは $L^2(\mathbb{R})$ ノルムで与えられることが分かる (cf. [7, p. 62]): $f\in PW(a)$ に対して,

$$\|f\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\,dx. \tag{7}$$

4.2 Plancherel の定理

この節では逆変換定理の応用として Plancherel の定理の積分変換を用いた別証を与える. 前節の記号を使う. $t=(t_i), x=(x_i)\in\mathbb{C}^N$ のとき, $t\cdot x=\sum_{i=1}^{N} t_i\overline{x}_i$ とする.

定理 4.2 (Plancherel の定理)**.** $f\in L^1(\mathbb{R}^N)$ $(N\in\mathbb{N})$ に対する Fourier 変換 $\mathcal{F}f$, 共役 Fourier 変換 $\mathcal{F}^*f$ は $t\in\mathbb{R}^N$ に対して

$$\begin{aligned}\mathcal{F}f(t) &= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\mathbb{R}^N} f(x)e^{-it\cdot x}\,dx, \\ \mathcal{F}^*f(t) &= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\mathbb{R}^N} f(x)e^{it\cdot x}\,dx,\end{aligned}$$

で定義されるが, $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}^*$ の $L^1(\mathbb{R}^N)\cap L^2(\mathbb{R}^N)$ への制限はそれぞれ $L^2(\mathbb{R}^N)$ から $L^2(\mathbb{R}^N)$ へのユニタリ変換へ拡張できて, 互いに他の逆変換である.

証明. 積分変換 $\hat{\phi}\colon L^2(I_a) \to PW(a)$ は Fourier 変換であり, $\hat{\phi}$ の等長性より $L^2(I_a)$ の Fourier 変換 $\hat{\phi}\colon L^2(I_a) \to L^2(\mathbb{R})$ は等長作用素である. $L^2(I_a)^{\otimes N} \cong L^2(I_a^N)$ だから, $\hat{\phi}^{\otimes N}\colon L^2(I_a)^{\otimes N} \to PW(a)^{\otimes N}$ は $L^2(I_a^N)$ の Fourier 変換と同一視でき, 命題 3.10 より 等長作用素のテンソル積は等長だから, $\hat{\phi}^{\otimes N}$ は等長である. $L^2(\mathbb{R}^N)$ の Fourier 変換は, 直積 I_a^N への制限の Fourier 変換の $a \to \infty$ としたときの平均収束極限で定義されるから, 上の事実より Fourier 変換 $\mathcal{F}\colon L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ も等長作用素である. 同様にして共役 Fourier 変換 $\mathcal{F}^*\colon L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ も等長作用素であることが分かる.

次にこれらが互いに他の逆変換, i.e., $\mathcal{F}\mathcal{F}^* = \mathcal{F}^*\mathcal{F} = I$ であることを示そう. $\mathcal{W}(I_a) = H_{0,1}(I_a)$ とおくと, $\mathcal{W}(I_a)$ は区間 I_a 上の RKHS であって, 不定積分作用素 $S\colon f \in L^2(I_a) \mapsto \int_0^\bullet f(x)\,dx \in \mathcal{W}(I_a)$ は等長である. I_a 上の変換列

$$I_a \xrightarrow{\phi} L^2(I_a) \xrightarrow{S} \mathcal{W}(I_a)$$

のテンソル積をとると, 命題 3.10 より次の I_a^N 上の変換列が得られる:

$$I_a^N \xrightarrow{\phi^{\otimes N}} L^2(I_a)^{\otimes N} \xrightarrow{S^{\otimes N}} \mathcal{W}(I_a)^{\otimes N} \ .$$

ここでテンソル積 Hilbert 空間 $L^2(I_a)^{\otimes N}$ は $L^2(I_a^N)$ と同型であり, $t = (t_j),\ x = (x_j) \in \mathbb{R}^N$ に対して

$$\phi^{\otimes N}(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} e^{it\cdot x}.$$

一方, 写像のテンソル積の定義と Fubini の定理より, $I(t) = \prod_{j=1}^N (0,t_j)$ $(\subset I_a^N)$ とおくと, $f_1,\ldots,f_N \in L^2(I_a)$ に対して

$$S^{\otimes N}(\otimes_{j=1}^N f_j)(t) = \prod_{j=1}^N Sf_j(t_j) = \prod_{j=1}^N \int_0^{t_j} f_j(s_j)\,ds_j = \int_{I(t)} (\otimes_{j=1}^N f_j)(s)\,ds.$$

単純テンソル $\otimes_{j=1}^N f_j$ 全体のスパンは $L^2(I_a^N)$ の中で稠密だから, 上の等式より, $\forall f \in L^2(I_a^N)$ に対して,

$$(S^{\otimes N} f)(t) = \int_{I(t)} f(s)\,ds,$$

すなわち作用素 $S^{\otimes N}$ は N 次元の不定積分作用素である. 同様にして, $\mathbb{C}^N$ 上の RKHS $PW(a)^{\otimes N}$ のノルムは (7) より, $f \in PW(a)^{\otimes N}$ に対して次を満たす:

$$\|f\|^2_{PW(a)^{\otimes N}} = \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^2 dx.$$

したがって, $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ のとき $f|_{I_a^N} \in L^2(I_a^N)$ に逆変換公式 (4) を適用すると, $t = (t_j) \in I_a^N$, $x = (x_j) \in \mathbb{R}^N$ に対して等式

$$\int_{I(t)} f(s)\,ds = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{F}(f\chi_{I_a^N})(x) \int_{I(t)} e^{is\cdot x}\,ds\,dx \tag{8}$$

を得る．定理 3.1 より $\int_{I(t)} e^{is\cdot x}\,ds \in L^2(\mathbb{R}^N)$ であり, Fourier 変換の等長性より $\mathcal{F}(f\chi_{I_a^N}) \to \mathcal{F}(f)$ in $L^2(\mathbb{R}^N)$ だから, (8) で $a \to \infty$ として, 結局 $\forall f \in L^2(\mathbb{R}^N)$, $\forall t \in \mathbb{R}^N$ に対して次の等式を得る:

$$\int_{I(t)} f(x)\,dx = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{F}(f)(x) \int_{I(t)} e^{is\cdot x}\,ds\,dx.$$

ここで $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ であれば, $|e^{is\cdot x}| = 1$ だから Fubini の定理より積分の順序交換ができて,

$$\int_{I(t)} f(x)\,dx = \int_{I(t)} \mathcal{F}^*\mathcal{F}(f)(s)\,ds.$$

更に Fubini の定理より $x = (x_1, x'),\ t = (t_1, t') \in \mathbb{R}^N$ とすると

$$\int_0^{t_1} \int_{I(t')} f(x_1, x')\,dx'dx_1 = \int_0^{t_1} \int_{I(t')} \mathcal{F}^*\mathcal{F}(f)(x')\,dx'dx_1.$$

両辺を t_1 について $t_1 = x_1$ で微分すると, a.e. $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$ に対して

$$\int_{I(t')} f(x_1, x')\,dx' = \int_{I(t')} \mathcal{F}^*\mathcal{F}(f)(x')\,dx'.$$

この操作を $N-1$ 回繰り返すと結局, $f(x) = \mathcal{F}^*\mathcal{F}(f)(x)$ a.e. on $\mathbb{R}^N$ となり, $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ ならば $f = \mathcal{F}^*\mathcal{F}(f)$ が示された．しかし, $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ ならば部分積分より容易に等式

$$\mathcal{F}\Big(\frac{\partial^{2N} f}{\partial x_1^2 \cdots \partial x_N^2}\Big) = (-1)^N \prod_{i=1}^N x_i^2 \cdot \mathcal{F}(f)$$

が得られて, 左辺は有界だから, $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ である．よって $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ であるような f は $L^2(\mathbb{R}^N)$ で稠密である．したがって, $\mathcal{F}$ と $\mathcal{F}^*$ の有界性より $\mathcal{F}^*\mathcal{F} = I$ が示された．$\mathcal{F}\mathcal{F}^* = I$ も同様にして示すことができる．以上で Plancherel の定理が示された □

参考文献

[1] N. Aronszajn, *Theory of reproducing kernels*, Trans. Amer. Math. Soc. **68** (1950), 337–404.

[2] V. I. Paulsen and M. Raghupathi, *An introduction to the theory of reproducing kernel Hilbert spaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 152, Cambridge University Press, Cambridge, 2016.

[3] M. Reed and B. Simon, *Methods of modern mathematical physics. I. Functional analysis*, Academic Press, New York-London, 1972.

[4] S. Saitoh, *Integral transforms in Hilbert spaces*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **58** (1982), no. 8, 361–364.

[5] ———, *Hilbert spaces admitting reproducing kernels on the real line and related fundamental inequalities*, Riazi J. Karachi Math. Assoc. **6** (1984), 25–31.

[6] ———, *Theory of reproducing kernels and its applications*, Pitman Research Notes in Mathematics Series, vol. 189, Longman Scientific & Technical, Harlow, 1988.

[7] ———, *Integral transforms, reproducing kernels and their applications*, Pitman Research Notes in Mathematics Series, vol. 369, Longman, Harlow, 1997.

[8] S. Saitoh and Y. Sawano, *Theory of reproducing kernels and applications*, Developments in Mathematics, vol. 44, Springer, Singapore, 2016.

[9] D. Sarason, *Sub-Hardy Hilbert spaces in the unit disk*, University of Arkansas Lecture Notes in the Mathematical Sciences, 10, John Wiley & Sons Inc., New York, 1994. A Wiley-Interscience Publication.

[10] A. Yamada, *Inverses of integral transforms of RKHSs*, Submitted (2025).