Additive processes on the real line and Loewner chains

九州大学大学院数理学研究院　村山拓也
Takuya Murayama

Faculty of Mathematics, Kyushu University

概要

近年，非可換確率論においては複数の異なる独立性の概念が盛んに研究されている．そこで，単調独立性の意味での加法過程すなわち独立増分を持つ確率過程を考える．このとき，各時刻の分布がなす族は函数論でいう Loewner 鎖と対応し，その対応において古典確率論でいう Lévy–Khintchine 公式の役割が Loewner 微分積分方程式によって担われることが見出された．本稿では，長谷部高広氏（北海道大学），堀田一敬氏（山口大学）との共同研究（arXiv:2412.18742）に基づき，研究集会「実解析・複素解析・函数解析の総合的研究」（2024 年 11 月 25 日から 27 日，於京都大学数理解析研究所）において筆者が講演した内容を報告する．

1　本稿の目的・主結果の概要

本稿では，研究集会「実解析・複素解析・函数解析の総合的研究」（2024 年 11 月 25 日から 27 日，於京都大学数理解析研究所）における筆者の講演内容を報告する．その内容は，長谷部高広氏（北海道大学），堀田一敬氏（山口大学）との共同研究 [12] に基づく．ただし，本稿はあくまで実解析・複素解析・函数解析の広い読者に向けた簡易な概説であるから，正確な詳細については原論文を参照されたい．

さて，古典確率論[1)]において確率変数同士が独立であるという概念の重要性は言を俟たない．確率過程論においても加法過程（独立増分過程）は典型的なクラスの一つである．今 $X = (X_t)_{t\geq 0}$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上の 1 次元つまり実数値加法過程とし，平均 $\mathbb{E}[X_t] = 0$，分散 $\mathbb{E}[{X_t}^2] < +\infty$ を仮定しよう[2)]（$\mathbb{E}$ は $\mathbb{P}$ についての期待値を表す）．このとき，各時刻 t

1) ここでいう「古典」は当然，「非可換」あるいは「量子」との対比であって，「古い」という意味ではない．

2) 簡単のため平均零と仮定するが，この仮定は適切な「シフト」により取り除ける．一方で，分散有限の仮定は本質的に結果の形に関わる．

で X_t は次の Lévy–Khintchine 公式を満たす．

$$\mathbb{E}\left[e^{i\xi X_t}\right] = \exp\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\xi x} - 1 - i\xi x}{x^2}\,\kappa_t(dx)\right). \tag{1.1}$$

ただし，κ_t は実数直線 $\mathbb{R}$ 上の適当な有限 Borel 測度である．(1.1) の左辺は X_t の特性関数すなわち X_t の分布 $\mu_t^{\mathrm{c}} = \mathbb{P} \circ X_t{}^{-1}$[3]の逆 Fourier 変換 $\check{\mu}_t^{\mathrm{c}}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x}\,\mu_t^{\mathrm{c}}(dx)$ である．よって，右辺の測度 κ_t から Lévy の反転公式を通して X_t の分布 μ_t^{c} が一意に決まる．確率過程論では $x^{-2}\kappa_t(dx)$ を特徴量とみて Lévy 測度と呼ぶ．

非可換確率論においても確率変数の独立性は重要である．ただし，古典確率論と異なり，独立性には合理的な定義が複数考えられる．そこで，我々は単調独立性に注目し，単調加法過程 $A = (A_t)_{t\geq 0}$ の分布を調べる．以下に述べる結果は，単調加法過程 A に対して Lévy–Khintchine 公式 (1.1) の類似を函数論の方法によって与えるものである．

注意 1.1. 第 3 節でも述べるように，非可換確率変数は実数値可測関数ではなく作用素に類する．そのため A が確率過程であることの定義は見かけほど自明ではない．例えば A_t の t 依存性はどう定めるか，A_t の定義域は時刻 t に依ってよいか等いくつか問題がある．しかし，本研究で本質的に扱うのは，A_t の分布に相当する測度の族 $(\mu_t^{\mathrm{m}})_{t\geq 0}$ のみである．A_t そのものは発見的な観察にしか用いられない．ゆえに，ここで述べた技術的な問題に本稿では立ち入らない．

特性関数（逆 Fourier 変換）の代わりに，$\mathbb{R}$ 上の有限 Borel 測度 μ の Cauchy 変換 G_μ と逆数 Cauchy 変換 F_μ とを次で定める．

$$\begin{aligned} G_\mu(z) = G[\mu](z) &:= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z-\xi}\,\mu(d\xi), \\ F_\mu(z) = F[\mu](z) &:= \frac{1}{G_\mu(z)}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

これらは（$\mu = 0$ でない限り）複素上半平面 $\mathbb{C}^+$ における z の正則函数である．第 3 節の言葉で言えば，Cauchy 変換 G_μ はレゾルベントを非可換確率変数と見たときの期待値である．すなわち，適当な Hilbert 空間 H 上の自己共役作用素 A がスペクトル族 $(E_\xi^A)_{\xi\in\mathbb{R}}$ と状態ベクトル $\psi \in H$ とにより定まる分布 $\mu_A(d\xi) = d\langle E_\xi^A \psi, \psi\rangle_H$ を持つとき，

$$G[\mu_A](z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z-\xi}\,d\langle E_\xi^A \psi, \psi\rangle_H = \langle (z\,\mathrm{id}_H - A)^{-1}\psi, \psi\rangle_H \tag{1.3}$$

となる．

[3] 後述の分布 μ_t^{m} と区別するために添字 c を付けた．c は “classical” あるいは “commutative” の，m は “monotone” の頭文字である．

我々の結果は次の通りである．$\mu_t^{\mathrm{m}} = \mu_{A_t}$ を単調加法過程 $A = (A_t)_{t \geq 0}$ の分布とし，平均零，分散有限を仮定する．このとき，逆数 Cauchy 変換 $f_t := F[\mu_t^{\mathrm{m}}]$ は **Loewner 微分積分方程式**

$$f_t(z) = z + \int_{\mathbb{R}\times[0,t]} \frac{\partial f_s(z)}{\partial z} \frac{1}{\xi - z} \mathcal{K}(d\xi\, ds), \qquad z \in \mathbb{C}^+,\ t \geq 0 \tag{1.4}$$

を満たす．ここで，$\mathcal{K}$ は直積 $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$ 上の適当な σ 有限 Borel 測度である．さらに，測度の間の関係式

$$\kappa_t(B) = \mathcal{K}(B \times [0, t]), \qquad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \tag{1.5}$$

を通して，(1.1) の定める古典加法過程の分布族 $(\mu_t^{\mathrm{c}})_{t\geq 0}$ と (1.4) の定める単調加法過程の分布族 $(\mu_t^{\mathrm{m}})_{t\geq 0}$ とが一対一に対応する．

上で $t \mapsto f_t(z)$ が微分可能（絶対連続）である場合，$(f_t)_{t\geq 0}$ が Loewner 微分方程式（後述の (6.7)）を満たすことは函数論でよく知られている．微分積分方程式 (1.4) は，$t \mapsto f_t(z)$ が微分可能でない場合への一般化である．このように，逆数 Cauchy 変換の族 $(f_t)_{t\geq 0}$ に函数論の方法を適用することで，古典確率論と非可換確率論との間に架かる一つの橋を見出すことができた．実際，時刻 t を含まない設定では類似の対応がすでに知られている．(1.5) の定める対応はその動的拡張とみなされる．

次節からは，上述した事柄それぞれについて解説する．

2　古典加法過程および Lévy 過程

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上の確率変数 $X_t\colon \Omega \to \mathbb{R}$（$t \geq 0$）の族 $X = (X_t)_{t\geq 0}$ は，以下の条件を満たすとき（$\mathbb{R}$ 値あるいは一次元）**加法過程**と呼ばれる．

(i) $X_0 = 0$.

(ii) ほとんどすべての $\omega \in \Omega$ に対して標本路 $t \mapsto X_t(\omega)$ は右連続かつ左極限を持つ．

(iii) X は確率連続である．すなわち，任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\lim_{h\to 0} \mathbb{P}(\,|X_{t+h} - X_t| \geq \varepsilon\,) = 0.$$

(iv) X は**独立増分**を持つ．すなわち，時刻の任意有限列 $0 < t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, $n \in \mathbb{N}$ に対して確率変数の組

$$X_{t_0},\, X_{t_1} - X_{t_0},\, X_{t_2} - X_{t_1},\, \ldots,\, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

は独立である．

条件 (iv) において $t_0 = s$, $t_n = t$ ならば，時刻 t における終点 X_t は，始点 X_s から独立な増分を時々刻々と足し合わせて

$$X_t = X_s + \sum_{k=1}^{n}(X_{t_k} - X_{t_{k-1}}) \quad \text{あるいは} \quad X_t - X_s = \sum_{k=1}^{n}(X_{t_k} - X_{t_{k-1}}) \tag{2.1}$$

により得られる．「粒子」X は，各時刻において出鱈目な向き・早さで $\mathbb{R}$ 上を動き回る（あるいは別の点に跳躍する）わけである．また，上の条件に加えて増分の分布が時刻について定常である，すなわち，任意の正数 t, h に対して $X_{t+h} - X_t \overset{\mathrm{d}}{=} X_h$[4]が成り立つとき，$X$ を特に **Lévy 過程**と呼ぶ．

ここで，独立確率変数の和について思い出そう．2 つの確率変数 Y_1, Y_2 が独立であり，かつ各々の分布が ν_1, ν_2 であるなら，和 $Y_1 + Y_2$ の分布は次式の（古典）畳み込み $\nu_1 * \nu_2$ で与えられる．

$$(\nu_1 * \nu_2)(B) := \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_B(x+y)\,(\nu_1 \otimes \nu_2)(dx\,dy), \qquad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

ただし，$\mathbf{1}_B$ は集合 B の定義関数を表す．また，逆 Fourier 変換はこの畳み込みを積に分解する．すなわち，

$$(\nu_1 * \nu_2)^{\vee}(\xi) = \check{\nu}_1(\xi)\,\check{\nu}_2(\xi).$$

上で述べたことを加法過程の増分 $X_t - X_s$ の分布 $\mu_{s,t}$ に当てはめる．(2.1) から

$$0 < s < t < u \text{ ならば } \mu_{s,u} = \mu_{s,t} * \mu_{t,u} \tag{2.2}$$

である．また，条件 (i)–(iii) から 2 性質

$$\mu_{t,t} = \delta_0 \text{（原点に集中した Dirac 測度）} \tag{2.3}$$

$$(s,t) \mapsto \mu_{s,t} \text{ は確率測度の弱収束について連続である} \tag{2.4}$$

が従う．そこで，3 条件 (2.2)–(2.4) を満たす確率測度の族 $(\mu_{s,t})_{0 \le s \le t}$ を**古典 convolution hemigroup**（以下 CH と略す）と呼ぶことにする．逆に，任意の古典 CH $(\mu_{s,t})_{0 \le s \le t}$ が与えられると，適当な確率空間上に $\mu_{0,t}$ を分布に持つ加法過程 X_t を構成できることが知られている [16, Theorem 9.7]．

古典 CH $(\mu_{s,t})_{0 \le s \le t}$ が特に Lévy 過程 X の増分の分布である場合を考える．X_t 自体の分布を $\mu_t := \mu_{0,t}$ と書く．時間定常性から $\mu_{t,t+h} = \mu_{0,h} = \mu_h$ である．よって，(2.1) あるいは (2.2) の特別な場合として

$$\mu_t = \left(\mu_{\frac{t}{n}}\right)^{*n} \quad \text{あるいは} \quad \check{\mu}_t = \left(\check{\mu}_{\frac{t}{n}}\right)^{n}, \qquad n \in \mathbb{N} \tag{2.5}$$

[4] $\overset{\mathrm{d}}{=}$ は確率変数の分布が等しいことを意味する．

が成り立つ．このように「任意の正整数 n に対して適当な確率測度 ν_n があって $(\nu_n)^{*n}$ の形に表せる」という性質を無限分解可能（infinitely divisible）性という．よって，Lévy 過程 X_t の分布 μ_t は無限分解可能である．

(2.5) に基づく説明では，加法過程一般の分布すなわち一般の古典 CH について何も言えないが，実際には時間非定常な加法過程 X_t の分布 μ_t も無限分解可能であることが知られている [16, Theorems 9.1 and 9.7]．この事実から μ_t が (1.1) のような Lévy–Khintchine 公式[5)]を満たすことが導かれる．実際，(2.5) から特性関数 $\check{\mu}_t$ は任意有限個の積の形に分解する．指数関数による表示を期待するのは直感的には自然であろう（証明は当然それほど自明ではないが）．

第 1 節で Lévy–Khintchine 公式を (1.1) の形で述べたときには，X_t に平均零，分散有限を仮定した．このとき，分散 $\mathbb{E}[{X_t}^2]$ は全測度 $\kappa_t(\mathbb{R})$ に等しいことがわかる．さらに，族 $(\kappa_t)_{t\geq 0}$ は次の性質を持つ．

$$\kappa_0 = 0 \quad \text{かつ} \quad t \mapsto \kappa_t(B) \text{ は連続非減少である（} B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\text{）.} \tag{2.6}$$

逆に，条件 (2.6) を満たす任意の族 $(\kappa_t)_{t\geq 0}$ に対して，Lévy–Khinchine 公式 (1.1) を満たす適当な加法過程あるいは古典 CH が存在する．

3 非可換確率論における独立性の諸概念

非可換（あるいは量子）確率論に話を移そう．ただし，注意 1.1 でも述べたように，非可換確率空間については技術的な点を避けた直感的な説明に留める．（詳細を知るには，例えば明出伊・尾畑 [1] やその参考文献を見よ．）

H を Hilbert 空間とする．単位ベクトル $\psi \in H$ を一つ固定し，状態と呼ぶ．このとき，自己共役作用素 A を実確率変数と呼ぶ．また，A の「観測値」はスペクトル $a \in \sigma(A)$ のいずれかであると考える．A のスペクトル分解を与える射影の族を $(E^A_\xi)_{\xi\in\mathbb{R}}$ とすると，「観測値」a が集合 $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に見出される確率は

$$\int_B d\langle E^A_\xi \psi, \psi\rangle_H$$

で与えられる．すなわち，実確率変数 A の分布とは測度 $\mu_A(d\xi) = d\langle E^A_\xi \psi, \psi\rangle_H$ のことである．さらに，関数 f により $f(A)$ の形をした実確率変数の期待値 $\langle f(A)\rangle$ は

$$\langle f(A)\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(\xi)\, d\langle E^A_\xi \psi, \psi\rangle_H = \langle f(A)\psi, \psi\rangle_H \tag{3.1}$$

となる．特に，(1.3) で述べたことは，(3.1) で $f(\xi) = f_z(\xi) = 1/(z-\xi)$, $z \in \mathbb{C}^+$ とおくと，期待値 $\langle f_z(A)\rangle$ が Cauchy 変換 $G[\mu_A](z)$ を与えるということであった．

5) モーメントの仮定を置かない一般の形は，例えば Sato [16, Theorem 9.8 and Section 56] を参照せよ．

非可換確率変数の独立性を考えるために，まず古典確率論における次の事実を思い出そう[6)]．2 つの古典確率変数 Y, Z が独立であることは，任意の有界可測関数 f, g に対して $\mathbb{E}[f(Y)g(Z)] = \mathbb{E}[f(Y)]\mathbb{E}[g(Z)]$ が成り立つことと同値である．さらに Y, Z が有界ならば，f, g として多項式を取ることもできて，条件

$$\mathbb{E}[Y^p Z^q] = \mathbb{E}[Y^p]\mathbb{E}[Z^q], \qquad p, q \in \mathbb{N} \tag{3.2}$$

が必要十分となる．

前段落を踏まえて，2 つの有界な非可換実確率変数 A, B に対して条件 (3.2) の類似を考える．すなわち，

$$\langle A^{p_1} B^{q_1} A^{p_2} B^{q_2} \cdots A^{p_n} B^{q_n} \rangle = \langle A^{p_1+p_2+\cdots+p_n} \rangle \langle B^{q_1+q_2+\cdots+q_n} \rangle. \tag{3.3}$$

ただし，$n \geq 1$, $p_k \geq 1$ $(2 \leq k \leq n)$, $q_k \geq 1$ $(1 \leq k \leq n-1)$ かつ p_1, q_n には 0 も許す．この条件を A, B の可換（テンソル）独立性と呼ぶ．なお，(3.3) において任意の長さの積を考えている理由は，古典の場合に自明な計算，例えば $\mathbb{E}[Y^{p_1} Z^q Y^{p_2}] = \mathbb{E}[Y^{p_1+p_2} Z^q]$，が非可換の場合一般には許されないことを考慮しているためである．また，任意個の確率変数がテンソル独立であることも，混合モーメントに対する同様の計算規則によって定義される．しかし，それは本稿では用いないから割愛する．簡単な例だけ挙げておこう．

例 3.1. n 個の Hilbert 空間 H_k，状態 $\psi_k \in H_k$, 有界自己共役作用素 A_k（$k = 1, 2, \ldots, n$）が与えられたとする．このとき，テンソル積 $\bigotimes_{k=1}^n H_k$ に状態 $\otimes_{k=1}^n \psi_k$ を備えた非可換確率空間における非可換確率変数

$$\mathrm{id}_{H_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{id}_{H_{k-1}} \otimes A_k \otimes \mathrm{id}_{H_{k+1}} \otimes \cdots \otimes \mathrm{id}_{H_n}, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

はテンソル独立である．

上では条件 (3.3) により一つの独立性を導入したが，この点には恣意性がある．例えば，(3.3) の右辺を $\prod_k \langle A^{p_k} \rangle \langle B^{q_k} \rangle$ とすることも考えられる．この置き換えにより導入される性質は Boole 独立性と呼ばれる．また，(3.3) の右辺を $\langle A^{p_1+p_2+\cdots+p_n} \rangle \prod_k \langle B^{q_k} \rangle$ と置き換えると，**単調独立性**が定義される．本研究はこの単調独立性に主眼を置く．

例 3.2. 例 3.1 の状況において，各 $k = 1, 2, \ldots, n$ に対して $P_k \colon H_k \twoheadrightarrow \mathrm{span}\{\psi_k\}$ を状態 ψ_k が張る 1 次元部分空間への直交射影とする．このとき，確率変数の組

$$\mathrm{id}_{H_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{id}_{H_{k-1}} \otimes A_k \otimes P_{k+1} \otimes \cdots \otimes P_n, \quad k = 1, 2, \ldots, n \tag{3.4}$$

[6)] 以下，条件 (3.2), (3.3) を起点とする説明には，論説 [10] を参考にした．

は単調独立である．なお，例 3.1 と比べて (3.4) では A_k の右側だけ恒等作用素 id_{H_k} を射影 P_k に置き換えたが，A_k の両側をすべて置き換えれば Boole 独立な確率変数の例が得られる[7]．

本節の最後に，ランダム行列のサイズ無限大の極限では，上記 2 つとは異なる自由独立性が現れることに触れておく．ただし，上記 3 つの独立性に比べて混合モーメントの計算規則が煩雑であるため，本稿では紹介を割愛する（これについてもやはり論説 [10] とその参考文献を見よ）．

4　単調独立性

本節では，第 2 節と並行する形で単調独立な確率変数の和や加法過程の構造について述べる．

(A, B) を単調独立な実確率変数の組[8]とする．古典の場合と同様に，和 $A+B$ の分布 μ_{A+B} を (μ_A, μ_B) の単調畳み込みと呼び，$\mu_A \triangleright \mu_B$ と記す．単調畳み込み $\mu_A \triangleright \mu_B$ は，逆数 Cauchy 変換 (1.2) を用いて次のように特徴付けられる．

命題 4.1 (村木の公式 [14][7, Theorem 3.10])**.** $F[\mu_A \triangleright \mu_B](z) = F_{\mu_A} \circ F_{\mu_B}(z) = F_{\mu_A}(F_{\mu_B}(z))$.

注意 4.2. 村木の公式（命題 4.1）のおかげで，分布に限って見れば，単調独立確率変数の和を取る操作は適当な正則函数の合成に翻訳される．したがって，3 つ以上の確率変数の和も合成の反復に帰着する．このようにして，我々の議論は函数論へと移っていく．

単調独立性に基づき，第 2 節と同じく「単調」加法過程 $A = (A_t)_{t \geq 0}$ を考える．ただし，注意 1.1 と同じく正確な定義には触れず，第 2 節冒頭の条件 (iv) と対応する A の独立増分性にのみ注目する．すなわち，A の任意の増分列

$$\begin{aligned} &A_{t_0},\ A_{t_1} - A_{t_0},\ A_{t_2} - A_{t_1},\ \ldots,\ A_{t_n} - A_{t_{n-1}} \\ &\qquad\qquad\qquad (n \in \mathbb{N},\ 0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n) \end{aligned} \tag{4.1}$$

は単調独立である．このとき，時刻 s から t への増分 $A_t - A_s$ の分布を $\mu_{s,t}$ と書けば，$A_u - A_s = (A_t - A_s) + (A_u - A_t)$ から

$$0 < s < t < u \text{ ならば } \mu_{s,u} = \mu_{s,t} \triangleright \mu_{t,u} \tag{4.2}$$

7) 原論文 [12] の共著者である長谷部氏には，例 3.1 との比較で例 3.2 を本稿に含めることをご提案いただきました．感謝申し上げます．

8) 第 3 節では特に注意しなかったが，単調独立性の定義において A と B の役割は交換できないから，正確には非可換実確率変数の順序対というべきである．

が成り立つ．この畳み込みの関係と条件 (2.3), (2.4) とにより単調 CH $(\mu_{s,t})_{0\le s<t}$ を定義することも第 2 節と同様である．

注意 4.3. 第 3 節では，2 つの確率変数の単調独立性のみ説明し，任意個の場合は「同様の計算規則」を考えると述べるに留めた．注意 4.2 で述べた通り，我々の解析にとって一般の定義は不要なのである．しかし，(4.1) では任意有限個の変数の順序付き組を陽に考えているから，定義が不足しているという謗りもまた免れない．そこで，一般の単調独立性もここで紹介しておくことにする．読み飛ばしても後には差し支えない．$(\mathit{\Lambda},\prec)$ を全順序集合とし，$(A_\lambda)_{\lambda\in\mathit{\Lambda}}$ を非可換確率空間 (H,ψ) 上の $\mathit{\Lambda}$ で添字付けられた実確率変数の族とする．また，$\mathcal{A}_\lambda := \{\, f(A_\lambda) : f\in C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}),\ f(0)=0 \,\}$ なる作用素の族を導入する．族 $(A_\lambda)_{\lambda\in\mathit{\Lambda}}$ は次の 2 条件を満たすとき，単調独立であるといわれる．

(i) $\lambda_1\prec\lambda_2\succ\lambda_3$ かつ $B_k\in\mathcal{A}_{\lambda_k}$ $(k=1,2,3)$ ならば $B_1B_2B_3=\langle B_2\rangle B_1B_3$.

(ii) $\lambda_{-m}\succ\lambda_{-m+1}\succ\cdots\succ\lambda_{-1}\succ\lambda_0\prec\lambda_1\prec\cdots\prec\lambda_{n-1}\prec\lambda_n$ $(m,n\ge 0)$ かつ $B_k\in\mathcal{A}_{\lambda_k}$ $(-m\le k\le n)$ ならば $\langle B_{-m}\cdots B_0\cdots B_n\rangle=\prod_{k=-m}^{n}\langle B_k\rangle$.

なお，単調独立性の定義には文献によって多少のゆれがある．ここでは簡単のためより強い条件を要求した．状態 ψ が “cyclic” ならば，上記の定義は他のものと一致する [7, Remark 3.2].

5　単調 Lévy 過程と正則函数の 1 径数半群

第 4 節の単調加法過程 $A=(A_t)_{t\ge 0}$ が時間定常すなわち単調 Lévy 過程であるとする．A_t の分布を $\mu_t=\mu_{0,t}$ とおく．このとき，時間定常性 $A_{s+t}-A_s\overset{\mathrm{d}}{=}A_t$ と増分の単調独立性 (4.1) あるいは (4.2) から $\mu_{s+t}=\mu_{0,s+t}=\mu_{0,s}\rhd\mu_{s,s+t}=\mu_s\rhd\mu_t$ すなわち

$$\mu_{s+t}=\mu_s\rhd\mu_t \tag{5.1}$$

が成り立つ．よって，$(\mu_t)_{t\ge 0}$ は単調畳み込みに関する半群（semigroup）を成す．さらに，村木の公式（命題 4.1）により (5.1) を逆数 Cauchy 変換 (1.2) の言葉に翻訳できる．すると，$f_t := F[\mu_t]$ は

$$f_{s+t}=f_s\circ f_t \tag{5.2}$$

を満たす．ゆえに，$(f_t)_{t\ge 0}$ は $\mathbb{C}^+$ 上の正則函数からなる 1 径数合成半群である．性質 (2.3) は初期値の条件 $f_0(z)=z$ に書き換えられ，(2.4) は半群の広義一様収束についての t 連続性に翻訳される．

正則函数の半群は古典的によく調べられている．特に，上記の半群 $(f_t)_{t\ge 0}$ を生成する正

則ベクトル場の形も知られている．それを述べるため，次の事実[9)]を注意しておく．

命題 5.1. 正則函数 $f\colon \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}^+$ に対して次は同値である．

(i) 平均零，分散有限な確率分布 μ が存在して $f = F_\mu$ である．

(ii) 極限

$$\mathrm{r}(f) := \lim_{\substack{z\to\infty \\ \theta<\arg z<\pi-\theta}} z(z - f(z))$$

が任意の $\theta \in (0, \pi/2)$ に対して有限確定である．

さらに，どちらか（したがって両方）の条件が満たされるとき，$\mathrm{r}(f) = \int_{\mathbb{R}} x^2\, \mu(dx)$（分散）が成り立つ．

標語的に言えば，命題 5.1 の条件 (ii) は無限遠点における非接極限の意味で $f'(\infty) = 1$ かつ f の留数が $\mathrm{r}(f)$ であることを意味している．この命題により我々の半群 $(f_t)_{t\geq 0}$ は $\mathcal{P}_0^2 := \{\, f\colon \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}^+ : \mathrm{r}(f) < +\infty \,\}$ の要素からなる．

命題 5.2 ([9, Theorem 2])**.** $\mathcal{P}_0^2$ 内の連続な 1 径数合成半群 $(f_t)_{t\geq 0}$, $f_0(z) = z$ に対して，ある $a \geq 0$ と Borel 確率測度 ν が存在して，$\mathrm{r}(f_t) = at$ かつ

$$\frac{\partial f_t(z)}{\partial t} = a \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\xi - f_t(z)}\, \nu(d\xi) \tag{5.3}$$

が成り立つ．また，任意の a, ν に対して，方程式 (5.3) の初期値 $f_0(z) = z$ に対応する解は $\mathcal{P}_0^2$ 内の連続な 1 径数合成半群を定める．

注意 5.3. 慣習に倣って単射な正則函数を単葉函数と呼ぶ．命題 5.2 において，常微分方程式の解の一意性により $z_1 \neq z_2$ ならば $f_t(z_1) \neq f_t(z_2)$ であるから，f_t は単葉である．よって，1 径数合成半群は必ず単葉函数のみから成る．これは $\mathcal{P}_0^2$ 内の半群に限らず一般的に成り立つ事実である（命題 6.1 および注意 6.2)．

(5.3) は正則ベクトル場 $q(w) = a \int (\xi - w)^{-1}\, \nu(d\xi)$ の定める自励系常微分方程式である．ベクトル場 q が時間に依らない自励系であることは，元の確率過程 $A = (A_t)_{t\geq 0}$ が時間定常であると仮定したことに因る．では，時間非定常の場合に命題 5.2 を一般化しようとするとどうなるであろうか．その答えが第 1 節で紹介した結果，特に微分積分方程式 (1.4)，なのである．

[9)] 本質的に既知の結果であるが，我々の論文 [12] でも自己完結的な証明を与えておいた．

6　単調加法過程と正則函数の Loewner 鎖

第 4 節の一般の設定に戻り，$A = (A_t)_{t\geq 0}$ を（時間非定常でありうる）単調加法過程とする．あるいは，$(\mu_{s,t})_{0\leq s\leq t}$ を増分 $A_t - A_s$ の分布 $\mu_{s,t}$ からなる単調 CH とする．第 5 節と同様に，村木の公式（命題 4.1）により畳み込みの関係 (4.2) を逆数 Cauchy 変換の言葉に言い換える．すると，$f_{s,t} := F[\mu_{s,t}]$ に対して

$$0 < s < t < u \text{ ならば } f_{s,u} = f_{s,t} \circ f_{t,u} \tag{6.1}$$

を得る．また，

$$f_{t,t}(z) = z \tag{6.2}$$

$$(s,t) \mapsto f_{s,t} \text{ は } \mathbb{C}^+ \text{ 上の広義一様収束について連続である} \tag{6.3}$$

の 2 性質が成り立つ．条件 (6.1)–(6.3) を満たす正則函数 $f_{s,t}\colon \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}^+$（$0 \leq s \leq t$）の 2 径数族を $\mathbb{C}^+$ 上の **reverse evolution family** と呼ぶ．第 5 節の時間定常な設定では $f_{s,t} = f_{t-s}$ となるから，正則半群は reverse evolution family の特別な場合であるとみなせる．

命題 6.1. 任意の reverse evolution family は単葉函数のみからなる．

注意 6.2. 注意 5.3 でも正則半群の単葉性を述べたが，そこで用いた常微分方程式の解の一意性は必ずしも本質的ではない．実際，より一般な命題 6.1 は，微分方程式を経由せずとも Rouché の定理に基づく複素解析的な方法で証明される．例えば Hoshinaga–Hotta–Yanagihara [13] およびその参考文献を参照せよ．

命題 6.1 により，特に A_t の分布 $\mu_t = \mu_{0,t}$ の逆数 Cauchy 変換 $f_t = f_{0,t}$ は単葉である．さらに，3 性質

$$0 < s < t \text{ ならば } f_s(\mathbb{C}^+) \supset f_t(\mathbb{C}^+) \tag{6.4}$$

$$f_0(z) = z \tag{6.5}$$

$$t \mapsto f_t \text{ は連続である} \tag{6.6}$$

が成立する．ここで，一つ目の性質 (6.4) を導くには，(6.1) を用いて

$$f_t = f_{0,t} = f_{0,s} \circ f_{s,t} = f_s \circ f_{s,t}$$

とすればよい．条件 (6.4)–(6.6) を満たす単葉函数 $f_t\colon \mathbb{C}^+ \hookrightarrow \mathbb{C}^+$（$t \geq 0$）の 1 径数族を $\mathbb{C}^+$ 上の **decreasing Loewner chain** と呼ぶ．Decreasing Loewner chain $(f_t)_{t\geq 0}$ から $f_{s,t} = f_s^{-1} \circ f_t$ により reverse evolution family $(f_{s,t})_{0\leq s\leq t}$ が復元される．よって，この二つの対象は一対一に対応している．

上記の設定において $r(t) := \mathrm{r}(f_t)$ とおく．元々の単調 $\mathrm{CH}(\mu_{s,t})_{0\le s\le t}$ に平均零，分散有限を仮定していたから，命題 5.1 により $f_t \in \mathcal{P}_0^2$ すなわち $r(t) \in [0,+\infty)$ である．時間定常すなわち正則半群の場合（命題 5.2）には $r(t)$ が自動的に線形（$r(t)=at$）になった．しかし，非定常の場合 $r(t)$ は t の一般の非減少連続関数である．また，$\mathrm{r}(f_{s,t}) = r(t) - r(s)$ であることに注意しておく．

$r(t)=at$ の形を仮定する場合，1980 年代にはすでに次の事実が知られていた．

命題 6.3 ([2][9][5])**.** $\mathcal{P}_0^2$ 内の reverse evolution family $(f_{s,t})_{0\le s\le t}$ が $\mathrm{r}(f_{s,t}) = a(t-s)$（$a \ge 0$）を満たすとき，（Lebesgue 測度について）ほとんどすべての t について一意的な Borel 確率測度 ν_t が存在して

$$\frac{\partial f_{s,t}(z)}{\partial t} = a\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\xi - f_{s,t}(z)}\,\nu_t(d\xi),\ \text{a.e. } t\in[s,+\infty), \qquad f_{s,s}(z) = z \tag{6.7}$$

が成り立つ．また，Borel 確率測度の可測[10]族 $(\nu_t)_{t\ge 0}$ が与えられたとき，すべての s に対する (6.7) の絶対連続解が $\mathcal{P}_0^2$ 内の reverse evolution family を一意に定める．

命題 6.3 を一般化すれば，次式が成り立つであろう．

$$\frac{\partial f_{s,t}(z)}{\partial r(t)} = a\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\xi - f_{s,t}(z)}\,\nu_t(d\xi),\ dr\text{-a.e. } t\in[s,+\infty). \tag{6.8}$$

ただし，dr は $r(t)$ の定める Lebesgue–Stieltjes 測度である．(6.8) の両辺を dr で積分し，関係 $f_t = f_s \circ f_{s,t}$ を用いると，

$$f_t(z) = z + \int_{[0,t]} \frac{\partial f_s(z)}{\partial z}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\xi - z}\,\nu_s(d\xi)\,dr(s) \tag{6.9}$$

を得る．$\mathcal{K}(d\xi\,ds) := \nu_s(d\xi)\,dr(s)$ とおいて，次の結果に到達する．

定理 6.4. $\mathcal{P}_0^2$ 内の decreasing Loewner chain $(f_t)_{t\ge 0}$ に対して，直積 $\mathbb{R}\times[0,+\infty)$ 上の σ 有限な Borel 測度 $\mathcal{K}$ が存在して

$$\mathcal{K}(\mathbb{R}\times[0,t]) < +\infty \text{ かつ } \mathcal{K}(\mathbb{R}\times\{t\}) = 0 \qquad (t\ge 0) \tag{6.10}$$

および（第 1 節で述べた）Loewner 微分積分方程式

$$f_t(z) = z + \int_{\mathbb{R}\times[0,t]} \frac{\partial f_s(z)}{\partial z}\frac{1}{\xi - z}\,\mathcal{K}(d\xi\,ds) \tag{1.4}$$

を満たす．また，(6.10) を満たす任意の Borel 測度 $\mathcal{K}$ に対して，(1.4) を満たす $\mathcal{P}_0^2$ 内の decreasing Loewner chain が一意に存在する．

---

[10]「可測」の意味は $t \mapsto \nu_t$ が確率測度値関数として弱位相について Borel 可測であるということである．すべての有界連続関数に対して $t \mapsto \int f(\xi)\,\nu_t(d\xi)$ が実数値 Borel 可測関数であることとも同値である．

注意 6.5. 命題 6.3 および定理 6.4 について二つ補足を述べる．

(i) 我々の原論文 [12] では上のような筋道を辿るのではなく，むしろ (6.7) の積分形を直接に時間変更して (1.4) を得ている．なお，$r(t)$ が狭義単調増加である場合には，微分形の一般化 (6.8) の厳密な扱いが Yanagihara [18] や拙著 [15] に述べられている．

(ii) 命題 6.3 において，$r(t)$ の連続度（あるいは絶対連続性）から $t \mapsto f_t(z)$ の連続度（絶対連続性）を導くのは容易である．しかし，その逆すなわち $t \mapsto f_t$ の連続性から $r(t)$ の連続性を導くことについて，既存の文献では明確に述べられていない．この点については，講演時（2024 年 11 月）には我々が初めてかつ非自明な証明を与えたと思っていたのだが，つい最近（2025 年 2 月）より単純な理解の仕方が見つかった．

7 古典過程と単調過程との対応

第 2 節のように，平均零，分散有限な古典加法過程 $X = (X_t)_{t\geq 0}$ の増分 $X_t - X_s$ からくる古典 CH $(\mu^{\mathrm{c}}_{s,t})_{0\leq s\leq t}$ を考える．このとき，Lévy–Khintchine 公式 (1.1) で定まる測度の族 $(\kappa_t)_{t\geq 0}$ は (2.6) を満たす．この性質を使うと，関係

$$\mathcal{K}(B \times (s,t]) = \kappa_t(B) - \kappa_s(B), \qquad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ 0 \leq s < t \tag{7.1}$$

により条件 (6.10) を満たす $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$ 上の σ 有限 Borel 測度 $\mathcal{K}$ が定まる．よって，定理 6.4 により $\mathcal{P}^2_0$ 内の decreasing Loewner chain $(f_t)_{t\geq 0}$ が得られる．すると，$(f_t)_t$ から単調 CH $(\mu^{\mathrm{m}}_{s,t})_{0\leq s\leq t}$ が定まる．また，逆の道筋を辿れば，単調 CH から古典 CH が定まる．したがって，関係 (7.1)（あるいは (1.5)）は平均零，分散有限の仮定の下で古典 CH と単調 CH との間の一対一対応を与える．

時刻 t を含まない古典無限分解可能分布（第 2 節）と単調無限分解可能分布との間には一対一対応があることが以前から知られていた．これは **Bercovici–Pata 対応** [6][3] と呼ばれている．我々の得た加法過程の間の対応は，その動的拡張とみなせる．これはいくつかの意味で「正準」的な対応である．例えば，ここまでの議論から両者の分散の値が一致することがわかる．さらに，次のような性質が示される（原論文 [12] を参照せよ）．

- 我々の対応 $(\mu^{\mathrm{c}}_{s,t}) \mapsto (\mu^{\mathrm{m}}_{s,t})$ は，連続写像の空間 $C(\{\,(s,t) : 0 \leq s \leq t\,\}, \mathbf{P}^2(\mathbb{R}))$[11] のコンパクト開位相（広義一様収束の位相）が誘導する相対位相について同相である．
- 適当な可微分性を仮定すれば，任意の $n \in \mathbb{N}$, $s \geq 0$ に対して

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} x^n\,\mu^{\mathrm{c}}_{s,t}(d\xi)\bigg|_{t=s} = \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} x^n\,\mu^{\mathrm{m}}_{s,t}(d\xi)\bigg|_{t=s}$$

[11] $\mathbf{P}^2(\mathbb{R})$ は 2-Wasserstein 距離を備えた 2 次積率有限な Borel 確率測度の空間を表す．

が成り立つ．すなわち，n 次モーメントの時間無限小の増分は一致する．

注意 7.1. 最後に, 本文中で触れられなかったいくつかの先行研究について述べる．Loewner 方程式が逆数 Cauchy 変換を通して確率過程（あるいは確率分布の時間発展）を生成することを初めて観察したのは Bauer [4] である．彼の研究では単調独立性との関係までは発見されていなかったが，Franz [7, p.1152] がその関係に触れた後，Schleißinger [17] が平均零，分散有限の場合の関係を明確に述べた．Franz–Hasebe–Schleißinger [8] は，近年発展している一般化された Loewner 理論を用いてモーメントに関する仮定を外し，また注意 1.1 のような作用素の側面も含めて，Loewner 鎖と単調加法過程との対応を詳しく調べた．Hasebe–Hotta [11] はこれらの研究を踏まえ，確率過程が単位円周に値を取る場合に古典・単調間の動的な Bercovici–Pata 対応を調べた．Hasebe–Hotta と同様の考えで 2 次モーメントを持つ実数値の確率過程を調べたのが我々の研究 [12] である．

参考文献

[1] 明出伊類似（Acccardi, Luigi）・尾畑伸明,『量子確率論の基礎』, オーム社，2021.

[2] I. A. Aleksandrov, S. T. Aleksandrov and V. V. Sobolev, Extremal properties of mappings of a half plane into itself (Russian), in: *Complex Analysis (Warsaw, 1979)*, Banach Center Publ. **11**, PWN, Warsaw, 1983, pp.7–32.

[3] M. Anshelevich and J. D. Williams, Limit theorems for monotonic convolution and the Chernoff product formula, Int. Math. Res. Notices **11** (2014), 2990–3021.

[4] R. O. Bauer, Löwner's equation from a noncommutative probability perspective, J. Theoret. Probab. **17** (2004), 435–456.

[5] R. O. Bauer, Chordal Loewner families and univalent Cauchy transforms, J. Math. Anal. Appl. **302** (2005), 484–501.

[6] H. Bercovici and V. Pata, A free analogue of Hinčin's characterization of infinite divisibility, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), 1011–1015.

[7] U. Franz, Monotone and boolean convolutions for non-compactly supported probability measures, Indiana Univ. Math. J. **58** (2009), 1151–1186.

[8] U. Franz, T. Hasebe and S. Schleißinger, Monotone increment processes, classical Markov processes and Loewner chains, Diss. Math. **552**, 119 (2020).

[9] V. V. Goryainov and I. Ba, Semigroups of conformal mappings of the upper half-plane into itself with hydrodynamic normalization at infinity, Ukrainian Math. J. **44** (1992), 1209–1217. Translation from Ukraïn. Mat. Zh. **44** (1992), 1320–1329.

[10] 長谷部高広，非可換確率論における独立性と無限分解可能分布，数学 **70** (2018),

296–320.

[11] T. Hasebe and I. Hotta, Additive processes on the unit circle and Loewner chains, Int. Math. Res. Not. **22** (2022), 17797–17848.

[12] T. Hasebe, I. Hotta and T. Murayama, Additive processes on the real line and Loewner chains, preprint, 2024. arXiv:2412.18742

[13] S. Hoshinaga, I. Hotta and H. Yanagihara, Continuous evolution families, Proc. Amer. Math. Soc. **151** (2023), 5251–5263.

[14] N. Muraki, Monotonic convolution and monotonic Lévy-Hinčin formula, preprint, 2000.

[15] T. Murayama, Loewner chains and evolution families on parallel slit half-planes, J. Math. Anal. Appl. **523** (2023), Paper No. 127180, 51 pp.

[16] K. Sato, *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*, corrected paperback edition, Cambridge Studies in Advanced Math. **68**, Cambridge University Press, Cambridge, 2013.

[17] S. Schleißinger, The chordal Loewner equation and monotone probability theory, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. **20** (2017), 1750016, 17 pp.

[18] H. Yanagihara, Loewner theory on analytic universal covering maps, preprint, 2019. arXiv:1907.11987