二重円板上の不変距離と補間問題（再生核，距離関数，群）*

防衛大学校・総合教育学群　瀬戸　道生
Michio Seto
National Defense Academy

Deepak K. D. 氏，荒神氏との共同研究 [2] にて，二重円板上の正則写像に対する補間問題を考察した．その際，二重円板上の Hardy 空間の再生核から定まる距離関数が，不定値内積と二重円板を双曲球に埋め込んだ先での一種の自己同型写像により表されることに気づいた．距離関数が内積と自己同型写像により表されることは珍しいことではない．実際，ユークリッド距離（ユークリッド内積と平行移動），擬双曲距離（$\mathbb{C}$ の内積とメビウス変換）はこの文脈で解釈できる．この小論では，$\mathbb{C}^n$ の通常の単位球の場合に再生核，距離関数，群の関係を整理し，それを参考に，二重円板の場合に [2] の執筆時に気づかなかったいくつかの注意を与える．

1　単位球の場合

まず，$\mathbb{B}_n = \{z \in \mathbb{C}^n : \|z\| < 1\}$ とおき，$z, a \in \mathbb{B}_n$ に対し，

$$P_a z = \frac{\langle z, a\rangle}{\|a\|^2} a, \quad \varphi_a(z) = \frac{a - P_a z - (1 - \|a\|^2)^{1/2}(I - P_a)z}{1 - \langle z, a\rangle}$$

と定める．このとき，φ_a とユニタリ行列の合成により $\mathbb{B}_n$ のすべての自己同型写像を記述することができる (例えば，Rudin [4] の 2.2 節を参照せよ)．さらに，

$$\|\varphi_a(z)\| = 1 - \frac{\sqrt{(1 - \|a\|^2)(1 - \|z\|^2)}}{|1 - \langle z, a\rangle|} \tag{1.1}$$

が成り立つ．ところで，$\mathbb{B}_n$ の自己同型写像の定め方にはもう一つの流儀があるようである．Hahn [3] では上で定めた φ_a とは少々異なる写像 T_{-a} から

$$\|T_{-a}(z)\| = \frac{(|\langle z, a\rangle|^2 - \|z\|^2\|a\|^2 + \|z - a\|^2)^{1/2}}{|1 - \langle z, a\rangle|} \tag{1.2}$$

*本研究は JSPS 科研費 JP20K03646, JP21K03285, JP23KJ1070, JP24K06771 の助成を受けたものです.

を導いている．次に，Drury–Arveson 核

$$k(z,a)=\frac{1}{1-\langle z,a\rangle}$$

を考える．このとき，Agler–McCarthy [1] の Lemma 9.9 により $\mathbb{B}_n$ 上の距離関数

$$\rho_{\mathbb{B}_n}(z,a)=\sqrt{1-\frac{|k(z,a)|^2}{k(z,z)k(a,a)}} \tag{1.3}$$

が定まる．

命題 1.1. $\mathbb{B}_n\times\mathbb{B}_n$ 上で定められた次の三つの関数は一致する．

(i) (1.1) で定められる $d_{\mathbb{B}_n}(z,w)=\|\varphi_w(z)\|$,

(ii) (1.2) で定められる $\delta_{\mathbb{B}_n}(z,w)=\|T_{-w}(z)\|$,

(iii) (1.3) で定められる $\rho_{\mathbb{B}_n}(z,w)$.

特に，これらは $\mathbb{B}_n$ 上定義された同一の距離関数を定める．さらに，この距離は φ_a で不変である．

証明 . 前半は単なる内積の計算で確認できる．後半は Rudin [4] の Theorem 2.2.2 で述べられていることの言い換えである．実際，

$$k(\varphi_a(z),\varphi_a(w))=\frac{1}{1-\langle\varphi_a(z),\varphi_a(w)\rangle}=\frac{(1-\langle z,a\rangle)(1-\langle a,w\rangle)}{(1-\|a\|^2)(1-\langle z,w\rangle)}$$

から

$$\begin{aligned}1-\rho_{\mathbb{B}_n}(\varphi_a(z),\varphi_a(w))^2&=\frac{|k(\varphi_a(z),\varphi_a(w))|^2}{k(\varphi_a(z),\varphi_a(z))k(\varphi_a(w),\varphi_a(w))}\\&=\frac{|k(z,w)|^2}{k(z,z)k(w,w)}\\&=1-\rho_{\mathbb{B}_n}(z,w)^2\end{aligned}$$

が導かれる． □

2 二重円板の場合

この節の中では，$z\in\mathbb{C}^2$ を $z=(z_1,z_2)$ と表す．また，$\mathbb{D}$ を $\mathbb{C}$ 内の単位開円板とする．このとき，

$$\rho(z,w)=\sqrt{\left|\frac{z_1-w_1}{1-\overline{w_1}z_1}\right|^2+\left|\frac{z_2-w_2}{1-\overline{w_2}z_2}\right|^2-\left|\frac{z_1-w_1}{1-\overline{w_1}z_1}\cdot\frac{z_2-w_2}{1-\overline{w_2}z_2}\right|^2}\quad(z,w\in\mathbb{D}^2)$$

は $\mathbb{D}^2$ 上の不変距離を定め，さらに Schwarz–Pick 型の不等式が成り立つ (S [5])．この ρ に関し，K. D.–Kojin–S [2] にて次を示した．

定理 2.1 (K. D.–Kojin–S [2])**.** $\mathbb{D}^2$ 内の 4 点 $\lambda, \mu, \omega, \zeta$ が $\rho(\omega, \zeta) \leq \rho(\lambda, \mu)$ がみたすとき，次の (i), (ii) をみたす有理関数の三つ組 $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ が存在する．

(i) $\Psi(\lambda) = \Phi(\omega)$ かつ $\Psi(\mu) = \Phi(\zeta)$.

(ii) 任意の $z \in \mathbb{D}^2$ に対し，$|\psi_1(z)|^2 + |\psi_2(z)|^2 - |\psi_3(z)|^2 < 1$.

ここで，Φ は $\mathbb{C}^2$ から $\mathbb{C}^3$ への非線形写像 $\Phi : (z_1, z_2) \mapsto (z_1, z_2, z_1 z_2)$ を表す．

この定理の背後には不定値内積空間が隠れている．まず，任意の $(z_1, z_2, z_3)^\top$, $(a_1, a_2, a_3)^\top \in \mathbb{C}^3$ に対し，

$$\langle (z_1, z_2, z_3)^\top, (a_1, a_2, a_3)^\top \rangle_{\mathcal{K}} = \overline{a_1} z_1 + \overline{a_2} z_2 - \overline{a_3} z_3$$

とおき，不定値内積空間 $\mathcal{K} = (\mathbb{C}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{K}})$ を考える．以下，$\mathcal{K}$ の元は $\boldsymbol{z}$ のように太字で表す．この $\mathcal{K}$ の開単位球を

$$\begin{aligned}\Omega &= \{\boldsymbol{z} \in \mathcal{K} \mid \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{z} \rangle_{\mathcal{K}} < 1\} \\ &= \{\boldsymbol{z} = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_3|^2 < 1\}\end{aligned}$$

と表す．また，$\boldsymbol{z}, \boldsymbol{a} \in \Omega$ に対し，ただし，$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle_{\mathcal{K}} = 0$ となる $\boldsymbol{a}$ は除外して，

$$P_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{z} = \frac{\langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{a} \rangle_{\mathcal{K}}}{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle_{\mathcal{K}}} \boldsymbol{a}$$

とおき，$\varphi_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{z})$ を

$$\varphi_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{z}) = \frac{\boldsymbol{a} - P_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{z} - (1 - \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle_{\mathcal{K}})^{1/2} (I - P_{\boldsymbol{a}}) \boldsymbol{z}}{1 - \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{a} \rangle_{\mathcal{K}}}$$

と定める．さて，定理 2.1 を示す際に次の補題が本質的であった．

補題 2.2 (K.D.–Kojin–S [2])**.** 任意の $z, w \in \mathbb{D}^2$ に対し，

$$\rho(z, w)^2 = \langle \varphi_{\Phi(w)}(\Phi(z)), \varphi_{\Phi(w)}(\Phi(z)) \rangle_{\mathcal{K}}$$

が成り立つ．

定理 2.1 から歩を進め一般の補間問題を考える上で，Ω の構造の理解は必須であろう．ここでは，[2] の執筆時には気づかなかったことを含め，あらためて $\varphi_{\boldsymbol{a}}$ の性質を整理する．以下，$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle_{\mathcal{K}} \neq 0$ をみたす $\boldsymbol{a} \in \Omega$ に対して，

$$\Omega_{\boldsymbol{a}} = \Omega \setminus \{\boldsymbol{z} \in \Omega : \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{a} \rangle_{\mathcal{K}} = 1\}$$

と定める．

命題 2.3. $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle_{\mathcal{K}} \neq 0$ をみたす $\boldsymbol{a} \in \Omega$ に対して，次が成り立つ．

(i) $\boldsymbol{0}, \boldsymbol{a} \in \Omega_{\boldsymbol{a}}$ であり，$\varphi_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{a}$ かつ $\varphi_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$.

(ii) 任意の $\boldsymbol{z} \in \Omega_{\boldsymbol{a}}$ に対し，

$$1 - \langle \varphi_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{z}), \varphi_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{z}) \rangle_{\mathcal{K}} = \frac{1 - \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle_{\mathcal{K}}}{|1 - \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{a} \rangle_{\mathcal{K}}|^2} (1 - \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{z} \rangle_{\mathcal{K}}).$$

(iii) 任意の $\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w} \in \Omega_{\boldsymbol{a}}$ に対し，

$$1 - \langle \varphi_{\boldsymbol{a}}(z), \boldsymbol{w} \rangle_{\mathcal{K}} = \frac{1 - \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{w} \rangle_{\mathcal{K}}}{1 - \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{a} \rangle_{\mathcal{K}}} (1 - \langle \boldsymbol{z}, \varphi_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{w}) \rangle_{\mathcal{K}}).$$

(iv) 任意の $\boldsymbol{z} \in \Omega_{\boldsymbol{a}}$ に対し，$\varphi_{\boldsymbol{a}}(\varphi_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{z})) = \boldsymbol{z}$.

(v) $\varphi_{\boldsymbol{a}}|_{\Omega_{\boldsymbol{a}}}$ は $\Omega_{\boldsymbol{a}}$ の自己同型写像である．

(vi) $\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \rangle_{\mathcal{K}} \neq 0$ となる $\boldsymbol{b} \in \Omega$ に対して，$\varphi_{\boldsymbol{b}} \circ \varphi_{\boldsymbol{a}} = T\varphi_{\varphi_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b})}$ をみたす $\sharp$-ユニタリ行列 T が存在する[1]．

(vii) 任意の $\sharp$-ユニタリ行列 T に対し，$T^{\sharp}\varphi_{\boldsymbol{a}}T = \varphi_{T^{\sharp}\boldsymbol{a}}$.

証明． (i), (ii), (iii), (iv) は直接計算することで示される．(v) を示す．まず，

$$\langle \varphi_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{z}), \boldsymbol{a} \rangle_{\mathcal{K}} = \frac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle_{\mathcal{K}} - \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{a} \rangle_{\mathcal{K}}}{1 - \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{a} \rangle_{\mathcal{K}}}$$

が成り立つ．今，$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle_{\mathcal{K}} < 1$ であるから，$\langle \varphi_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{z}), \boldsymbol{a} \rangle_{\mathcal{K}} \neq 1$ を得る．従って，$\varphi_{\boldsymbol{a}}|_{\Omega_{\boldsymbol{a}}}$ は $\Omega_{\boldsymbol{a}}$ から $\Omega_{\boldsymbol{a}}$ への写像である．また，$\varphi_{\boldsymbol{a}}|_{\Omega_{\boldsymbol{a}}}$ が全単射であることは，(iv) から従う．(vi) を示す[2]．まず，直接計算することで[3]，適当な行列 T とベクトル $\boldsymbol{u}$ を用いて，

$$\varphi_{\boldsymbol{b}} \circ \varphi_{\boldsymbol{a}} \circ \varphi_{\varphi_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b})}(\boldsymbol{z}) = T\boldsymbol{z} + \boldsymbol{u}$$

と表されることがわかる．ここで，(i) により，

$$\varphi_{\boldsymbol{b}} \circ \varphi_{\boldsymbol{a}} \circ \varphi_{\varphi_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b})}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$$

が成り立つ．よって，(iv) により，

$$\varphi_{\boldsymbol{b}} \circ \varphi_{\boldsymbol{a}} \circ \varphi^{-1}_{\varphi_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b})}(\boldsymbol{z}) = \varphi_{\boldsymbol{b}} \circ \varphi_{\boldsymbol{a}} \circ \varphi_{\varphi_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b})}(\boldsymbol{z}) = T\boldsymbol{z}$$

---

[1] 行列 T の内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{K}}$ に関する共役を $T^{\sharp}$ と表す．ここで，$T^{-1} = T^{\sharp}$ が成り立つとき，T を $\sharp$-ユニタリ行列とよぶ．

[2] Rudin [4] の中でこの (vi) に対応する命題は Cartan の定理にもとづいて示されるが，その証明の直接の適用はできそうにない．

[3] ただし，有理式として計算する．この (vi) の証明について，渡辺文彦氏（防衛大）に貴重な意見をいただいたことを感謝します．

を得る．特に，$\varphi_{\boldsymbol{b}} \circ \varphi_{\boldsymbol{a}} = T\varphi_{\varphi_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b})}$ が成り立つ．さらに，このとき，(ii), (iii) から

$$\begin{aligned}
1 - \langle T\boldsymbol{z}, T\boldsymbol{z}\rangle_{\mathcal{K}} &= 1 - \langle \varphi_{\boldsymbol{b}} \circ \varphi_{\boldsymbol{a}} \circ \varphi_{\varphi_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b})}(\boldsymbol{z}), \varphi_{\boldsymbol{b}} \circ \varphi_{\boldsymbol{a}} \circ \varphi_{\varphi_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b})}(\boldsymbol{z})\rangle_{\mathcal{K}} \\
&= \frac{1 - \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}\rangle_{\mathcal{K}}}{|1 - \langle \varphi_{\boldsymbol{a}} \circ \varphi_{\varphi_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b})}(\boldsymbol{z}), \boldsymbol{b}\rangle_{\mathcal{K}}|^2} \times \frac{1 - \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle_{\mathcal{K}}}{|1 - \langle \varphi_{\varphi_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b})}(\boldsymbol{z}), \boldsymbol{a}\rangle_{\mathcal{K}}|^2} \\
&\qquad \times \frac{1 - \langle \varphi_{\varphi_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b})}, \varphi_{\varphi_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b})}\rangle_{\mathcal{K}}}{|1 - \langle \boldsymbol{z}, \varphi_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b})\rangle_{\mathcal{K}}|^2} \times (1 - \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}\rangle_{\mathcal{K}}) \\
&= 1 - \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}\rangle_{\mathcal{K}}
\end{aligned}$$

が得られる[4]．よって，上の計算が考えられる $\boldsymbol{z}$ に対し，$\langle T\boldsymbol{z}, T\boldsymbol{z}\rangle_{\mathcal{K}} = \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}\rangle_{\mathcal{K}}$ が成り立つことがわかった．しかしながら，ここで除外された $\boldsymbol{z}$ の全体は $\mathbb{C}^3$ の中の連立一次方程式の解集合である．従って，内積と行列の連続性により，任意の $\boldsymbol{z} \in \Omega$ に対し，$\langle T\boldsymbol{z}, T\boldsymbol{z}\rangle_{\mathcal{K}} = \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}\rangle_{\mathcal{K}}$ が成り立つ．(vii) は定義に従って確認すればよい． □

補題 2.2 は K.D.–Kojin–S [2] では直接計算することで示したが，命題 2.3 の (ii) において，$\boldsymbol{z} = \Phi(z)$, $\boldsymbol{a} = \Phi(w)$ の場合を考えると見通しのよい証明が得られる．また，命題 2.3 の (vi) と (vii) から $T\varphi_{\boldsymbol{a}}$ の全体が群になることがわかる．今回適切な文献を見つけることはできなかったが，これはすでに知られていることであろう．しかしながら，ここで指摘した再生核と距離関数と群の関係はいくらか新しいものではないかと思う．

参考文献

[1] J. Agler and J. E. McCarthy, *Pick interpolation and Hilbert function spaces*, Graduate Studies in Mathematics, 44. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[2] Deepak K. D., K. Kojin and M. Seto, *A note on an invariant distance of the bidisk*. Linear Algebra Appl. 703 (2024), 619–626.

[3] K. T. Hahn, *Geometry on the unit ball of a complex Hilbert space*, Canadian J. Math. 30 (1978), no. 1, 22–31.

[4] W. Rudin, *Function Theory in the Unit Ball of* $\mathbb{C}^n$, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 241, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1980.

[5] M. Seto, *Indefinite Schwarz–Pick inequalities on the bidisk*, New York J. Math. 26 (2020), 116–128.

[4](ii) と (iii) を共役作用素の計算公式と見なすのである．