Characterization for bounded little Hankel operators

名城大学理工学部数学科　田中 清喜
Kiyoki Tanaka
Department of Mathematics, Meijo University

1　はじめに

本稿は，山路哲史氏（神戸高専）との共同研究に基づく．本稿は既発表論文 [4] の要約 (résumé) であり，せっかくの講究録であるためやや投稿論文で用いないような表現を用いてでも意図がわかるように記してみたい．

1986 年に Axler[1] は，正則関数 φ の複素共役をシンボルとする Bergman 空間上の Hankel 作用素が有界であることの必要十分条件はシンボル φ が Bloch 関数であること，正則関数 φ の複素共役をシンボルとする Bergman 空間上の Hankel 作用素がコンパクトであることの必要十分条件はシンボル φ が little Bloch 関数であることを示し，函数論の対象の一つと思われる Bloch 関数に作用素的な特徴づけを行った．この結果を 1 つの大きな源流[*1]として様々な設定下で Hankel 作用素に限らず様々な作用素の有界性，コンパクト性等の特徴づけ問題が考えられている．例えば Ohno-Stroethoff-Zhao[3] は Bloch type spaces 間の weighted composition operators の有界性やコンパクト性の特徴づけを与えており，Wu-Zhao-Zorboska[5] は Bloch type space 上の Toeplitz 作用素の有界性の特徴づけを行った[*2]．本稿のタイトルとなっている little Hankel 作用素においては，Bonami-Luo[2] が Bergman 空間の間の little Hankel 作用素の有界性の特徴づけを行った．その特徴づけでは Axler の結果と同じく，Bloch 関数が現れるとともに Bergman 空間の重みの設定によっては Lipschitz 空間も現れる．一方で，Bloch type spaces の間の little Hankel 作用素の有界性の特徴づけは先行研究で見受けられなく，[4] では Bloch type spaces の間の little Hankel 作用素の有界性の特徴づけを与えた．本稿ではその [4] の結果の一部を紹介するとともに掛け算作用素との比較を行う．

[*1] さらに以前からこの手の作用素の特徴づけ問題がないわけではないが，1986 年以降から爆発的に流行した発端であると認識している．

[*2] 話の流れ上触れていないが，Bergman 空間の間での composition operator や Toeplitz 作用素については条件付きではあるが有界性やコンパクト性についての特徴づけ問題は良く知られている．

2 設定と主結果

$\mathbb{D}$ を $\mathbb{C}$ の開単位円板とし，$\gamma > 0, p > 0$ に対して，weighted Bergman 空間 A^p_γ を $\mathbb{D}$ 上正則であり，かつ

$$\|f\|_{p,\gamma} := \left(\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \, dV_\gamma(z) \right)^{1/p} < \infty$$

をみたす関数 f 全体の成す空間とする．ここで，dV を通常の volume measure とし，dV_γ は

$$dV_\gamma(z) := \frac{\gamma}{\pi}(1 - |z|^2)^{\gamma-1} dV(z)$$

と定義する[*3]．重みを考えないときは A^p と書くことにする．つまり，$A^p := A^p_1$ である．$p = 2$ のとき，A^2_γ は再生核ヒルベルト空間であり，$K_\gamma(z, w)$ を A^2_γ の再生核とする．つまり，$f \in A^2_\gamma$ に対して，

$$f(z) = \int_{\mathbb{D}} K_\gamma(z, w) f(w) dV_\gamma(w)$$

をみたし，$L^2(dV_\gamma)$ から A^2_γ への直交射影 P_γ は

$$P_\gamma f(z) = \int_{\mathbb{D}} K_\gamma(z, w) f(w) dV_\gamma(w)$$

と表される．特に，この設定下では再生核は explicit な表示が良く知られており，

$$K_\gamma(z, w) = \frac{1}{(1 - z\overline{w})^{1+\gamma}}$$

である．また，$\overline{A^p_\gamma} := \{\overline{f} : f \in A^p_\gamma\}$ とする．$\overline{A^2_\gamma}$ もまた再生核ヒルベルト空間であり，その再生核は A^2_γ の再生核の複素共役，つまり，$\overline{K_\gamma(z, w)} = K_\gamma(w, z)$ となり，$L^2(dV_\gamma)$ から $\overline{A^2_\gamma}$ への直交射影 $\overline{P_\gamma}$ は

$$\overline{P_\gamma} f(z) = \int_{\mathbb{D}} K_\gamma(w, z) f(w) dV_\gamma(w)$$

[*3] 重みについては Zhu[6] で用いられるものと若干違うことに注意せよ．

と表される．$\varphi \in L^1(dV_\gamma)$ に対して，Hankel 作用素 H_φ および little Hankel 作用素 h_φ をそれぞれ

$$H_\varphi f(z) := (I - P_\gamma) M_\varphi f(z) = \int_{\mathbb{D}} (\varphi(z) - \varphi(w)) K_\gamma(z,w) f(w) dV_\gamma(w),$$

および

$$h_\varphi f(z) := \overline{P_\gamma} M_\varphi f(z) = \int_{\mathbb{D}} K_\gamma(w,z) f(w) \varphi(w) dV_\gamma(w)$$

と定義する．ここで M_φ は掛け算作用素 $M_\varphi f = \varphi f$ である．現状は $f \in H^\infty$ においては積分の意味で定義できている状況で，Bergman 空間上では densely defined されているとみる．この作用素たちの有界性（ある種の well-definedness），コンパクト性等については色々な設定下でシンボルの特徴づけが成されている．例として 1 節でも紹介した Axler[1] の結果を紹介する．

定理 2.1 [1]
$\varphi \in A^2$ とする．Hankel 作用素 $H_{\overline{\varphi}} : A^2 \to (A^2)^\perp$ が有界であることの必要十分条件は φ が Bloch 関数であることである．Hankel 作用素 $H_{\overline{\varphi}} : A^2 \to (A^2)^\perp$ がコンパクトであることの必要十分条件は φ が little Bloch 関数であることである．

ここで，正則関数 φ が Bloch 関数であるとは $\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)\,|\varphi'(z)| < \infty$ をみたすことであり，正則関数 φ が little Bloch 関数であるとは $\lim_{|z|\to 1^-}(1-|z|^2)\,|\varphi'(z)| = 0$ をみたすことである．

このように，作用素の有界性から定義域，値域で現れる関数空間以外の関数の性質が現れることがある．T.-Yamaji[4] では Bloch type space $\mathcal{B}^\alpha$ から Bloch type function の複素共役の成す空間 $\overline{\mathcal{B}^\beta}$ への little Hankel 作用素の有界性の特徴づけを与えた．定理を紹介するためにいくつかの関数空間を設定し，性質を思い出しておく．

$\alpha > 0$ に対して，Bloch type space $\mathcal{B}^\alpha$ は

$$\|f\|_{\mathcal{B}^\alpha} := |f(0)| + \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)^\alpha\,|f'(z)| < \infty \tag{1}$$

をみたす正則関数 f 全体の成す空間とする．最大値原理から $\alpha < 0$ ときに (1) をみたす正則関数 f は定数関数に限る．$\alpha \in \mathbb{R}$ に対して，Lipschitz space Λ_α は

$$\|f\|_{\Lambda_\alpha} := |f(0)| + \cdots + \left|f^{(n-1)}(0)\right| + \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)^{n-\alpha}\left|f^{(n)}(z)\right| < \infty$$

をみたす $\mathbb{D}$ 上の正則関数 f 全体の成す関数空間とする．ここで，$n \in \mathbb{N}$ は $n-\alpha>0$ をみたす最小の自然数とする．注意として，$0<\alpha<1$ のとき，$\Lambda_{1-\alpha}=\mathcal{B}^{\alpha}$ と $\mathcal{B}^{\alpha} \subset H^{\infty}$ をみたし，Lipschitz space はある種の Bloch type space の拡張である．ラフな書き方になるが，Bloch type space $\mathcal{B}^{\alpha}$ は $0<\alpha<1$ のとき有界で $\alpha<0$ として (1) をみたす関数は定数関数しかないが，$\Lambda_{1-\alpha}$ については $\alpha<0$ でも定数関数以外の関数も現れ，H^{∞} 関数をより詳しく分類することができている空間である．また， $\alpha>0$ に対して，logarithmic Bloch type space $\mathcal{LB}^{\alpha}$ を

$$\|f\|_{\mathcal{LB}^{\alpha}} := |f(0)| + \sup_{z\in\mathbb{D}} (1-|z|^2)^{\alpha} |f'(z)| \log \frac{e}{1-|z|^2} < \infty$$

をみたす正則関数 f 全体の成す空間とする．次が [4] の主結果である．

定理 2.2　[4]
$\alpha, \beta, \gamma > 0$ は $\gamma-\alpha>-1, \gamma-\beta>-1$ をみたし，$\varphi \in A^1_{\gamma}$ とする．

(1) $0<\alpha<1$ のとき，little Hankel 作用素 $h_{\overline{\varphi}} : \mathcal{B}^{\alpha} \to \overline{\mathcal{B}^{\beta}}$ が有界であるための必要十分条件は $\varphi \in \mathcal{B}^{\beta}$ である．
(2) $\alpha=1$ のとき，little Hankel 作用素 $h_{\overline{\varphi}} : \mathcal{B}^{\alpha} \to \overline{\mathcal{B}^{\beta}}$ が有界であるための必要十分条件は $\varphi \in \mathcal{LB}^{\beta}$ である．
(3) $\alpha>1$ のとき，little Hankel 作用素 $h_{\overline{\varphi}} : \mathcal{B}^{\alpha} \to \overline{\mathcal{B}^{\beta}}$ が有界であるための必要十分条件は $\varphi \in \Lambda_{\alpha-\beta}$ である．

さらに，次のノルムの同値性が成立する．

$$\|h_{\overline{\varphi}}\| \sim \begin{cases} \|\varphi\|_{\mathcal{B}^{\beta}} & \text{if } \ 0<\alpha<1, \\ \|\varphi\|_{\mathcal{LB}^{\beta}} & \text{if } \ \alpha=1, \\ \|\varphi\|_{\Lambda_{\alpha-\beta}} & \text{if } \ \alpha>1. \end{cases}$$

Hankel 作用素 H_{φ} は $H_{\varphi}f = \varphi f - P_{\gamma}[\varphi f]$ と表示される．little Hankel 作用素 h_{φ} についても，$f, g \in H^{\infty}$ に対して

$$\langle h_{\varphi} f, \overline{g} \rangle = \langle \varphi f, \overline{g} \rangle$$

と表示されるため，ある種の掛け算作用素の拡張としてみれる作用素である．ここで，

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{D}} f(w)\overline{g(w)} dV_{\gamma}(w)$$

である．実際の定理 2.2 では $h_{\overline{\varphi}}$ を考えているため掛け算作用素と比較するのは筋違いかもしれないが，掛け算作用素 M_{φ} と little Hankel 作用素 $h_{\overline{\varphi}}$ の有界性の特徴づけでは

相似性があるとともにその中でも少しの違いがあるため比較してみたい．記号として，$M(X,Y)$ を X から Y への multiplier 全体を表すとする．

定理 2.3　[3, Corollary 2.5]
Let $\alpha,\beta>0$.

(1) If $0<\alpha<1$, then

$$M(\mathcal{B}^\alpha,\mathcal{B}^\beta)=\begin{cases}\mathcal{B}^\beta & \text{if } \beta\geq\alpha,\\ \{0\} & \text{if } 0<\beta<\alpha.\end{cases}$$

(2) If $\alpha=1$, then

$$M(\mathcal{B},\mathcal{B}^\beta)=\begin{cases}\mathcal{L}\mathcal{B}^\beta & \text{if } \beta>1,\\ \mathcal{L}\mathcal{B}\cap H^\infty & \text{if } \beta=1,\\ \{0\} & \text{if } 0<\beta<1.\end{cases}$$

(3) If $\alpha>1$, then

$$M(\mathcal{B}^\alpha,\mathcal{B}^\beta)=\begin{cases}\mathcal{B}^{\beta-\alpha+1} & \text{if } \beta>\alpha,\\ H^\infty & \text{if } \beta=\alpha,\\ \{0\} & \text{if } 0<\beta<\alpha.\end{cases}$$

$\alpha<\beta$ のときは掛け算作用素 $M_\varphi:\mathcal{B}^\alpha\to\mathcal{B}^\beta$ の有界性と little Hankel 作用素 $h_{\overline{\varphi}}:\mathcal{B}^\alpha\to\overline{\mathcal{B}^\beta}$ の有界性は同じ条件で記述されていることが見受けられる．$\alpha>\beta$ のときは掛け算作用素を有界にするようなシンボルは自明な関数である零関数しか存在しえないが，little Hankel 作用素の場合は H^∞ の部分集合である Lipschitz クラスによって記述されている．$\alpha=\beta$ のときが一番特徴的であると思われるが，特に $\alpha=\beta=1$ で見ておくと掛け算作用素の有界性は $\mathcal{L}\mathcal{B}\cap H^\infty$ で特徴づけされていて，little Hankel 作用素 $h_{\overline{\varphi}}$ については $\mathcal{L}\mathcal{B}$ となっている．あえて $\mathcal{L}\mathcal{B}=\mathcal{L}\mathcal{B}\cap\mathcal{B}$ とみて他の場合も観察すると，有界掛け算作用素の特徴づけではシンボルが H^∞ であることが前提として必要であり，有界 little Hankel 作用素 $h_{\overline{\varphi}}$ の特徴づけではシンボルが Bloch 関数であることが前提として必要であるように見受けられる．

3　謝辞

RIMS 共同研究「実解析・複素解析・函数解析の総合的研究」にて講演させていただき，講究録を書く機会をいただけたことに感謝いたします．また，本研究は JSPS 科研費 JP20K14334, JP21K03283 の助成を受けたものです．

参考文献

[1] S. Axler, *The Bergman space, the Bloch space, and commutators of multiplication operators*, Duke Math. J. **53** (1986), 315–332.

[2] A. Bonami and L. Luo, *On Hankel operators between Bergman spaces on the unit ball*, Houston J. Math. **31** (2005), no. 3, 815–828.

[3] S. Ohno, K. Stroethoff and R. Zhao, *Weighted composition operators between Bloch-type spaces*, Rocky Mt. J. Math. **33** (2003), no. 1, 191–215.

[4] K. Tanaka and S. Yamaji, *Little Hankel operators from Bloch type spaces into another*, Adv. Oper. Theory **10** (2025), no. 1, Paper No. 18, 21 pp.

[5] Z. Wu, R. Zhao and N. Zorboska, *Toeplitz operators on Bloch-type spaces*, Proc. Am. Math. Soc. **134** (2006), 3531–3542.

[6] K. Zhu, *Operator theory in function spaces, second edition*, Amer. Math. Soc., Mathematical Surveys and Monographs **138**, 2007.