Local Behavior of Pseudomeasures

都留文科大学教育学部　　国定　亮一
Ryoichi Kunisada
Faculty of Liberal Arts,
Tsuru University

1　序言

本稿においては Lorentz (1949) が導入した数列の収束の一般化概念である (Lorentz の意味での) 概収束 (以下, 単に概収束) に関して, 調和解析の観点からの研究を紹介する. 証明を含むより詳しい内容は [5] を参照してほしい.

2　概収束

l^∞ を有界数列のなす空間とする. これは整数のなす加群 $\mathbb{Z}$ 上の有界関数の空間 $L^\infty(\mathbb{Z})$ に次のように埋め込まれる:

$$l^\infty \ni \psi \hookrightarrow \tilde{\psi} \in L^\infty(\mathbb{Z}), \quad \tilde{\psi}(n) := \begin{cases} \psi(n) & (n \geq 0) \\ 0 & (n < 0) \end{cases}$$

以下, l^∞ の元 ψ とそれを拡張した $L^\infty(\mathbb{Z})$ の元 $\tilde{\psi}$ を同一視する. まずは, $\psi \in l^\infty$ の概収束を次で定義する ([6]):

定義 2.1. $\psi \in l^\infty$ が $\alpha \in \mathbb{C}$ に概収束するとは次が成立することである.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \psi(n+i) = \alpha \quad (n \text{ に関して一様}).$$

このとき, $\psi \xrightarrow{ac} \alpha$ と書く.

定義から容易にしたがう概収束の重要な性質を以下に挙げる. 以下, 通常の収束を $\psi \xrightarrow{c} \alpha$ ($\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \psi(n) = 0$) と表す.

- $\psi \xrightarrow{c} \alpha \Rightarrow \psi \xrightarrow{ac} \alpha$

- $\psi \xrightarrow{ac} \alpha \not\Rightarrow \psi \xrightarrow{c} \alpha$
  e.g. $\psi(n) = (-1)^n$ $(n \geq 0)$ とおくと,

$$\psi \xrightarrow{ac} 0 \text{ かつ } \psi \overset{c}{\not\to} 0$$

- $\psi \xrightarrow{c} \alpha \Leftrightarrow \psi \xrightarrow{ac} \alpha$ かつ $\psi(n+1) - \psi(n) \xrightarrow{c} 0$

- $\psi \xrightarrow{ac} \alpha \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum\limits_{i=0}^{k-1} \psi(k) = \alpha$　(Cesàro 収束)

備考 1. 本論考では簡潔性を優先して直接定義したが, 概収束は通常は Banach 極限の概念を用いて定義される. この考え方に基づけば任意の amenable な局所コンパクト位相群 (半群) に対して概収束の概念を定義できる ([1], [2], [8]). また, 以下で示す結果の多くも一般の局所コンパクト可換群に対して成立する ([5]).

3　双対性

本節では $\psi \in l^\infty$ の Fourier 変換 $\hat{\psi}$ が $\mathbb{T}$ 上の C^∞ 級関数なす空間 $\mathcal{D}(\mathbb{T})$ の双対空間の元として定義できるという事実を述べる (詳しくは [7] 参照). 特にこの概念により ψ の概収束を特徴づけることが可能である. まず $\mathcal{D}(\mathbb{T})$ の位相をセミノルムの族

$$p_N : \mathcal{D}(\mathbb{T}) \to \mathbb{R}_+, \quad p_N(\varphi) = \sum_{n=0}^{N} \|\varphi^{(n)}\|_\infty \quad (N \geq 0)$$

で定義する. これにより, $\mathcal{D}(\mathbb{T})$ は完備な局所凸線形位相空間になる. その双対空間を $\mathcal{D}^*(\mathbb{T})$ とおく. $\mu \in \mathcal{D}^*(\mathbb{T})$ の Fourier 変換を $\hat{\mu}(n) = \langle e^{-in\theta}, \mu \rangle$ $(n \in \mathbb{Z})$ で定義する. このとき, $\hat{\mu}$ は緩増加数列であることが示される. ここで, (両側) 数列 $\tau : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ が緩増加であるとは, ある非負整数 $N \geq 0$ が存在して

$$\tau(n) = O(|n|^N) \ (|n| \to \infty)$$

が成り立つことをいう. 以下, 緩増加数列のなす空間を $\mathcal{S}^*(\mathbb{Z})$ とかく. 逆に $\tau \in \mathcal{S}^*(\mathbb{Z})$ の Fourier 変換 $\hat{\tau} \in \mathcal{D}^*(\mathbb{T})$ を以下で定義する:

$$\langle \varphi, \hat{\tau} \rangle := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tau(n) \hat{\varphi}(-n).$$

ここで, $\hat{\varphi}(n) \in L^\infty(\mathbb{Z})$ は φ の Fourier 係数であり,

$$\varphi(n) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) e^{-inx} \frac{dx}{2\pi} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

で定義される. 上の級数が収束することは, φ の無限回微分可能性から次式が成立することより明らかである.

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} |n|^N |\hat{\varphi}(n)| < \infty \quad (N \geq 0).$$

このような数列を急減少数列と呼び, その全体のなす空間を $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$ とかくことにする. 以上の定義により, 双対ペアの同型

$$\langle \mathcal{D}(\mathbb{T}), \mathcal{D}^*(\mathbb{T})\rangle \cong \langle \widehat{\mathcal{D}}(\mathbb{T}), \widehat{\mathcal{D}}^*(\mathbb{T})\rangle \cong \langle \mathcal{S}(\mathbb{Z}), \mathcal{S}^*(\mathbb{Z})\rangle, \quad \langle \varphi, \hat{\tau}\rangle = \langle \hat{\varphi}, \tau\rangle$$

が成立することが分かる. また Fourier 変換

$$\mathcal{F} : \mathcal{D}^*(\mathbb{T}) \to \mathcal{S}^*(\mathbb{Z}), \quad \mathcal{F}\mu := \hat{\mu}$$

は 2 つの線形位相空間 $\mathcal{D}^*(\mathbb{T})$ と $\mathcal{S}^*(\mathbb{Z})$ の間の同型であり, その逆写像は

$$\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}^*(\mathbb{Z}) \to \mathcal{D}^*(\mathbb{T}), \quad \mathcal{F}^{-1}\tau = \hat{\tau}$$

で与えられる.

今, $L^\infty(\mathbb{Z})(\subseteq \mathcal{S}^*(\mathbb{Z}))$ の元の Fourier 変換となっているような $\mathcal{D}^*(\mathbb{T})$ の元全体のなす集合を $\mathcal{F}L^\infty(\mathbb{T})$ で表す. $\mathcal{F}L^\infty(\mathbb{T})$ の元を擬測度 (pseudomeasure) という. $\mathcal{F}L^\infty(\mathbb{T})$ は $\mathcal{D}^*(\mathbb{T})$ の部分空間になる. さらに $\mathcal{D}(\mathbb{T})$ の作用が自然に定まり, $\mathcal{D}(\mathbb{T})$-加群の構造をもつ. $\mathcal{F}L^\infty(\mathbb{T})$ 上のノルムを $\|\hat{\psi}\| = \|\psi\|_\infty$ によって定める.

$\hat{\psi} \in \mathcal{F}L^\infty(\mathbb{T})$ に対して, $\hat{\psi}$ が開集合 $U \subseteq \mathbb{T}$ 上で消えるとは, U に台をもつような任意の $\hat{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbb{T})$ に対して $\langle \hat{\varphi}, \hat{\psi}\rangle = 0$ が成り立つことと定める. $\hat{\psi}$ が消えるような $\mathbb{T}$ の最大の開集合の補集合を $\hat{\psi}$ の台と定義する.

次に, $\mathcal{F}L^\infty(\mathbb{T})$ の部分空間として, 0 に収束する数列全体のなす空間 $L_0^\infty(\mathbb{Z}) := \{\psi \in L^\infty(\mathbb{Z}) : \lim_{|n|\to\infty} \psi(n) = 0\}$ の元の Fourier 変換全体のなす空間を $\mathcal{F}L_0^\infty(\mathbb{T})$ とおく. $\mathcal{F}L_0^\infty(\mathbb{T})$ の元を擬関数 (pseudofunction) という. 特に $L^1(\mathbb{T}) \subseteq \mathcal{F}L_0^\infty(\mathbb{T})$ である. ここで $\mathcal{F}L_0^\infty(\mathbb{T})$ における $L^1(\mathbb{T})$ の元 f は

$$\langle \varphi, f\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) f(x) \frac{dx}{2\pi}$$

で定まるような $\mathcal{D}^*(\mathbb{T})$ の元である. 実際, $\hat{f} \in L_0^\infty(\mathbb{Z})$ であり,

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) f(x) \frac{dx}{2\pi} &= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(n) e^{inx} f(x) \frac{dx}{2\pi} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(n) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} \frac{dx}{2\pi} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(n) \hat{f}(-n).\end{aligned}$$

したがって, $\hat{f} = \psi$ とおくと, $\hat{\psi} = f \in L^1(\mathbb{T})$ である.

$\hat{\tau} \in \mathcal{D}^*(\mathbb{T})$ に対して, 局所的に $\mathcal{F}L_0^\infty(\mathbb{T})$ $(\mathcal{F}L^\infty(\mathbb{T}))$ であるという概念を定義することができる. $\mathbb{T}$ の開集合 U に対して, $\mathcal{D}(U)$ を U に台をもつ C^∞ 級関数のなす空間とする.

定義 3.1 (局所的な $\mathcal{F}L_0^\infty(\mathbb{T})(\mathcal{F}L^\infty(\mathbb{T}))$ の元)**.** $\hat{\tau} \in \mathcal{D}^*(\mathbb{T})$ が $\theta_0 \in \mathbb{T}$ において局所的に $\mathcal{F}L_0^\infty(\mathbb{T})$ $(\mathcal{F}L^\infty(\mathbb{T}))$ の元であるとは, ある θ_0 の近傍 U および $\hat{\psi} \in \mathcal{F}L_0^\infty(\mathbb{T})$ $(\mathcal{F}L^\infty(\mathbb{T}))$ が存在して $\langle \varphi, \hat{\tau}\rangle = \langle \varphi, \hat{\psi}\rangle$ がすべての $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ に対して成り立つことである.

$\theta_0 \in \mathbb{T}$ において局所的に $\mathcal{F}L_0^\infty(\mathbb{T})(\mathcal{F}L^\infty(\mathbb{T}))$ の元であるもの全体の集合を $\mathcal{F}L_0^\infty(\theta_0)(\mathcal{F}L^\infty(\theta_0))$ とおく．また $\mathcal{F}L_0^\infty(\theta_0)$ の ($\mathcal{F}L^\infty(\mathbb{T})$ における) ノルム閉包を $\overline{\mathcal{F}L_0^\infty(\theta_0)}$ とおく．

さて, 2 節で導入した数列の概収束とこの節の話は密接に関係している．与えられた数列 $\psi \in l^\infty$ の概収束をその Fourier 変換 $\hat{\psi}$ の局所的な性質により特徴づけることが可能である．

定理 3.1 (Kunisada [5])**.** $\psi \in l^\infty$ とする．$\psi \xrightarrow{ac} 0$ なるための必要十分条件は $\hat{\psi} \in \overline{\mathcal{F}L_0^\infty(0)}$ である．

この定理から導かれるいくつかの系を挙げる．

系 1. $\psi \cdot e^{-in\theta} \xrightarrow{ac} 0$ $(\theta \in \mathbb{T})$ なるための必要十分条件は $\hat{\psi} \in \overline{\mathcal{F}L_0^\infty(\theta)}$ なることである．

系 2. $\psi \in l_\infty$ が $\lim_{n\to\infty}\{\psi(n+1) - \psi(n)\} = 0$ を満たすとする．このとき, $\hat{\psi} \in \overline{\mathcal{F}L_0^\infty(0)}$ なることと, $\psi \xrightarrow{c} 0$ は同値である．

4　複素 Tauber 型定理

定理 1 およびその系の応用として, 複素 Tauber 型定理について述べる (この分野の概説として [4] がある)．今, 一般に (有界とは限らない) 数列 $\{a_n\}_{n\geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_+}$ が与えられたとする．その母関数 $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ を考える．さらに $f(z)$ は単位円板 $\mathbb{D}$ 上で正則と仮定し,

$$f_r(\theta) = f(re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^\infty a_n r^n e^{in\theta} \quad (0 < r < 1)$$

とおくと, $f_r(\theta) \in L^1(\mathbb{T})$ $(0 < r < 1)$ である．ここで, $r \to 1^-$ としたときの極限を考える．数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ が緩増加ならば, 任意の $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{T})$ と $0 < r < 1$ に対して

$$\begin{aligned}
\langle \varphi, f_r \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\theta) f_r(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\theta) \sum_{n=0}^\infty a_n r^n e^{in\theta} \frac{d\theta}{2\pi} \\
&= \sum_{n=0}^\infty a_n r^n \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\theta) e^{in\theta} \frac{d\theta}{2\pi} \\
&= \sum_{n=0}^\infty a_n r^n \hat{\varphi}(-n)
\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで $\{a_n\}_{n\geq 0}$ が緩増加であるという仮定から, 最後の級数が絶対収束することに注意する．$\tau(n) = a_n$ とおき, 式の両辺において, $r \to 1^-$ とすると,

$$\lim_{r\to 1^-} \langle \varphi, f_r \rangle = \lim_{r\to 1^-} \sum_{n=0}^\infty a_n r^n \hat{\varphi}(-n) = \sum_{n=0}^\infty a_n \hat{\varphi}(-n) = \langle \varphi, \hat{\tau} \rangle$$

を得る．したがって

$$\lim_{r \to 1^-} f_r = \hat{\tau}$$

が成り立つ．ここで, 収束は $\mathcal{D}^*(\mathbb{T})$ における弱*収束の意味である．以上により緩増加数列 $\tau(n)$ の母関数 $f(z)$ の動径極限 (radial limit) と, τ の Fourier 変換 $\hat{\tau}$ を関連づけることができた．Fourier 変換 $\tau \to \hat{\tau}$ の一意性を考えると, 原理的には τ の母関数の境界挙動から τ の性質をすべて復元できると考えられる．具体的には以上の洞察と定理 1 を組み合わせると, 概収束に関する複素 Tauber 型定理が得られる．

定理を述べるために, まずは正則関数の超関数論的な境界挙動の概念を定義する．以下, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ (D 上の正則関数) とする．

定義 4.1 (開集合上の局所的な擬関数 (測度) 境界挙動)**.** $f(z)$ が $(\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta) \subseteq \partial\mathbb{D}$ において局所擬関数 (測度) 境界挙動をもつとは, ある $\hat{h} \in \mathcal{F}L_0^\infty(\mathbb{T})(\mathcal{F}L^\infty(\mathbb{T}))$ が存在して以下が成立することである．

$$\lim_{r \to 1^-} f(re^{i\theta}) = \hat{h} \ (\textit{weak* convergence in } \mathcal{D}^*(\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta)).$$

すなわち, 任意の $\varphi \in \mathcal{D}(\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta)$ に対して

$$\lim_{r \to 1^-} \langle \varphi, f(re^{i\theta}) \rangle = \langle \varphi, \hat{h} \rangle$$

が成立することである．

定義 4.2 (1 点における局所的な擬関数 (測度) 境界挙動)**.** $f(z)$ が $\theta_0 \in \partial\mathbb{D}$ において局所擬関数 (測度) 境界挙動をもつとは, θ_0 のある開近傍 $(\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta)$ が存在して, その上で $f(z)$ は局所擬関数 (測度) 境界挙動をもつことである．

調和解析の観点から複素 Tauber 型定理の理論を展開するために非常に重要になるのが数列の有界性を示す結果である．最近, Debruyne と Vindas により以下のような非常に一般的な結果が得られている ([3]).

定理 4.1 (Debruyne & Vindas, 2019)**.** 数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ は条件 $\inf_{n \geq 0}(a_{n+1} - a_n) > -\infty$ を満たすとする．$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ とし，もし $f(z)$ が $z = 1$ で局所擬測度境界挙動をもつならば, $\{a_n\}_{n \geq 0}$ は有界数列である．

定理 4.2 (Debruyne & Vindas, 2019)**.** 数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ は下に有界, すなわち, $\inf_{n \geq 0} a_n > -\infty$ とし，$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ とおく．もし $\frac{f(z)}{1-z}$ が $z = 1$ で局所擬測度境界挙動をもつならば, $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ は有界数列である．

次の定理は最も古い複素 Tauber 型定理である．一般にべき級数は収束円の内側で絶対収束するが, 収束円上における収束は一般に不明である．この定理はべき級数の収束円上で正則点においてはべき級数が (条件) 収束することを主張している．

定理 4.3 (Fatou, 1906)**.** $\{a_n\}_{n \geq 0}$ は $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ を満たす数列とし，$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ とする．もし $f(z)$ が $z = 1$ で正則ならば $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = f(1)$ が成り立つ．

この定理の応用として条件収束する級数の収束を示すことができる. 例えば

$$-\log(1-z) = \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^n}{n} + \cdots$$

は $\partial\mathbb{D} \setminus \{1\}$ で正則である. 実部と虚部に分けて書くと

$$\begin{aligned} -\log|1-e^{i\theta}| - i\arg(1-e^{i\theta}) &= \frac{e^{i\theta}}{1} + \frac{e^{2i\theta}}{2} + \cdots + \frac{e^{in\theta}}{n} + \cdots \\ &= \left(\frac{\sin\theta}{1} + \frac{\sin 2\theta}{2} + \cdots\right) + i\left(\frac{\cos\theta}{1} + \frac{\cos 2\theta}{2} + \cdots\right) \end{aligned}$$

である. したがって, 次の有名な公式を得る.

(1) (オイラー)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n} = \frac{\pi-\theta}{2} \ (\theta \in [0,2\pi),\ \theta \neq 0)$$

(2) (D. ベルヌーイ)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n} = -\frac{1}{2}\log 2(1-\cos\theta) \ (\theta \in [0,2\pi),\ \theta \neq 0)$$

定理 3.1 および定理 4.1 を用いると, この定理を一般化した次の結果を示すことができる.

定理 4.4 (Kunisada, 2024)**.** $\inf_{n\geq 0} a_n > -\infty$ とする. $\frac{f(z)-f(1)}{z-1}$ が $z=1$ で擬関数境界挙動をもつならば $\sum_{k=0}^{n} a_n \xrightarrow{ac} f(1)$ が成り立つ.

特に $f(z)$ が $z=1$ で正則ならば, $\frac{f(z)-f(1)}{z-1}$ が $z=1$ で擬関数境界挙動をもつから次が分かる.

系 3 (Kunisada, 2024)**.** $\inf_{n\geq 0} a_n > -\infty$ とする. $f(z)$ が $z=1$ で正則ならば $\sum_{k=0}^{n} a_n \xrightarrow{ac} f(1)$.

例えば級数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots = \frac{1}{1+z}$ は $z=1$ で正則である. 係数列の部分和のなす数列は $1,0,1,0,\ldots$ である. この例には Fatou の定理 4.3 は適用できないが, 一方でそれを一般化した定理 4.4 を適用することができて

$$\sum\nolimits_{k=0}^{n}(-1)^k \xrightarrow{ac} \frac{1}{2}.$$

を得る.

一般に任意の $N \geq 2$ に対して, Fatou の定理の N 次元版が成立する.

定理 4.5. $f(z_1,z_2) = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} z_1^m z_2^n$ を多重円板 $\mathbb{D}^2$ 上の正則関数とし, $\sup_{m,n}|a_{mn}| < \infty$ とする. このとき, $\frac{f(z_1,z_2)-\alpha}{(1-z_1)(1-z_2)}$ が擬関数境界挙動をもつならば $\sum_{m,n=1}^{N} a_{mn} \xrightarrow{ac} \alpha$ が成り立つ. ここで, $\sum_{m,n=1}^{N} a_{mn} \xrightarrow{ac} \alpha$ は $\mathbb{Z}^2$ における概収束を意味する.

参考文献

[1] C. Chow, *On topologically invariant means on a locally compact group*, Trans. Amer. Math. Sot. 151 (1970), 443-456.

[2] C. Chow, *Weakly almost periodic functions and almost convergent functions on a group*, Trans. Amer. Math. Sot. 206 (1975), 175-200.

[3] G. Debruyne and J. Vindas, *Complex Tauberian theorems for Laplace transforms with local pseudofunction boundary behavior*, J. Anal. Math. 138 (2019), 799-833.

[4] J. Korevaar, *Tauberian theory*, Springer, Berlin, 2004.

[5] R. Kunisada, *On Almost Convergence on Locally Compact Abelian Groups*, J Fourier Anal Appl 31, 5 (2025).

[6] G. G. Lorentz, *A contribution to the theory of divergent series*, Acta Math. 80 (1948), 167-190.

[7] 岡本清郷, フーリエ解析の展望, 朝倉書店 (1997).