Complex structure that admits complete Nevanlinna–Pick spaces of Hardy type

名古屋大学・多元数理科学研究科 荒神 健太
Kenta Kojin
Graduate School of Mathematics,
Nagoya University

2025 年 3 月 25 日

概要

本稿は著者の論文 [7] の紹介である．単位円盤 $\mathbb{D}$ 上の Hardy 空間 H^2 と同様に乗算代数 $\mathrm{Mult}(H_k)$ が有界正則関数環 $H^\infty(X)$ と等距離同型になるような, 被約複素空間 X 上で定義された正則関数のなす完全 Nevanlinna–Pick 空間の特徴付けを行う．

1 導入

本稿では [7] を紹介する．タイトルにある完全 Nevanlinna–Pick 空間という名称は有名な Nevanlinna–Pick 補間定理 [11, 12] に由来する．まずこの定理の主張を述べる．$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ を開単位円盤, $H^\infty(\mathbb{D})$ を $\mathbb{D}$ 上の有界正則関数全体の集合とする．

定理 1.1 (Nevanlinna–Pick 補間定理)**.** $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ 上の n 個の点 $z_1, \ldots, z_n$ と n 個の複素数 $w_1, \ldots, w_n$ が与えられた時, $\phi \in H^\infty(\mathbb{D})$ で $\|\phi\|_\infty \leq 1$ かつ $\phi(z_i) = w_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ を満たすものが存在するための必要十分条件は, $n \times n$ 行列

$$\left[\frac{1 - w_i \overline{w_j}}{1 - z_i \overline{z_j}}\right]_{i,j=1}^{n}$$

が半正定値になることである．

Graduate School of Mathematics, Nagoya University, Furocho, Chikusaku, Nagoya, 464-8602, Japan
E-mail adress:m20016y@math.nagoya-u.ac.jp

この結果は正則関数の挙動が半正定値行列で理解できることを示唆しており, 複素関数論だけでなく作用素論の立場からも興味深い. また, H^∞ 制御理論においても重要な役割を果たしたことはよく知られている. 1967 年, Sarason [14] は $H^\infty(\mathbb{D})$ が $\mathbb{D}$ 上の Hardy 空間 H^2 の乗算代数 $\mathrm{Mult}(H^2)$ と同一視できることを用いて, 定理 1.1 の作用素論的な証明を与えた. その後, Agler [1]*1 は Nevanlinna–Pick 型の補間定理が成り立つ再生核ヒルベルト空間を探し, Agler [1], McCullough [9, 10], Quiggin [13] によって, 行列値の Nevanlinna–Pick 補間定理が成り立つ再生核ヒルベルト空間の必要十分条件が与えられた. このような空間は完全 Nevanlinna–Pick 空間と呼ばれ, Hardy 空間や Dirichlet 空間が基本的な例である. さらに, Agler–McCarthy [2] は任意の既約完全 Nevanlinna–Pick 空間があるヒルベルト空間 $\mathcal{E}$ に対する Drury–Arveson 空間 $H^2_{\mathcal{E}}$ に埋め込めることを示した (定理 2.4). ここで, $H^2_{\mathcal{E}}$ はヒルベルト空間 $\mathcal{E}$ の開単位球 $\mathbb{B}_{\mathcal{E}}$ 上で定義された多変数の Hardy 空間である. Agler–McCarthy の結果以降, 多くの研究者が完全 Nevanlinna–Pick 空間に興味を持ち調べ始めた. 実際, Beurling の定理や inner-outer 分解など Hardy 空間論の様々な結果が完全 Nevanlinna–Pick 空間の設定に一般化できる. すなわち, 完全 Nevanlinna–Pick 空間は Hardy 空間の適切な一般化の一つである. 完全 Nevanlinna–Pick 空間論の標準的な教科書は [3] であり, サーベイ [6] では比較的最近の結果も紹介されている.

H^2 の場合と異なり, 複素多様体 X 上の正則関数のなす完全 Nevanlinna–Pick 空間 H_k の乗算代数 $(\mathrm{Mult}(H_k), \|\cdot\|_{\mathrm{Mult}(H_k)})$ と X 上の有界正則関数のなすバナッハ環 $(H^\infty(X), \|\cdot\|_\infty)$ は一般に集合として一致しない. また, 二つのノルム $\|\cdot\|_{\mathrm{Mult}(H_k)}$ と $\|\cdot\|_\infty$ は一般に比較できない. そこで H^2 と同様に, $\mathrm{Mult}(H_k) = H^\infty(X)$ かつ両者のノルムが一致するような正則関数のなす完全 Nevanlinna–Pick 空間を決定することは自然な問題である. 本稿ではこのような空間を Hardy 型と呼ぶ. [7] ではこの問題の完全な解答を得た. 実際, Hardy 型の完全 Nevanlinna–Pick 空間は本質的に Hardy 空間に限定され, このような空間が存在可能な複素多様体 (より一般に被約複素空間) は $\mathbb{D}$ から解析的容量が 0 の集合を除いた領域に限ることを示した.

2 完全 Nevalinna–Pick 空間

集合 X 上で定義された複素数値関数のなすヒルベルト空間 H_k が**再生核ヒルベルト空間**であるとは, 任意の点 $x \in X$ に対して, H_k のベクトル k_x が存在して

$$f(x) = \langle f, k_x \rangle \quad (f \in H_k)$$

*1 Agler はこのプレプリントで多重開円盤上の Nevanlinna–Pick 補間定理も証明しており (定理 1.1 を本稿の話題と独立な方向に一般化したと考える方が研究しやすい), そのアイディアは Schur–Agler クラスと呼ばれる関数族の理論で本質的である. この理論により, 任意の正則関数の局所的な挙動が半正定値行列で理解可能になる. 応用の一つとして, 岡の拡張定理や岡-Weil の多項式近似定理が容易に従う [4].

を満たすときのことをいう．この時, H_k の再生核 $k : X \times X \to \mathbb{C}$ を

$$k(x, y) = \langle k_y, k_x \rangle \quad (x, y \in X)$$

で定義する．再生核ヒルベルト空間 H_k は再生核 k によって決定される．再生核ヒルベルト空間 H_k が**既約**であるとは, 次の二つを満たすことをいう: (1) 異なる $x, y \in X$ に対し, k_x と k_y は一次独立, (2) 任意の $x, y \in X$ に対して $k(x, y) \neq 0$. 本稿では既約な再生核ヒルベルト空間のみを考える．

次に, 再生核ヒルベルト空間に作用する関数環を定義する．H_k を集合 X 上の再生核ヒルベルト空間とした時, その乗算代数 (multiplier algebra) を

$$\mathrm{Mult}(H_k) = \{\phi : X \to \mathbb{C} \mid \text{任意の } f \in H_k \text{ に対して, } \phi f \in H_k\}$$

で定義する．閉グラフ定理から, 任意の $\phi \in \mathrm{Mult}(H_k)$ は H_k 上の有界線形作用素 $M_\phi : f \mapsto \phi f$ を定める．そこで, $\|\phi\|_{\mathrm{Mult}(H_k)} = \|M_\phi\|_{B(H_k)}$ によって $\mathrm{Mult}(H_k)$ は作用素代数となる．なお, 任意の $\phi \in \mathrm{Mult}(H_k)$ に対して, $\|\phi\|_\infty \leq \|\phi\|_{\mathrm{Mult}(H_k)}$ が成り立つ．特に, 任意の乗算作用素は有界関数である．

再生核ヒルベルト空間の基本的かつ重要な例は $\mathbb{D}$ 上の **Hardy 空間**

$$H^2 = \left\{ f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}) \;\middle|\; \langle f, f \rangle_{H^2} := \sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 < \infty \right\}$$

である．ここで, $\mathcal{O}(\mathbb{D})$ は $\mathbb{D}$ 上の正則関数全体, $\hat{f}(n)$ は f の原点での n 次 Taylor 係数である．Hardy 空間 H^2 の再生核は Szegö 核

$$k^S(z, w) = \frac{1}{1 - z\overline{w}} \quad (z, w \in \mathbb{D})$$

である．また, $\mathrm{Mult}(H^2) = H^\infty(\mathbb{D})$ であり, 任意の $\phi \in \mathrm{Mult}(H^2)(= H^\infty(\mathbb{D}))$ に対して $\|\phi\|_{\mathrm{Mult}(H^2)} = \|\phi\|_\infty$ が成り立つ．H^2 は多数の良い性質を満たすことがよく知られているので, H^2 と同様の理論が成り立つ再生核ヒルベルト空間を探すことは自然であり, その答えの一つが完全 Nevanlinna–Pick 空間といえる．これは行列値の Nevanlinna–Pick 補間定理 (定理 1.1) が成り立つ再生核ヒルベルト空間である．

定義 2.1. H_k を集合 X 上の再生核ヒルベルト空間とする． H_k が**完全 Nevanlinna–Pick 空間**であるとは, 任意の $n, m \in \mathbb{N}$ 及び

$$[(I_{\mathbb{C}^m} - W_i W_j^*) k(x_i, x_j)]_{i,j=1}^n \tag{1}$$

が半正定値行列になるような $x_1 \ldots, x_n \in X$ と $m \times m$ 行列 $W_1, \ldots W_n$ に対して, $\Phi \in \mathbb{M}_m(\mathbb{C}) \otimes \mathrm{Mult}(H_k) (\subset B(\oplus_{l=1}^m H_k))$ で $\|\Phi\|_{B(\oplus_{l=1}^m H_k)} \leq 1$ かつ $\Phi(x_i) = W_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ を満たすものが常に存在するときをいう．

注意 2.2. $k(x, x) \neq 0$ $(x \in X)$ を満たす任意の再生核ヒルベルト空間 H_k に対して, 上で述べたような補間関数 $\Phi \in \mathbb{M}_m(\mathbb{C}) \otimes \mathrm{Mult}(H_k)$ が存在するならば, 行列 (1) は自動的に半正定値になる [3, Theorem 5.2].

例 2.3. $t \in \mathbb{R}$ に対し, $\mathbb{D}$ 上の再生核 k_t を

$$k_t(z,w) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^t z^n \overline{w}^n \quad (z, w \in \mathbb{D})$$

で定義する．すると, $\mathbb{D}$ 上の正則関数がなす再生核ヒルベルト空間の族 $\{H_{k_t}\}_{t \in \mathbb{R}}$ を得る．特に, $H_{k_{-1}}$ は Dirichlet 空間, H_{k_0} は Hardy 空間, H_{k_1} は Bergman 空間である．H_{k_t} が完全 Nevanlinna–Pick 空間になるための必要十分条件は $t \leq 0$ である．また, $\mathrm{Mult}(H_{k_t}) = H^{\infty}(\mathbb{D})$ かつ $\| \cdot \|_{\mathrm{Mult}(H_{k_t})} = \| \cdot \|_{\infty}$ が成り立つ必要十分条件は $t \geq 0$ である．

ある $x_0 \in X$ に対して $k(x, x_0) = 1$ $(x \in X)$ が成り立つとき再生核ヒルベルト空間 H_k は $x_0 \in X$ で**正規化**されているという．任意の既約再生核ヒルベルト空間はある点で正規化されていると仮定して一般性を失わない [3, Section 2.6]．完全 Nevanlinna–Pick 空間について, 次の特徴付けが知られている．

定理 2.4 (Agler–McCarthy [2])**.** 集合 X 上の既約再生核ヒルベルト空間 H_k で, $x_0 \in X$ で正規化されたものを考える．この時, 以下は同値である:

(1) H_k は完全 Nevanlinna–Pick 空間である．

(2) $1 - \dfrac{1}{k(x,y)}$ $(x, y \in X)$ は再生核である．

(3) ヒルベルト空間 $\mathcal{E}$ と, 単射 $b : X \mapsto \mathbb{B}_{\mathcal{E}} := \{z \in \mathcal{E} \mid \|z\|_{\mathcal{E}} < 1\}$ が存在して, $b(x_0) = 0$ かつ

$$k(x,y) = \frac{1}{1 - \langle b(x), b(y) \rangle_{\mathcal{E}}} \quad (x, y \in X)$$

が成り立つ．なお, $\mathcal{E}$ は再生核 $1 - \dfrac{1}{k(x,y)}$ $(x, y \in X)$ から構成される再生核ヒルベルト空間である．

特に, H^2 は完全 Nevanlinna–Pick 空間である．また, 完全 Nevanlinna–Pick 空間の再生核の形は Hardy 空間の再生核

$$k^S(z,w) = \frac{1}{1 - z\overline{w}} \quad (z, w \in \mathbb{D})$$

と類似していることがわかる．この事実から, 完全 Nevanlinna–Pick 空間は Hardy 空間と同様の性質を多数満たすことが明らかになっており, 現在もよく研究されている [3, 6]．定理 2.4 の条件 (2) は Hardy 空間論の本質の一つが関数 $1 - \dfrac{1}{k}$ の半正定値性であることを示唆しているため, やはり正定値性に基づく複素関数論と作用素論の密接な関係が伺える．

3 主結果

この章では, 被約複素空間 X 上の正則関数のなす完全 Nevanlinna–Pick 空間を考察する ([7] ではより一般の設定も扱っている)．被約複素空間とは複素多様体の一般

化で, 正則関数が定義できる幾何的対象である. まず, その定義を述べよう. $U \subset \mathbb{C}^n$ を開集合とする. 部分集合 $V \subset U$ が**解析的集合**であるとは, 任意の $z \in U$ に対して, z の開近傍 $U_z \subset \mathbb{C}^n$ と U_z 上の正則関数 $f_1, \dots, f_m$ が存在して,

$$V \cap U_z = \{\zeta \in U_z \mid f_1(\zeta) = \cdots = f_m(\zeta) = 0\}$$

が成り立つときをいう. 解析的集合 V 上の関数 $f : V \to \mathbb{C}$ が**正則**であるとは, 任意の $z \in V$ に対して z の開近傍 $U_z \subset \mathbb{C}^n$ と $F_z(\zeta) = f(\zeta)$ $(\zeta \in V \cap U_z)$ を満たす U_z 上の正則関数 F_z が存在するときをいう. V, W をそれぞれ開集合 $U_V \subset \mathbb{C}^n$ と $U_W \subset \mathbb{C}^m$ 内の解析的集合とする. $F = (f_1, \dots, f_m) : V \to W$ の各 f_i が正則関数のとき, F を**正則写像**と呼ぶ. 正則写像 $F : V \to W$ が正則な逆写像を持つとき, F は**双正則写像**と呼ばれる.

定義 3.1. 第二可算なハウスドルフ空間 X が**被約複素空間**であるとは, X の開被覆 $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ と開集合 $U_\alpha \subset \mathbb{C}^{n_\alpha}$ の解析的集合 V_α 及び同相写像 $\varphi_\alpha : X_\alpha \to V_\alpha$ が存在して, $X_\alpha \cap X_\beta \neq \varnothing$ となる $\alpha, \beta \in A$ に対して $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(X_\alpha \cap X_\beta) \to \varphi_\beta(X_\alpha \cap X_\beta)$ が双正則であるときをいう.

被約複素空間 X 上の関数 $f : X \to \mathbb{C}$ が**正則**であるとは, 任意のチャート $\varphi_\alpha : X_\alpha \to V_\alpha$ に対して $f|_{X_\alpha} \circ \varphi_\alpha^{-1} : V_\alpha \to \mathbb{C}$ が正則であるときをいう.

例 3.2. (1) 任意の (第二可算) 複素多様体は被約複素空間である.

(2) $\mathbb{C}^n$ の開集合内の解析的集合は被約複素空間である. 特に, Neil パラボラ

$$\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid z^2 - w^3 = 0\}$$

は被約複素空間だが複素多様体ではない. 実際, 原点 $(0, 0)$ が特異点である (尖っている).

完全 Nevanlinna–Pick 空間は Hardy 空間と同じ性質を数多く持つ. 実際, Hardy 空間に対する様々な結果に現れる $H^\infty(\mathbb{D})$ を $\mathrm{Mult}(H_k)$ に置き換えれば良い. もちろん全ての結果が完全 Nevanlinna–Pick 空間に一般化できるわけではない. 例えば, Carleson のコロナ定理は反例が知られている. H^2 の場合と異なり, $\mathrm{Mult}(H_k)$ と有界正則関数環 $H^\infty(X)$ は一般に一致しない. また, $\|\cdot\|_{\mathrm{Mult}(H_k)}$ と $\|\cdot\|_\infty$ は一般に比較できない. そこで H^2 と同様に, $\mathrm{Mult}(H_k) = H^\infty(X)$ かつ両者のノルムが一致するような正則関数のなす完全 Nevanlinna–Pick 空間を決定することは自然な問題である. 本稿ではこのような空間を **Hardy 型**と言う. この問題に関して, Agler–McCarthy [3] と Hartz [5] はそれぞれ, $d \geq 2$ の時, $\mathbb{B}_{\mathbb{C}^d}$ と $\mathbb{D}^d$ 上には Hardy 型の完全 Nevanlinna–Pick 空間が存在しないことを示した. [7] では彼らの結果を一般化し, 上述の問題の完全な解答を得た.

定理 3.3 ([7])**.** *X を被約複素空間とする. この時, $x_0 \in X$ で正規化された Hardy 型の完全 Nevanlinna–Pick 空間 H_k が X 上に存在するための必要十分条件は, $\mathbb{D}$ 内の閉集合 E と双正則写像 $j : X \to \mathbb{D} \setminus E$ が存在して, 以下を満たすことである:*

(1)$j(x_0) = 0$,

(2)$\mathbb{D} \setminus E$ は連結,

(3)E の解析的容量 (analytic capacity) は 0.
さらに, このような空間 H_k は X 上で一意に定まり, その再生核は

$$k(x, y) = \frac{1}{1 - j(x)\overline{j(y)}} \quad (x, y \in X)$$

で与えられ,

$$U : H^2 \to H_k, \quad f \mapsto f \circ j$$

はユニタリー作用素になる.

ゆえに, 考察していた問題の答えとして, Hardy 型の完全 Nevanlinna–Pick 空間は本質的に Hardy 空間しか存在しないことがわかる. また, 作用素論的仮定から X の幾何構造を決定したことは興味深い点である. コンパクト集合 E の解析的容量が 0 であることは E が Painlevé null set, 即ち E が有界正則関数の除去可能集合であることと同値である. よって, 定理 3.3 は Painlevé 問題の作用素論的視点を示唆しており, ここでも複素関数論と作用素論の密接な関係が感じられる.

系 3.4. X が $\dim X \geq 2$ を満たす複素多様体または特異点を持つ解析的集合ならば, Hardy 型の完全 Nevanlinna–Pick 空間は X 上に存在しない.

本稿では正則関数のなす完全 Nevanlinna–Pick 空間を考察したが, 正則性を仮定しないより一般の設定でも定理 3.3 の様な Hardy 空間の一意性を示すことができる [8].

参考文献

[1] J. Agler, Some interpolation theorems of Nevanlinna–Pick type, preprint, 1988.

[2] J. Agler and J. E. McCarthy, Complete Nevanlinna–Pick kernels, *J. Funct. Anal.*, **175**(1), 111-124, 2000.

[3] J. Agler and J. E. McCarthy, *Pick interpolation and Hilbert Function Spaces*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 44, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[4] J. Agler and J. E. McCarthy, Operator theory and the Oka extension theorem, *Hiroshima Math. J.*, **45**(1), 9-34, 2015.

[5] M. Hartz, On the isomorphism problem for multiplier algebras of Nevanlinna–Pick spaces, *Canad. J. Math.*, **69**(1), 54-106, 2017.

[6] M. Hartz, An invitation to the Drury–Arveson space, *Lectures on analytic function spaces and their applications, Fields Inst. Monogr.*, vol. 39, Springer, Cham, pp. 347-413, 2023.

[7] K. Kojin, Complex structure that admits complete Nevanlinna–Pick spaces of Hardy type, *International Mathematics Research Notices*, **2024**(22), 13840-13854, 2024.

[8] K. Kojin, Isometric Gelfand transforms of complete Nevanlinna–Pick spaces, preprint, `https://arxiv.org/abs/2502.06240`.

[9] S. McCullough, Carathéodory interpolation kernels, *Integral Equations Operator Theory*, **15**(1), 43-71, 1992.

[10] S. McCullough, the local de Branges-Rovnyak construction and complete Nevanlinna–Pick kernels, *Algebraic methods in operator theory*, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 15-24, 1994.

[11] R. Nevanlinna, Über beschränkte Funktionen, die in gegebenen Punkten vorgeschrieben Werte annehmen, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A*, **13**(1), 1919.

[12] G. Pick, Über die Beschränkungen analytischer Funktion, welche durch vorgegebene Funktionswerte bewirkt werden, *Math. Ann.*, **77**, 7-23, 1916.

[13] P. Quiggin, For which reproducing kernel Hilbert spaces is Pick's theorem true?, *Integral Equations Operator Theory*, **16**(2), 244-266, 1993.

[14] D. Sarason, Generalized interpolation in H^∞, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **127**, 179-203, 1967.