A. Connes の非可換リーマン幾何学による素粒子理論の標準模型の再構成

原田雅樹（関西学院大学）

1. 序

19 世紀半ば、Riemann 面が導入され、次いで Riemann-Roch の定理が見出されることによって、代数関数の集合と幾何学的〈面〉の関係が次第に明らかにされる。それは、関数のなす集合の持つ代数構造そのものによって幾何学的空間を捉えるという現代数学の考え方の出発点と言ってもよい。そして、その考え方の到達点の一つが、Riemann-Roch の定理の拡張としての Atiyah-Singer の指数定理である。さらにこの見方を推し進めて、通常の多様体としての幾何学的空間(古典的幾何学的空間)がなくなるところまで行ってしまうのが、1980 年頃に始められた A. Connes の非可換幾何学のプロジェクトであると言ってもよい。

非可換幾何学の幾何学性は、点集合に位相そして多様体という構造を入れた幾何学的空間によるものではない。非可換幾何学の幾何学性は、幾何学的空間の双対としての関数空間の代数構造の拡大によるものである。可換から非可換へと拡大された代数構造に対応する古典的幾何学的空間は失われてしまうのであるが、そこにその古典的幾何学的空間とのアナロジカルな関係は残る。また、非可換幾何学は数論を含む様々な数学領域、さらには場の量子論についての数理物理学に対して統一性を与えることを狙うものでもある。

位相幾何学的 K 理論は、ベクトル束に同値類を入れ、その間の「差」として考えられる。非可換微分幾何学にとって解析的には、C*環の K 理論が重要になる。すなわち、ベクトル束が可換 C*環上の有限生成の射影加群と同値になることを考慮して、その加群の射影（冪等）作用素に同値類を入れ、その間の「差」としての K 理論を考え、その可換性という条件を外した C*環の K 理論を考えるのである。他方、代数的に重要なものとして、微分的位相幾何学の空間上で定義された関数空間に対して適用される de Rham cohomology の代数構造を抽象して、Connes は cyclic cohomology を導入する。境界のない多様体X上で定義された可換環$\mathcal{A}$を考えると、X上の de Rham cohomology はX上で定義された環$\mathcal{A} = C^{\infty}(X)$の cyclic cohomology と同型になっていることが分かる。ここで、可換な環が乗っている幾何学的空間を忘れ、可換性という条件を外す。すなわち、環$\mathcal{A}$を可換環に制限しないで、非可換環にまで広げ、その cyclic cohomology を考える。そこでは、環の背後に措定されていた幾何学的な多様体というものは存在しない。しかし、Connes は、古典的幾何学の対象やそれについての定理に対応する、様々な対象や定理を、可換なものに制限されない環$\mathcal{A}$から獲得し、それらが適用されるいわばヴァーチャルな場を非可換幾何学、ここでは特に非可換微分幾何学と名付けるのである。

ゲージ理論に基づいた場の理論において、空間の局所的性格を顕わにする微分幾何学が重要な役割を果たしている。しかし、場の量子論では、Feynman の経路積分や繰り込み理論

など、未だ数学的に厳密に基礎付けられていない方法がそこに統合されつつゲージ理論が量子化されている。そこで、非可換微分幾何学に計量を入れることによって、すなわち量子化されたないし非可換化された Riemann 幾何学を構成することによって、場の量子論を再構成しようという試みが Connes らによってなされている。そこでは、Connes の三つ組み、すなわち「Hilbert 空間」、「代数（作用素環）」、この「代数」に作用する一般化され、Fredholm 加群から構成される非有界な「Dirac 作用素」が導入される。そして、可換微分幾何学において計量テンソルによって定義される〈無限小距離〉が、非可換微分幾何学ではこの一般化された「Dirac 作用素」の逆元である伝播函数 propagator として、〈有限距離〉は二つの純粋状態の差として、また、〈微分〉演算は「Dirac 作用素」との交換関係によって定義される。Riemann は「幾何学についての基礎をなす仮説について」（Riemann [1854]）の中で、連続空間と離散空間について述べている。Connes は、素粒子理論の標準模型を考える際に、スピン構造を持つ通常の連続的な空間（Euclid 空間）と 2〈点〉からなる離散空間（左巻きのカイラリティと右巻きのカイラリティ空間）の直積空間を考える。離散空間について、Dirac 作用素が質量行列ないし質量を生み出す結合定数によって構成される。そして、幾何学的計量が、ア・プリオリに与えられるのではなく、質量ないし結合定数から構成される Dirac 作用素を通して与えられるという点も興味深い。

以上のように、非常に広い射程をもった Connes の非可換幾何学であるが、本論考は、彼の著作 *Noncommutative Geometry*（Connes [1994]）の第 6 章に展開されている非可換微分幾何学に計量を入れた非可換 Riemann 幾何学による素粒子理論の標準模型の再構成のうち、電弱相互作用$U(1)\times SU(2)$のモデルと Higgs 場の自発的対称性の破れに関わる部分の理解を試みることである。哲学研究を生業としている筆者は、これまで 2023 年に「Atiyah-Singer の指数定理とその非可換化」（原田[2023]）を、2024 年 4 月に『量子と非可換のエピステモロジー』（原田[2024]）を執筆し、Connes の非可換幾何学から哲学的意味あいを引きだそうとしてきた。本論考を、原田[2023]の続編として、また、原田[2024]の Appendix の一つとして読んでいただけると幸いである。

2.　Connes の非可換幾何学の基本的考え方

空間を何か実体そのものとして直接的に把握するのではなく、その上の関数の集合の代数構造を通して把握しようとするのは、現代数学にとって本質的なことである。そこには、空間と代数の間に双対的な関係があるのである。例えば、19 世紀半ば以後の代数幾何学においてはコンパクトな Riemann 面から代数関数体へ、Grothendieck 以後の代数幾何学においては affine schemes から可換環へと、反変関手によって圏同値に移されるのである。作用素環論においては、Gelfand-Naimark の定理によって、ルベーグ可測空間は可換 von Neumann 環へ、局所コンパクトなハウスドルフ位相空間は可換 C*環へと反変関手によって圏同値に移される。この時、包含関係は

局所コンパクトなハウスドルフ位相空間 ⊂ ルベーグ可測空間

可換 C*環（ノルム位相閉） ⊃ 可換 von Neumann 環（強位相閉）

のように、空間と代数とで逆になっている。さらに、反変関手によって、$C^{\infty}(X)$へと圏同値に移される可微分多様体、解析的正則関数空間へと移される複素多様体がある。これらの関数環を非可換化したようなものがあるならば、それに対応する非可換化された作用素環はC*環にノルム位相で稠密に入っていて、位相的に閉じていない部分環であると考えられる。また、Serre-Swan の定理により、可換 C*環上の有限生成される射影加群は位相空間上のベクトル束に同値であることも分かっているので、それを拡張して非可換 C*環上の有限生成される射影加群を非可換位相空間上のベクトル束として見ようとするのである。すなわち、非可換可微分多様体とその上のベクトル束を考えるとは、C*環にノルム位相で稠密に入っている、位相的に閉じていない作用素環と、その環上の有限生成される射影加群を考えるということである（Khalkhali [2013] 1.3-1.5, pp. 24-29）。

Connes の非可換幾何学についての考え方を理解するために、古典的で可換な世界と量子的で非可換な世界において、数学的対象にどのような対応があるのかを見ることが必要である。そのために、コンヌが与えている対応表を示しておく（表 1）。

古典（可換）	**量子（非可換）**
複素変数	ヒルベルト空間上の作用素
実変数	ヒルベルト空間上の自己共役作用素
無限小	ヒルベルト空間上のコンパクト作用素
オーダー α の無限小	固有値μ_nが$n\to\infty$の時に$\mu_n = O(n^{-\alpha})$となるようなコンパクト作用素
実変数ないし複素変数による微分	F をフレドホルム加群として $df=[F,f]=Ff-fF$
オーダー1 の無限小の積分	対数のファクターで発散を抑えたトレース（Dixmier trace）

（表 1）

(Connes [1994] Introduction, p.20)

（表 1）の対応関係は、物理学の数学的表現に由来する古典的世界と量子的世界のアナロジカルな対応と言えるかもしれないが、幾何学的空間に双対的に対応する作用素代数を可換から非可換へと拡大することに基づくものである。ただし、非可換な作用素代数に対応する幾何学的〈空間〉は、点集合から出発して、位相空間、多様体へと構造を付加していって構成されるような幾何学的空間とは異なるものであり、あくまでも作用素代数に双対的に対応すると考えられるヴァーチャルな空間に過ぎない。可換な C*環は位相空間と圏同値であるが、C*環を非可換化すると、それと圏同値であるような位相空間は存在しなくなる。そ

の意味で、非可換幾何学は典型的な幾何学ではなく、アナロジカルな意味においてのみ幾何学でありうるのかもしれない（原田 [2024], p. 245）。

3.　非可換微分幾何学

Connes の非可換微分幾何学において、無限小変数の役割をヒルベルト空間$\mathcal{H}$上のコンパクト作用素 T が果たすことになるが、T の集合$\mathcal{K}$は$\mathcal{H}$上の有界作用素全体が作る環の非自明な両側極大イデアルとなっている。$\mathcal{H}$上の作用素 Tがコンパクトであるとは、任意の$\varepsilon > 0$に対して$\mathcal{H}$の有限次元の部分空間を除いて、Tのサイズがεより小さくなることである。正確に言えば、$n \in \mathbb{N}$、作用素のランクをその値域の次元、

$$\mu_n(T) = \inf\{\|T - R\|; R\text{はランク}n\text{以下の作用素}\}$$

として$n \to \infty$の時、$\mu_n(T) \to 0$となるような作用素がコンパクト作用素である。ここで$\mu_n(T)$はTの絶対値$|T| = (T^*T)^{1/2}$の固有値（実数値をとる）に他ならない（ただしT^*はTの共役作用素を意味する）。$|T|$は自己共役作用素になるので、$\mu_n(T)$は実数値をとる。

Connes は複素数上の対合環$\mathcal{A}$上の奇数次元のフレドホルム加群 F を、1) 可分 Hilbert 空間$\mathcal{H}$における$\mathcal{A}$の対合表現π、2) 全ての $a \in \mathcal{A}$に対して交換関係$[F, \pi(a)]$ がコンパクト作用素になり、$F = F^*$, $F^2 = \hat{1}$ （単位行列）を満たすものとして定義し、$(\mathcal{H}, F)$と書く。偶数次元のフレドホルム加群については、奇数次元の$(\mathcal{H}, F)$の条件に加え、γ_5という$\mathbb{Z}/2$ の次数付け作用素を考える。通常、この次数付け作用素は$\gamma_5 = \begin{bmatrix} \hat{1}_n & 0 \\ 0 & -\hat{1}_n \end{bmatrix}$ という行列で表現され、$\gamma_5 : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$は有界かつ自己共役で$(\gamma_5)^2 = \hat{1}_{2n}$を満たすものである。ただし、ここで$\hat{1}_n$は$n \times n$の単位行列である。そして、その Hilbert 空間は

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^+ \oplus \mathcal{H}^-$$

と直和分解され、全ての $a \in \mathcal{A}$に対して$\pi(a)$をγ_5との交換関係について$\gamma_5\pi(a) = \pi(a)\gamma_5$となり、 $\pi^\pm(a)$を$\mathcal{H}^\pm$上の表現として、

$$\pi(a) = \pi^+(a) \oplus \pi^-(a) = \begin{bmatrix} \pi^+(a) & 0 \\ 0 & \pi^-(a) \end{bmatrix}$$

と直和分解される。また、Fはγ_5との交換関係について$\gamma_5 F = -F\gamma_5$となり、$P : \mathcal{H}^+ \longrightarrow \mathcal{H}^-$、$P^* : \mathcal{H}^- \longrightarrow \mathcal{H}^+$と作用する作用素 Pを用いて

$$F = \begin{bmatrix} 0 & P^* \\ P & 0 \end{bmatrix}$$

として表現される。

G. Kasparov は Fredholm 加群を C*環という位相的に閉である環の上に定義する [1]。非可

[1] Kasprov は、Fの性格付けを、コンパクト作用素を法として$(F^2 - 1)\rho(a) \sim 0$, $(F - F^\dagger)\rho(a) \sim 0$, $F\rho(a) \sim \rho(a)F$と定義している（Higson, Roe [2000] Chapter 8）。

換微分幾何学の構成を目指す Connes は、環を位相的に閉であるものよりも広く考える。すなわち、その環は必ずしも位相的に閉である必要はない。位相空間 X 上の連続関数環の稠密な部分環である滑らかな関数環$C^\infty(X)$のようなものに対する非可換化の文脈の中で Fredholm 加群を構成できるようにしておくために、Connes は C*環の稠密な部分環についても環の元の集合が位相的に閉じていない環まで広げて考えるのである（Connes［1994］IV; Khalkhali [2013] 4. 2; 原田［2024] Appendix P）。

Connes は非可換微分幾何学における微分を Fredholm 加群との交換関係によって定義する。すなわち、$\pi(a)$の微分を

$$\mathrm{d}\pi(a) = [F, \pi(a)]$$

として定義する。この時、F が Fredholm 加群であることから、$[F, \pi(a)]$はコンパクト作用素となっていることを確認しておく。

すると、$\mathcal{A}$上の cyclic n-cocycle になっている n 形式$\Omega^n\mathcal{A}$上の次数付された閉 trace

$$\tau^n(a_0, a_1, \dots, a_n) = \int a_0 \mathrm{d}a_1 \mathrm{d}a_2 \cdots \mathrm{d}a_n$$

を、$a_j \in \mathcal{A}$として$n = 2m + 1$の場合には、

$$\tau^n(a_0, a_1, \dots, a_n) = \mathrm{Tr}(a_0[F, a_1] \cdots [F, a_n])$$

$n = 2m$の場合には

$$\tau^n(a_0, a_1, \dots, a_n) = \mathrm{Tr}(\gamma_5 a_0[F, a_1] \cdots [F, a_n]) \tag{3.1}$$

と書き直すことができる [2]。ただし、ここでは$\pi(a)$を単にaと書いている。ここで問題となるのは、trace である Tr の作用を適切に定めることである。ただし、ここで trace であるとは、$\mathrm{Tr}(a_0 a_1) = \mathrm{Tr}(a_1 a_0)$を満たし、複素数を値に取る線形汎関数のことである。特に$\mu_n(T)$を Tの絶対値$|T| = (T^*T)^{1/2}$の固有値として、$\mathrm{Trace}(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(T)$とする（Connes [1994] IV; 原田［2023] 6.4.5)。

4. 非可換リーマン幾何学

a) 計量と距離

さて、可微分多様体 X 上の 2 点 p と q を考えると、それを結ぶ経路$\gamma_{p\to q}$の長さは、計量テンソルを$g_{\mu\nu}$、無限小距離を$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^* g_{\mu\nu} \mathrm{d}x}$として、$\gamma_{p\to q}$に沿った積分$\int_p^q \mathrm{d}s$となる。$p$ と q を固定して$\gamma_{p\to q}$を変化させ、その最小値がpとqの間の距離$\delta(p, q)$である。それはまた、X上の可微分な関数の集合を$\mathcal{A}$として、

$$\delta(p, q) = \sup\{|f(p) - f(q)|; f \in \mathcal{A}, \|df/ds\| \leq 1\}$$

[2] cyclic n-cocycle は cyclic cohomology に関連する概念であるが、これについては Appendix A を参照。

とも書ける。これを量子化すると、Dを一般化された Dirac 作用素として、

$$\delta(p,q)=\sup\{|f(p)-f(q)|; f\in\mathcal{A}, \|[D,f]\|\leq 1\}$$

をえる。ここで、点 p と q は、作用素環$\mathcal{A}$に対する正の線形汎関数、すなわち状態（state ないし weight）のうち、純粋状態と呼ばれるものと解することができる。すなわち、2〈点〉間の有限距離は 2 つの純粋状態φとψの間の〈距離〉$d(\varphi,\psi)$として解することができて、

$$d(\varphi,\psi)=\sup\{|\varphi(a)-\psi(a)|; a\in\mathcal{A}, \|[D,a]\|\leq 1\}$$

と書ける。また、この時、無限小距離$\mathrm{d}s$は、Dirac 作用素の逆である伝播函数 propagator D^{-1}として表現される。また、微分演算$\mathrm{d}a/\mathrm{d}s$は、$[D,a]$によって置き換えられる。

Connes は、非可換可微分多様体に計量を入れた非可換 Riemann 幾何学において、$(\mathcal{A},\mathcal{H},D)$というスペクトル三つ組み spectral triple を導入する。ここで、$\mathcal{H}$は Hilbert 空間、$\mathcal{A}$は$\mathcal{H}$上で表現された可換 von Neumann 環、Dirac 作用素Dは、$\mathcal{H}$上の非有界な自己共役作用素であり、すべての$a\in\mathcal{A}$に対して$[D,a]$が有界になり、また、すべての$\lambda\notin\mathbb{R}$に対して$(D-\lambda)^{-1}$がコンパクトになるようなものである。なお、Dirac 作用素は、極分解によって、Fredholm 加群 Fを用いて、$D=F|D|, F=\mathrm{Sign}\,D$と書くことができる。そこでスペクトル三つ組み$(\mathcal{A},\mathcal{H},D)$の積分を考えることにしよう。$d$次元多様体$X$における関数$f$の体積形式は、局所座標を$x^\mu$、計量テンソルを$g_{\mu\nu}$とし、

$$\mathrm{d}v=\left(\det\left(g_{\mu\nu}\right)\right)^{\frac{1}{2}}\left|\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^d\right|$$

として

$$f\longmapsto\int_X f\mathrm{d}v$$

で与えられる。$(\mathcal{A},\mathcal{H},D)$におけるこの積分は、Dixmier trace Tr_ωを用いて、$f\in\mathcal{A}$として

$$\int_X f\mathrm{d}v=c(d)\mathrm{Tr}_\omega(f|D|^{-d})$$

と定義することができる [3]。ただし、ここで$c(d)=2^{(d-[d/2])}\pi^{n/2}\Gamma(\frac{d}{2}+1)$である。ただし、有限次元部分空間$\mathrm{Ker}\,D$においては、$D^{-1}=0$とすることにする（Connes [1994] VI. 1)。

対合*を持つ代数$\mathcal{A}$上の K-cycle $(\mathcal{H},D)$とは、Hilbert 空間上の$\mathcal{A}$の*表現とそれに作用する Dirac 作用素Dの組のことである。そして、$|D|$の固有値λ_nが$n\to\infty$に対して$n^{1/d}$のオーダーとなる時、この K-cycle は(d,∞)-summable と言われる。スピン構造を持つコンパクトな Riemann 多様体上の関数の代数において、Dirac 作用素は、$d=\dim X$として、(d,∞)-summable な K-cycle を規定する（Connes [1994] VI. 1, Definition 2)。

b） Yang-Mills 作用

ゲージ理論を考えよう。以下、代数$\mathcal{A}$は常に単位元を持ち、単位元は Hilbert 空間に対し

[3] Dixmier trace については、Appendix B を参照。

て恒等作用素として作用するものとする。そして、Connes は、Hilbert 空間$\mathcal{H}$上の作用素環$\mathcal{A}$についての k 形式を、$a_i^j \in \mathcal{A}$として

$$\omega = \sum_j a_j^0 [D, a_j^1] \cdots [D, a_j^k]$$

と定義する。そして、このωには、$D = F|D|$の関係を通して、(3.1)のような cyclic n-cocycle の構造が入っていることを思い起こしておこう。また、$\mathcal{A}$に属するユニタリー群$\mathcal{U}$を

$$\mathcal{U} = \{u \in \mathcal{A}; u^* u = u u^* = 1\}$$

とし、1 形式の自己共役作用素$\omega_u = u[D, u^*]$により、Dirac 作用素Dは

$$u D u^* = D + \omega_u$$

と変換する。このような条件のもとで、ベクトル・ポテンシャル V は、1 形式の作用素$\sum_j a_0^j [D, a_1^j]$のはる空間の自己共役作用素の元として定義される（Connes [1994] VI. 1, Definition 3)。多様体 X上の 1 形式ωは、スピン構造を考慮することで、Hilbert 空間に表現される Clifford 代数$\gamma(\omega)$となる。Clifford 代数において、$\gamma(\omega)^2$が負の実数となることを考慮して、自己共役作用素であるベクトル・ポテンシャルは、

$$V = i^{-1} \gamma(\omega)$$

と書くことができる。また、そのゲージ変換は、ユニタリー作用素の元uを用いて

$$\gamma_u(V) = u[D, u^*] + u V u^*$$

とすることができる。さらに、ベクトル・ポテンシャル Vによる接続$\nabla = \mathrm{d} + V$による場の強さ、ないし曲率$\theta = \mathrm{d}V + V^2$の Yang-Mills 作用が

$$\mathrm{YM}(V) = \mathrm{Tr}_\omega(\theta^2 |D|^{-d})$$

の形で与えられ、また、$V = \sum_j a_j^0 [D, a_j^1]$ならば、素朴に$\mathrm{d}V$を$\sum_j [D, a_j^0][D, a_j^1]$と置き換えることができるようなベクトル・ポテンシャルの表現を Connes は考える。しかし、それは一意的には置き換えることはできない。

そこで、そのような表現が一意的に定まるような表現を考えよう。$\mathcal{A}$上の次数付き被約普遍的微分代数$\Omega^* \mathcal{A}$を考える。すなわちシンボルdについて$\mathcal{A}$自身は 0 階の代数、$a, b \in \mathcal{A}$として$\mathrm{d}a$を 1 階の代数として、

1） $\mathrm{d}(ab) = (\mathrm{d}a)b + a(\mathrm{d}b)$

2） $\mathrm{d}\,1 = 0$

を満たす次数付き代数を考える。また、対合*については、Ω^*上に

$$(\mathrm{d}a)^* = -\mathrm{d}a^*$$

と作用すると定義する。さらに、

$$\mathrm{d}(a^0 \mathrm{d}a^1 \cdots \mathrm{d}a^n) = \mathrm{d}a^0 \mathrm{d}a^1 \cdots \mathrm{d}a^n$$

に定義し、

$$\mathrm{d}^2 \omega = 0 \quad \forall \omega \in \Omega^* \mathcal{A}$$

$$\mathrm{d}(\omega_1 \omega_2) = (\mathrm{d}\omega_1)\omega_2 + (-1)^{\partial \omega_1} \omega_1 \mathrm{d}\omega_2 \quad \forall \omega_j \in \Omega^* \mathcal{A}$$

という関係を満たすとする。このように定義すると、次のような命題が成立する（Connes

[1994] VI. 1, Proposition 4)。

1) 等式

$$\pi(a^0\mathrm{d}a^1\cdots\mathrm{d}a^n)=a^0[D,a^1]\cdots[D,a^n]$$

が$\mathcal{H}$上の被約普遍的代数$\Omega^*\mathcal{A}$の対合表現πとなる。

2) $J_0=\ker\pi\subset\Omega^*$を、$J_0^k=\{\omega\in\Omega^k;\pi(\omega)=0\}$で与えられる$\Omega^*$の次数付き両側イデアルとする。すると、$J=J_0+\mathrm{d}J_0$は、$\Omega^*\mathcal{A}$の両側イデアルとなる。

ここで、$\pi(\omega)=0$であっても、$\pi(\mathrm{d}\omega)=0$と必ずしもならない、すなわち$\sum_j a_0^j[D,a_1^j]=0$であっても、$\sum_j[D,a_0^j][D,a_1^j]$が 0 とは限らないことが、$V=\sum_j a_0^j[D,a_1^j]$に対して、$\mathrm{d}V$を$\sum_j[D,a_0^j][D,a_1^j]$と一意的に定めることができない理由である。そこで、

$$\Omega_D^*=\Omega^*(\mathcal{A})/J$$

を導入すると、

$$\Omega_D^k\cong\pi(\Omega^k)/\pi(\mathrm{d}(J_0\cap\Omega^{k-1}))$$

という同型が成り立つ。そして、このΩ_D^kにおける内積を

$$\langle T_1,T_2\rangle=\mathrm{Tr}_\omega(T_2^*T_1|D|^{-d})\qquad\forall\,T_j\in\pi(\Omega^k)\tag{4.1}$$

として、その内積により$\pi(\Omega^k)$を完備化して、それぞれの k についてヒルベルト空間$\mathcal{H}_k$を構成する。P を$\mathcal{H}_k$から部分空間$\pi(\mathrm{d}(J_0\cap\Omega^{k-1}))$の補空間への直交射影作用素とすると、$\omega_j\in\pi(\Omega^k)$について内積$\langle P\omega_1,\omega_2\rangle=\langle P\omega_1,P\omega_2\rangle$が$\Omega_D^k$における族にだけ依存するものとすることができる。この内積によって、Ω_D^kを完備化して Hilbert 空間とすることができるが、これを$\Lambda^k=P\mathcal{H}_k$と記す。

このような条件のもと、次のような命題が成立する(Connes [1994] VI. 1, Proposition 5)。

1) $\mathcal{A}$のΛ^kへの左と右からの掛け算作用は、$\mathcal{A}$のΛ^k上の可換なユニタリー表現を定義する。

2) 汎関数$\mathrm{YM}(V)=\langle\mathrm{d}V+V^2,\mathrm{d}V+V^2\rangle$は正で、4 次となり、ゲージ変換

$$\gamma_u(V)=u\mathrm{d}u^*+uVu^*$$

のもと、不変である。

3) $\theta=\pi(\mathrm{d}\alpha+\alpha^2)$とすると、汎関数$I(\alpha)=\mathrm{Tr}_\omega(\theta^2|D|^{-d})$は$\{\alpha\in\Omega^1(\mathcal{A});\alpha=\alpha^*\}$について正で、4 次となり、ゲージ不変である。

4) 汎関数$\mathrm{YM}(V)=\inf\{I(\alpha);\pi(\alpha)=V\}$が得られる。

以上のような条件を満たす表現πを用いて、曲率$\theta=\mathrm{d}V+V^2$の曖昧性を除去することができて、

$$\mathrm{YM}(V)=\inf\mathrm{Tr}_\omega(\theta^2|D|^{-d})=\mathrm{Tr}_\omega(\pi(\theta)^2|D|^{-d})$$

と書くことができる。

K-cycle を伴う Riemann 多様体の場合、次数付き微分代数Ω_D^*は、cyclic cohomology の構造を持ち、前 Hilbert 空間の構造を持つ多様体 X上の微分形式の de Rham 代数と標準的に同型になっている [4]。特に、$\mathcal{A}$がスピン構造を持つコンパクトな Riemann 多様体上の関数の

[4] cyclic cohomology については、Appendix A を参照。

集合の代数であり、$D = \partial_X$がスピノールの Hilbert 空間$L^2(X,S)$上の Dirac 作用素である場合を考えよう。ここで、$d = \dim X = 4$の場合には、

$$\partial_X = i^{-1}\gamma^\mu \partial_\mu \quad (\mu = 0,1,2,3) \tag{4.2}$$

とする。ただし、γ^μは Dirac の Euclid 空間（Minkowski 空間でなく）における γ 行列で、$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$をパウリ行列

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

として、I_2を単位行列とすると、

$$\gamma = (\gamma^\mu) = \begin{bmatrix} 0 & (i\hat{1}_2, -\boldsymbol{\sigma}) \\ (i\hat{1}_2, \boldsymbol{\sigma}) & 0 \end{bmatrix}$$

すなわち、

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 0 & i\hat{1}_2 \\ i\hat{1}_2 & 0 \end{bmatrix}, \gamma^1 = \begin{bmatrix} 0 & -\sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{bmatrix}, \gamma^2 = \begin{bmatrix} 0 & -\sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{bmatrix}, \gamma^3 = \begin{bmatrix} 0 & -\sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\gamma_5 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{bmatrix} \hat{1}_2 & 0 \\ 0 & -\hat{1}_2 \end{bmatrix}$$

である。ここで、通常、物理で用いるミンコフスキー時空におけるγ行列となっていることを注意しておく。また、γ^μや γ_5はスピン束に関するもので、ここで現れる行列成分とは可換であること、$\gamma^\mu\gamma_5 = -\gamma_5\gamma^\mu$になることを注意しておく。

C を X 上のベクトル束とし、$p \in X$上のファイバーを$p \in X$における余接空間の複素 Clifford 代数$\mathrm{Cliff}_{\mathbb{C}}(T_p^*(X))$とする（$X$が 4 次元の場合、余接空間の$\mathrm{d}x^\mu$を$\gamma^\mu$で置き換える）。$C$の可測な切断$\rho$は$\mathcal{H} = L^2(X,S)$上の作用素$\gamma(\rho)$を定義するが、この時、$\mathrm{d}_c f$を通常の外微分とし、それを C上の切断と見て、$f^0, f^1, \dots, f^n \in \mathcal{A}$とすると、

$$\pi(f^0\mathrm{d}f^1\mathrm{d}f^2 \cdots \mathrm{d}f^n) = i^{-n}\gamma(f^0\mathrm{d}_c f^1 \wedge \mathrm{d}_c f^2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}_c f^n)$$

となる。そして、また

$$\mathrm{Tr}_\omega(\rho|D|^{-d}) = 2^{-d}\pi^{-\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)^{-1}\int_X \mathrm{trace}\left(\rho(p)\right)\mathrm{d}\nu(p)$$

となり、それを用いて

$$\mathrm{YM}(V) = 2^{-d}\pi^{-\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)^{-1}\int_X \|\mathrm{d}V\|^2\mathrm{d}\nu$$

と書ける（Connes [1994] VI. 1, Formula 3)。

このような$D = \partial_X$という Yang-Mills 作用を、任意のエルミートなベクトル束の接続へと拡張することができる。ここでは、Serre-Swan の定理の「可換 C*環上の有限生成される射影加群は位相空間上のベクトル束に同値である」という主張が重要になる。θを接続∇の曲率とすると、

$$\mathrm{YM}(\nabla) = 2^{-d}\pi^{-\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)^{-1}\int_X \|\theta\|_{\mathrm{HS}}{}^2\mathrm{d}\nu$$

となる。ここで Hilbert-Schmidt ノルムは、$\|\theta\|_{\mathrm{HS}} = \left(\mathrm{trace}(\theta^*\theta)\right)^{1/2}$を意味している。また、1 点からなる 0 次元空間においては、

$$\mathrm{YM}(\nabla) = \mathrm{trace}(\pi(\theta)^2) \tag{4.4}$$

となる（Connes [1994] VI. 1, Formula 4）。

c） 加群と Hilbert 空間のテンソル積に作用する作用素

$\mathcal{A}$を単位を持つ*環、$\mathcal{E}$を$\mathcal{A}$上の有限生成される射影加群とする。$\mathcal{E}$のエルミート構造、すなわち各ファイバー$\mathcal{E}_p$上の内積$\langle\xi,\eta\rangle_p$は、$\langle\xi,\eta\rangle(p) = \langle\xi(p),\eta(p)\rangle_p$によって与えられる半双線形写像

$$\langle\,,\rangle\colon \mathcal{E}\times\mathcal{E}\to\mathcal{A} \tag{4.5}$$

を生成し、

1） $\langle\xi a,\eta b\rangle = a^*\langle\xi,\eta\rangle b\ \ (\forall\xi,\eta\in\mathcal{E},\ a,b\in\mathcal{A})$

2） $\langle\xi,\xi\rangle\geq 0\quad(\forall\xi\in\mathcal{E})$

3） $\mathcal{E}$は$\langle\,,\rangle$について自己双対

という性質を満たす（Connes [1994] VI. 1, Definition 7）。

そして、$\mathcal{E}$上の接続は線形写像$\nabla\colon\mathcal{E}\to\mathcal{E}\otimes\Omega_D^1$が

$$\nabla(\xi a) = (\nabla\xi)a + \xi\otimes\mathrm{d}a\quad(\forall\xi\in\mathcal{E},a\in\mathcal{A}) \tag{4.6}$$

を満たすように与えられる。また、

$$\langle\xi,\nabla\eta\rangle - \langle\nabla\xi,\eta\rangle = \mathrm{d}\langle\xi,\eta\rangle\ \ (\forall\xi,\eta\in\mathcal{E})$$

を満たすとき、また、その時に限り∇は計量について compatible であると言われる（Connes [1994] VI. 1, Definition 8; Definition 10）。

また、この接続を用いて、

$$D_\nabla(\xi\otimes\zeta) = \xi\otimes D\zeta + \left((1\otimes\pi)\nabla\xi\right)\zeta\quad(\forall\xi\in\mathcal{E},\zeta\in\mathcal{H}) \tag{4.7}$$

という作用素D_∇を導入することができる。

5. 電弱相互作用$\boldsymbol{U(1)\times SU(2)}$モデルと Higgs 場の自発的対称性の破れ

a） 非可換微分幾何学によるゲージボゾンの Yang-Mills 作用

以下、Connes [1994] VI. 3, Example (b) に即して話を進める。直積空間（スピン構造を持つコンパクト 4 次元 Riemann 多様体 *X*）×（2 点空間 *Y*）という直積空間を考える。$\mathcal{A}_1$を *X* 上の関数環、(4.2)のように$D_1 = \partial_X = i^{-1}\gamma\mathrm{d_c}$, $\gamma_5 = \begin{bmatrix}\hat{1} & 0\\ 0 & -\hat{1}\end{bmatrix}$を$\mathbb{Z}/2$の次数付け作用素として $(\mathcal{H}_1, D_1, \gamma_5)$を$\mathcal{A}_1$上の Dirac の *K*-cycle と定める。また、$\mathcal{A}_2 = \mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$、$M$を質量行列に

対応するような行列、$D_2=\begin{bmatrix}0 & M^* \\ M & 0\end{bmatrix}$、$\mathcal{H}_2=\mathcal{H}_2^a\oplus\mathcal{H}_2^b$をとする。そして、

$$\mathcal{A}=\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2$$
$$\mathcal{H}=\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2$$
$$D=D_1\otimes D_2$$

とする。すると、Dirac 作用素は

$$D=\begin{bmatrix}\partial_X\otimes 1 & \gamma_5\otimes M^* \\ \gamma_5\otimes M & \partial_X\otimes 1\end{bmatrix} \tag{5.1}$$

となる。ただし、ここのγ_5は X上のスピン束に由来する。

また、Yを a,b という 2 点からなる空間とし、a は左巻きカイラリティの純粋状態に対応し、b は右巻きのカイラリティの純粋状態に対応するものとする。ここで、$f_j,g_j\in\mathcal{A}$とし、a におけるゲージ場を$\omega^a=\sum_j f_j^a \mathrm{d_c} g_j^a$、$b$ におけるゲージ場を$\omega^b=\sum_j f_j^b \mathrm{d_c} g_j^b$、2 重項の複素スカラー場を$\delta^a=\sum f_j^a\left(g_j^b-g_j^a\right),\delta^b=\sum f_j^b\left(g_j^a-g_j^b\right)$として、

$$\rho=\begin{bmatrix}\omega^a\otimes 1 & \delta^a\otimes M^* \\ \delta^b\otimes M & \omega^b\otimes 1\end{bmatrix} \tag{5.2}$$

とし、Ω_D^*における表現としてのベクトル・ポテンシャルを

$$\pi(\rho)=\begin{bmatrix}i^{-1}\gamma(\omega^a)\otimes 1 & \delta^a\gamma_5\otimes M^* \\ \delta^b\gamma_5\otimes M & i^{-1}\gamma(\omega^b)\otimes 1\end{bmatrix} \tag{5.3}$$

とする。ここで、$\omega^a,\omega^b\in\Omega^1$について、$\omega^a=(\omega^a)_\mu \mathrm{d_c} x^\mu$として、$\gamma(\omega^a)=\gamma^\mu(\omega^a)_\mu$等となる。このようにしてベクトル・ポテンシャルを幾何学的点上に局所化されていない非可換環の元として構成する。そして、ベクトル・ポテンシャルや Dirac 作用素といったダイナミカルなものが、計量、接続、曲率というような幾何学的構造を生み出すのである。

曲率ないしベクトル・ポテンシャルの強さを求めよう。Dirac 作用素 D と$2n+1$形式の代数の元 x の交換関係は$[D,x]=Dx+xD$となること、γ_5はδ^bと交換すること、$\gamma_5\gamma(1\text{ 形式})=-\gamma(1\text{ 形式})\gamma_5$などを用いると、

$$\begin{aligned}\pi(\mathrm{d}\rho)&=[D,\pi(\rho)]=D\pi(\rho)+\pi(\rho)D\\ &=\begin{bmatrix}-\gamma(\mathrm{d_c}\omega^a)\otimes 1+(\delta^a+\delta^b)\otimes M^*M & \gamma_5 i^{-1}\gamma(\omega^b-\mathrm{d_c}\delta^a-\omega^a)\otimes M^* \\ \gamma_5 i^{-1}\gamma(\omega^a-\mathrm{d_c}\delta^b-\omega^b)\otimes M & -\gamma(\mathrm{d_c}\omega^b)\otimes 1+(\delta^a+\delta^b)\otimes M^*M\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{5.4}$$

となる。また、

$$\begin{aligned}&\pi(\rho\wedge\rho)=\left(\pi(\rho)\right)^2\\ &=\begin{bmatrix}-\gamma(\omega^a\wedge\omega^a)\otimes 1+\delta^a\delta^b\otimes M^*M & (-i^{-1}\gamma_5\gamma(\omega^a)\delta^a+i^{-1}\gamma_5\delta^a\gamma(\omega^b))\otimes M^* \\ (i^{-1}\gamma_5\delta^b\gamma(\omega^a)-i^{-1}\gamma_5\gamma(\omega^b)\delta^b)\otimes M & -\gamma(\omega^b\wedge\omega^b)\otimes 1+\delta^b\delta^a\otimes MM^*\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{5.5}$$

となる。ここで、点 a は左巻きのカイラリティの状態、点 b は右巻きのカイラリティの状態を意味することを思い起こせば、それぞれ、$SU(2)$と$U(1)$の対称性を持っているので、

$$\omega^a=\begin{bmatrix}\omega_{11}^a & \omega_{12}^a \\ \omega_{21}^a & \omega_{22}^a\end{bmatrix},\omega^b=\begin{bmatrix}\omega_{11}^b & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix} \tag{5.6}$$

と表して、式(5.2)に埋め込むことができる。また、

$$\delta^a = \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 \\ \varphi_2 & 0 \end{bmatrix}, \delta^b = \begin{bmatrix} \overline{\varphi_1} & \overline{\varphi_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

は物理的には Higgs 場に関係する 2 重項の複素スカラー場に対応する。

このようなρに対して$\rho = f\rho = \rho f$を満たすような

$$f = \begin{bmatrix} \hat{1}_2 & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix}, \qquad \hat{1}_2 \coloneqq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, e := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.8}$$

について、

$$\widetilde{\nabla} = f\mathrm{d} + \rho \tag{5.9}$$

という接続を考え、その曲率

$$\tilde{\theta} = (f\mathrm{d} + \rho)(f\mathrm{d} + \rho)f = f\mathrm{d}f\mathrm{d}f + f(\mathrm{d}\rho)f + \rho \wedge \rho$$

を考える。そして、Mとeが可換であることを考慮して、

$$\mathrm{d}f = [D_2, f] = \begin{bmatrix} 0 & -(\hat{1}_2 - e)M^* \\ (\hat{1}_2 - e)M & 0 \end{bmatrix}$$

により

$$f\mathrm{d}f\mathrm{d}f = -\begin{bmatrix} (\hat{1}_2 - e)M^*M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となることを用いて、

$$\tilde{\theta} = \begin{bmatrix} \tilde{\theta}^{(1,1)} & \tilde{\theta}^{(1,2)} \\ \tilde{\theta}^{(1,2)} & \tilde{\theta}^{(2,2)} \end{bmatrix}$$

を計算する。すると、

$$\tilde{\theta}^{(1,1)} = -\gamma(\alpha^a)\otimes 1 + h^a \otimes M^*M$$
$$\tilde{\theta}^{(1,2)} = \gamma_5 i^{-1}(\beta^a)\otimes M^*$$
$$\tilde{\theta}^{(2,1)} = \gamma_5 i^{-1}(\beta^b)\otimes M$$
$$\tilde{\theta}^{(2,2)} = -\gamma(\alpha^b)\otimes 1 + h^b \otimes MM^*$$

という形になるが、そこでは、式(5.4)、(5.5)を用いて、

$$\alpha^a = \mathrm{d_c}\omega^a + \omega^a \wedge \omega^a, \qquad \alpha^b = \mathrm{d_c}\omega^b \tag{5.10}$$

$$\beta^a = \left(\begin{bmatrix} \omega^b_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \omega^a_{11} & \omega^a_{12} \\ \omega^a_{21} & \omega^a_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathrm{d_c}\varphi_1 & 0 \\ \mathrm{d_c}\varphi_2 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 \\ \varphi_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega^b_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \omega^a_{11} & \omega^a_{12} \\ \omega^a_{21} & \omega^a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 \\ \varphi_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\mathrm{d_c}\varphi_1 - \left(\omega^a_{11} - \omega^b_{11}\right)(\varphi_1 + 1) - \omega^a_{12}\varphi_2, & 0 \\ -\mathrm{d_c}\varphi_2 - \omega^a_{21}(\varphi_1 + 1) - \left(\omega^a_{22} - \omega^b_{11}\right)\varphi_2, & 0 \end{bmatrix}$$

$$\beta^b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \omega^a_{11} & \omega^a_{12} \\ \omega^a_{21} & \omega^a_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \omega^b_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathrm{d_c}\overline{\varphi_1} & \mathrm{d_c}\overline{\varphi_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$+\begin{bmatrix}\overline{\varphi_1} & \overline{\varphi_2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_{11}^a & \omega_{12}^a\\ \omega_{21}^a & \omega_{22}^a\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\omega_{11}^b & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{\varphi_1} & \overline{\varphi_2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-\mathrm{d_c}\overline{\varphi_1}+\left(\omega_{11}^a-\omega_{11}^b\right)(\overline{\varphi_1}+1)+\omega_{12}^a\overline{\varphi_2}, & -\mathrm{d_c}\overline{\varphi_2}+\omega_{21}^a(\overline{\varphi_1}+1)+\left(\omega_{22}^a-\omega_{11}^b\right)\overline{\varphi_2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$h^a=\begin{bmatrix}\varphi_1 & 0\\ \varphi_2 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\overline{\varphi_1} & \overline{\varphi_2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\varphi_1 & 0\\ \varphi_2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{\varphi_1} & \overline{\varphi_2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\varphi_1+\overline{\varphi_1}+\varphi_1\overline{\varphi_1}, & \overline{\varphi_2}+\varphi_1\overline{\varphi_2}\\ \varphi_2+\varphi_2\overline{\varphi_1}, & \varphi_2\overline{\varphi_2}-1\end{bmatrix}$$

$$h^b=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_1+\overline{\varphi_1}, & \overline{\varphi_2}\\ \varphi_2, & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\overline{\varphi_1} & \overline{\varphi_2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_1 & 0\\ \varphi_2 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\varphi_1+\overline{\varphi_1}+\overline{\varphi_1}\varphi_1+\overline{\varphi_2}\varphi_2, & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

となっている。式h_aの中の $\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ は、$f\mathrm{d}f\mathrm{d}f$に由来する。

このようにして求まる曲率$\widetilde{\nabla}$の Yang-Mills 場の作用$\mathrm{YM}\left(\widetilde{\nabla}\right)$を(4.4)に即して求めることができる。ここで、表現$\pi(\mathrm{d}\rho)$や$\pi(\rho\wedge\rho)$はΩ^2の表現$\pi(\Omega^2)$であり、Ω_D^2とするためには$\pi(\mathrm{d}(J_0\cap\Omega^1))$による商空間$\pi(\Omega^2)/\pi(\mathrm{d}(J_0\cap\Omega^1))$を考えなければならないが、そこで$\xi^a,\xi^b\in\Omega^0$として

$$\mathrm{T}=\begin{bmatrix}\gamma(\xi^a)\otimes 1 & 0\\ 0 & \gamma(\xi^b)\otimes 1\end{bmatrix}$$

が、$\pi(\Omega^2)$の部分空間$\pi(\mathrm{d}(J_0\cap\Omega^1))$であることがわかる。このことから、$\tilde{\theta}^{(1,1)}=-\gamma(\alpha^a)\otimes 1+h^a\otimes M^*M$と$\tilde{\theta}^{(2,2)}=-\gamma(\alpha^b)\otimes 1+h^b\otimes MM^*$から、$\nu$を実スカラーとして$h^a\otimes\nu\,\mathrm{id}$と$h^b\otimes\nu\,\mathrm{id}$に関わる部分を差し引いておかなければならない。したがって、$N^a=\dim\mathcal{H}_2^a$、$N^b=\dim\mathcal{H}_2^b$として、また$\nu(M^*M)$を$\mathrm{trace}(\nu(M^*M)\mathrm{id})=\mathrm{trace}(M^*M)$によって定まる実数として

$$\begin{aligned}\mathrm{YM}\left(\widetilde{\nabla}\right)=\frac{1}{8\pi^2}\Bigg(&\int_X\left(N^a\|\alpha^a\|^2+N^b\left\|\alpha^b\right\|^2\right)\mathrm{d}\nu+\mathrm{Tr}(M^*M)\int_X\left(\|\beta^a\|^2+\left\|\beta^b\right\|^2\right)\mathrm{d}\nu\\ &+\mathrm{Tr}((M^*M-\nu(M^*M)\mathrm{id})^2)\int_X\left(\|h^a\|^2+\left\|h^b\right\|^2\right)\mathrm{d}\nu\Bigg)\end{aligned}\tag{5.11}$$

となる（Connes [1994] VI. 3, Lemma 7）。ただし、ここでのノルムは Hilbert-Schmidt ノルムである。また、この Tr は、行列の対角成分の和をとった通常の trace を行列の次元で割ったものである。

(5.11)により、Yang-Mills 場の作用の密度、すなわち$\mathrm{YM}\left(\widetilde{\nabla}\right)$の連続空間$X$における積分の被積分関数$\widetilde{\mathrm{YM}}(\widetilde{\nabla})$は、$\alpha^a$と$\alpha^b$に由来する$I_2$、$\beta^a$と$\beta^b$に由来する$I_1$、$h^a$と$h^b$に由来する$I_0$の三つの成分の和

$$\widetilde{\mathrm{YM}}\left(\widetilde{\nabla}\right)=\mathrm{trace}\left(\pi\left(\tilde{\theta}\right)^2\right)=I_0+I_1+I_2$$

として書くことができることがわかる。ただし、通常の物理におけるミンコフスキー時空における作用と、ここで求められている Euclid 空間における Yang-Mills 作用では符号に関し

て異なっているので、注意しておく。

I_2に関しては、$N^a = \mathrm{dim}\mathcal{H}_2^a$、$N^b = \mathrm{dim}\mathcal{H}_2^b$として、(5.10)を考慮しながら

$$I_2 = |\mathrm{d_c}\omega^a + \omega^a \wedge \omega^a|^2 N^a + \left|\mathrm{d_c}\omega^b\right|^2 N^b$$

から求められる。また、ノルムは、接続∇^aと∇^bについての曲率の2乗ノルムである。

I_1に関しては、やはり(5.10)から導かれる接続を考慮しながら

$$\nabla = \mathrm{d_c} + \begin{bmatrix} \omega_{11}^a - \omega_{11}^b & \omega_{12}^a \\ \omega_{21}^a & \omega_{22}^a - \omega_{11}^b \end{bmatrix}$$

として、β^aとβ^bを考えて、

$$I_1 = 2\left|\nabla \begin{bmatrix} 1 + \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}\right|^2 \mathrm{Tr}(M^*M) \tag{5.12}$$

から求められる。

I_0に関しては、$\nu^\perp(M^*M) = M^*M - \nu(M^*M)\mathrm{id}$として、$h^a$と$h^b$を考えて、

$$I_0 = \left(1 + 2\left(1 - (|1 + \varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2)\right)^2\right)\mathrm{Tr}\left(\left(\nu^\perp(M^*M)\right)^2\right) \tag{5.13}$$

から求められる。ここで、$\nu^\perp$は、行列の Hilbert-Schmidt 空間における単位のスカラー倍の直行補空間への射影である。ここで、$|1 + \varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 = 1$で$I_0$が最小値をとるが、これは、これは Higgs 機構の自発的対称性の破れに関係している。そして、この対称性の破れは、左巻きのカイラリティの純粋状態の点aと右巻きのカイラリティの純粋状態の点bにおける Hilbert 空間の次元が異なることに由来している。

b) フェルミオンの作用

フェルミオンの作用について考える。(4.1)の内積により代数$\mathcal{A}$をヒルベルト空間と見ることができ、また(4.5)の関係式を考慮すると、テンソル積$\mathcal{E}\otimes\mathcal{H}$は、

$$\langle \xi_1 \otimes \zeta_1, \xi_2 \otimes \zeta_2 \rangle = \langle \zeta_1, \langle \xi_1, \xi_2 \rangle \zeta_2 \rangle \quad (\forall \xi_i \in \mathcal{E}, \zeta_i \in \mathcal{H})$$

で与えられる内積による Hilbert 空間となる。また、式(4.7)で与えられた$\mathcal{E}\otimes\mathcal{H}$に作用する作用素$D_\nabla$を思い起こしておく（Connes [1994], VI. 3, Lemma 1）。

すると、フェルミオンの作用の連続空間上の積分の被積分項、すなわちラグランジアン密度は、

$$\langle \psi, D_\nabla \psi \rangle \ (\psi \in \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{H})$$

によって与えられる。ゲージボゾンとフェルミオンのラグランジアン密度の合計は、ゲージボゾンに質量を与える結合定数に依存する実数をcとして、

$$\mathcal{L}(\nabla, \psi) = c\widetilde{\mathrm{YM}}\left(\widetilde{\nabla}\right) + \langle \psi, D_\nabla \psi \rangle \tag{5.14}$$

によって与えられる。

具体的に見てみよう。$\mathcal{E}$を$\mathcal{A}$上の有限生成の射影加群、$\psi \in \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{H}$、$\gamma_5 \psi = \psi$とする。そして、$S$ をスピン束とした左巻きの切断$S \otimes \mathcal{H}_2^a$のペアを$\begin{bmatrix} \psi_1^a \\ \psi_2^a \end{bmatrix}$とし、右巻きの切断$S \otimes \mathcal{H}_{2,b}$を

ψ_1^bとする。また、$\partial_X = i^{-1}\gamma(\mathrm{d_c})$として、(5.1)～(5.3)、(5.6)～(5.9)などの定義を思い出しておく。そして、$\psi = \xi\otimes\zeta = \ \xi^a\otimes\xi^b, \xi^a = \begin{bmatrix}\xi_1^a\\ \xi_2^a\end{bmatrix}, \xi^b = \begin{bmatrix}\xi_1^b\\ 0\end{bmatrix},\ \zeta^a = \begin{bmatrix}\zeta_1^a\\ \zeta_2^a\end{bmatrix}, \zeta^b = \begin{bmatrix}\zeta_1^b\\ 0\end{bmatrix}$等とすると、

$$D\zeta = \begin{bmatrix} i^{-1}\gamma\left(\begin{bmatrix}\mathrm{d_c} & 0\\ 0 & \mathrm{d_c}\end{bmatrix}\right)\otimes 1 & \begin{bmatrix}\gamma_5 & 0\\ 0 & \gamma_5\end{bmatrix}\otimes M^* \\ \begin{bmatrix}\gamma_5 & 0\\ 0 & \gamma_5\end{bmatrix}\otimes M & i^{-1}\gamma\left(\begin{bmatrix}\mathrm{d_c} & 0\\ 0 & \mathrm{d_c}\end{bmatrix}\right)\otimes 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\zeta_1^a\\ \zeta_2^a\\ \zeta_1^b\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i^{-1}\gamma(\mathrm{d_c}\zeta_1^a) + \zeta_1^b M^* \\ i^{-1}\gamma(\mathrm{d_c}\zeta_2^a) \\ \zeta_1^a M + i^{-1}\gamma(\mathrm{d_c}\zeta_1^b) \\ \zeta_2^a M \end{bmatrix} \tag{5.15}$$

$$= \begin{bmatrix} i^{-1}\gamma(\mathrm{d_c}\zeta^a) + \zeta^b M^* \\ \zeta^a M + i^{-1}\gamma(\mathrm{d_c}\zeta^b) \end{bmatrix}$$

$$(1\otimes\pi)\nabla\xi = \begin{bmatrix} i^{-1}\gamma\left(\begin{bmatrix}\mathrm{d_c}+\omega_{11}^a & \omega_{12}^a\\ \omega_{21}^a & \mathrm{d_c}+\omega_{22}^a\end{bmatrix}\right)\otimes 1 & \begin{bmatrix}\varphi_1\gamma_5 & 0\\ \varphi_2\gamma_5 & 0\end{bmatrix}\otimes M^* \\ \begin{bmatrix}\overline{\varphi_1}\,\gamma_5 & \overline{\varphi_2}\,\gamma_5\\ 0 & 0\end{bmatrix}\otimes M & i^{-1}\gamma\left(\begin{bmatrix}\mathrm{d_c}+\omega_{11}^b & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right)\otimes 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1^a\\ \xi_2^a\\ \xi_1^b\\ 0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} i^{-1}\gamma(\mathrm{d_c}+\omega^a)\xi^a + \begin{bmatrix}\varphi_1, 0\\ \varphi_2, 0\end{bmatrix}\xi^b M^* \\ \begin{bmatrix}\overline{\varphi_1} & \overline{\varphi_2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\xi^a M + i^{-1}\gamma(\mathrm{d_c}+\omega^b)\xi^b \end{bmatrix} \tag{5.16}$$

となる。(5.15)と(5.16)を用いると、

$$\langle\zeta, D\zeta\rangle = \overline{\zeta^a}\partial_X\zeta^a + \overline{\zeta^a}M^*\zeta^b + \overline{\xi^b}M\zeta^a + \overline{\xi^b}\partial_X\zeta^b \tag{5.17}$$

$$\langle\xi, (1\otimes\pi)\nabla\xi\rangle = \overline{\xi^a}\partial_X\xi^a + \overline{\xi^a}i^{-1}\gamma(\omega^a)\xi^a + \overline{\xi^a}M^*\begin{bmatrix}\varphi_1, 0\\ \varphi_2, 0\end{bmatrix}\xi^b + \overline{\xi^b}M\begin{bmatrix}\overline{\varphi_1} & \overline{\varphi_2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\xi^a$$
$$+ \overline{\xi^b}\partial_X\xi^b + \overline{\xi^b}i^{-1}\gamma(\omega_b)\xi^b \tag{5.18}$$

となる。(5.17)と(5.18)から

$$\langle\xi\otimes\zeta, \xi\otimes D\zeta\rangle = \langle\xi^a\otimes\zeta^a, \xi^a\otimes\partial_X\zeta^a\rangle + \langle\xi^a\otimes\zeta^a, M^*\xi^b\otimes\zeta^b\rangle + \langle\xi^b\otimes\zeta^b, M\xi^a\otimes\zeta^a\rangle$$
$$+ \langle\xi^b\otimes\zeta^b, \xi^b\otimes\partial_X\zeta^b\rangle \tag{5.19}$$

$$\langle\xi\otimes\zeta, (1\otimes\pi)\nabla\xi\otimes\zeta\rangle$$

$$= \langle\zeta, \Big(\overline{\xi^a}\partial_X\xi^a + \overline{\xi^a}i^{-1}\gamma(\omega_a)\xi^a + \overline{\xi^a}M^*\begin{bmatrix}\varphi_1, 0\\ \varphi_2, 0\end{bmatrix}\xi^b$$

$$+ \overline{\xi^b}M\begin{bmatrix}\overline{\varphi_1} & \overline{\varphi_2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\xi^a + \overline{\xi^b}\partial_X\xi^b + \overline{\xi^b}i^{-1}\gamma(\omega_b)\xi^b\Big)\zeta\rangle$$

$$= \langle\xi^a\otimes\zeta^a, \partial_X\xi^a\otimes\zeta^a\rangle + \langle\xi^a\otimes\zeta^a, i^{-1}\gamma(\omega_a)\xi^a\otimes\zeta^a\rangle \tag{5.20}$$

$$+ \langle\xi^a\otimes\zeta^a, M^*\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{bmatrix}\xi_1^b\otimes\zeta^b\rangle + \langle\xi_1^b\otimes\zeta^b, M\begin{bmatrix}\overline{\varphi_1} & \overline{\varphi_2}\end{bmatrix}\xi^a\otimes\zeta^a\rangle$$

$$+ \langle\xi^b\otimes\zeta^b, \partial_X\xi^b\otimes\zeta^b\rangle + \langle\xi^b\otimes\zeta^b, i^{-1}\gamma(\omega_b)\xi^b\otimes\zeta^b\rangle$$

となる。

(5.19)と(5.20)の計算結果を用いると、ファルミオンのラグランジアン密度は、

$$\langle\psi, D_\nabla\psi\rangle = J_0 + J_1$$

と書き表され、$\psi = \xi\otimes\zeta$なので、J_0とJ_1はそれぞれ

$$J_0 = \bar{\psi}^a\left(\partial_X + i^{-1}\gamma(\omega^a)\right)\psi^a + \bar{\psi}^b\left(\partial_X + i^{-1}\gamma(\omega^b)\right)\psi^b$$

$$J_1 = \bar{\psi}^b M[1 + \overline{\varphi_1}, \overline{\varphi_2}]\psi^a + \mathrm{h.c.}$$

というラグランジアン密度によって与えられることがわかる。J_1は、湯川相互作用によるフェルミオンの質量の生成に対応付けられる項である（Connes [1994] VI. 3, Example b）[5]。

c） 標準理論との比較

これまでに求めたI_0, I_1，I_2，J_0，J_1の物理的意味を考えるために、素粒子の標準理論における電弱相互作用における様々なラグランジアンを振り返っておこう。標準理論のラグランジアン密度を$\mathcal{L}(f, W, B, \Phi) = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_\Phi + \mathcal{L}_Y + \mathcal{L}_V$と書くことにする。そして、(5.14)の$\mathcal{L}(\nabla, \psi)$が$\mathcal{L}(f, W, B, \Phi)$と等しくなることを要請して、結合定数の間の関係を求める。それぞれのラグランジアン密度は次のようになる。

$\mathcal{L}_G$ ：$SU(2)$対称性を持つ W ボゾンのゲージ場を$W_{\mu a}$、$U(1)$対称性を持つゲージ場をB_μとして、$G_{\mu\nu a} = \partial_\mu W_{\nu a} - \partial_\nu W_{\mu a} + g\varepsilon_{abc}W_{\mu b}W_{\nu c}$, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$とすると、ゲージボゾンのラグランジアン密度は

$$\mathcal{L}_G = \frac{1}{4}\left(G_{\mu\nu a}G_a^{\mu\nu}\right) + \frac{1}{4}\left(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right)$$

となる。これは、上記のI_2に相当する。

$\mathcal{L}_f$ ：フェルミオンの運動項は

$$\mathcal{L}_f = -\sum\left[\bar{f}_L\gamma^\mu\left(\partial_\mu + ig\frac{\tau_j}{2}W_{\mu j} + ig'\frac{Y_L}{2}B_\mu\right)f_L + \bar{f}_R\gamma^\mu\left(\partial_\mu + ig'\frac{Y_R}{2}B_\mu\right)f_R\right]$$

である。ここで、f_Lは左巻き、f_Rは右巻きのフェルミオン場であり、左巻きのスピノールは$\begin{bmatrix}\nu_L\\ e_L\end{bmatrix}$という 2 重項で、右巻きのスピノールは$e_R$という 1 重項で与えられる。$Y_L$と$Y_R$は左巻きと右巻きのレプトン電荷であり、$Y_L = -1, Y_R = -2$である。また、$\tau_j$は、弱い相互作用のゲージ場に関わるアイソスピンについてのリー群$SU(2)$の生成子であり、数学的にはスピノールについてのパウリ行列σ_j、すなわち、(4.3)の$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$と同じであるが、概念的に異なるので、$\tau_j$と表記している。この$\mathcal{L}_f$は、上記の$J_0$に相当する。

$\mathcal{L}_\Phi$ ：$SU(2)$の対称性を持ち、$Y_\Phi = 1$をハイパーチャージとする 2 重項の複素スカラー場を$\Phi = \begin{bmatrix}\Phi_1\\ \Phi_2\end{bmatrix}$とすると、Higgs 場のラグランジアン密度の運動項は

$$\mathcal{L}_\Phi = -\left|\left(\partial_\mu + ig\frac{\tau_j}{2}W_{\mu j} + i\frac{g'}{2}B_\mu\right)\Phi\right|^2 \tag{5.21}$$

[5] ここで、$\bar{\psi}^a$等は単にψ^aの共役作用素であり、物理学での表記のように、共役をとって、それに$\gamma^0 = \begin{bmatrix}0 & \hat{1}_2\\ \hat{1}_2 & 0\end{bmatrix}$を右から掛けることを意味しているわけではない。

となる。これは、I_1に相当し、左巻きと右巻きのカイラリティのゲージ場は、それぞれ

$$\omega^a = \begin{bmatrix} \omega_{11}^a & \omega_{12}^a \\ \omega_{21}^a & \omega_{22}^a \end{bmatrix} = \sum_j g \frac{\tau_j}{2} W_{\mu j} = \frac{g}{2} \begin{bmatrix} W_{\mu 3} & W_{\mu 1} - iW_{\mu 2} \\ W_{\mu 1} + iW_{\mu 2} & -W_{\mu 3} \end{bmatrix}, \qquad \omega_{11}^b = \frac{g'}{2} B_\mu$$

と書くことができる。

$\mathcal{L}_Y$ ：Higgs 場とフェルミオンとの湯川相互作用は、

$$\mathcal{L}_Y = -\sum \left[H_{ff'} \left(\bar{f}_L \cdot \Phi \right) f'_R + H_{ff'}^* \bar{f}'_R (\Phi^+ \cdot f_L) \right]$$

である。ただし、$H_{ff'}$は異なる世代を含めたフェルミオン間のカップリング行列である。このフェルミオンがレプトンの場合、

$$\mathcal{L}_{Y,\mathrm{lepton}} = -G_e(\bar{L}_e \cdot \Phi)e_R - G_\mu\left(\bar{L}_\mu \cdot \Phi\right)\mu_R - G_\tau(\bar{L}_\tau \cdot \Phi)\tau_R + \mathrm{h.c.}$$

である。ここで、L_eは電子eの 2 重項$\begin{bmatrix} \nu_{e,L} \\ e_L \end{bmatrix}$であり、他の世代$\mu, \tau$についても同様である。カップリング行列$G_e, G_\mu, G_\tau$は自発的に対称性の破れた Higgs 真空状態を通して、レプトンの質量を生じさせる。これは、上記のJ_1に相当する。

$\mathcal{L}_\mathrm{V}$ ：Higgs 場の自己相互作用は、$|\Phi|^2 \coloneqq \Phi^+\Phi = |\Phi_1|^2 + |\Phi_2|^2$として、ポテンシャル項

$$\mathcal{L}_\mathrm{V} = \mu^2(\Phi^+\Phi) - \frac{1}{2}\lambda(\Phi^+\Phi)^2 = -\frac{1}{2}\lambda\left(|\Phi|^2 - \frac{\mu^2}{\lambda}\right)^2 + \frac{\mu^4}{2\lambda} \tag{5.22}$$

となる。ここで、λとμ^2は、$\lambda > 0$、$\mu^2 > 0$のスカラーである。これは上記のI_0に相当する（Connes [1994] VI. 3, Example b; VI. 5β）。真空状態の対称性が破れた時の最小のポテンシャルは$-\mathcal{L}_\mathrm{Vmin} = -\mu^4/2\lambda$となる。

弱い相互作用では、2 重項の複素スカラー場である Higgs 場の対称性が破れ、$W_{\mu j}$とB_μの 4 つのゲージボゾンに対し、質量を与える。すなわち、$W_{\mu 1}$と$W_{\mu 2}$は質量を持つボゾン（$W^\pm$）になり、$W_{\mu 3}$とB_μは、質量行列が対角化されるように、$\tan\theta_w = g'/g$を満たす角度θ_w（Weinberg 角）によってユニタリー（回転）変換されることで、質量をもつボゾン（Z^0）と質量ゼロの光子の電磁場（A_{em}）になる。$W^\pm$の質量は$m_{W^\pm} = \mu g/\sqrt{2\lambda}$、$Z^0$の質量は$m_Z = \mu\sqrt{g^2 + g'^2}/\sqrt{2\lambda}$である（Schwartz [2014] 29.1）。

以下は、Connes[1994]には述べられていない筆者自らの計算の試みである。I_0を標準模型と比較するために、簡単のため、結合定数の関係を$g = g'$と仮定すると、$\tan\theta_w = 1$であり、$m_Z = \mu\sqrt{2}g/\sqrt{2\lambda}$となる。そうすると、$\mathcal{L}(\nabla, \psi)$に含まれる質量行列$M$について対角化し、その対角成分に$m_{W^+}$、$m_{W^-}$、$m_Z$、光子の質量ゼロを並べることで、

$$M = \frac{\mu g}{\sqrt{2\lambda}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; M^*M = \frac{\mu^2 g^2}{2\lambda} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; \nu^\perp(M^*M) = \frac{\mu^2 g^2}{2\lambda} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

となることが妥当性を持ち、

$$\mathrm{Tr}(M^*M) = \frac{1}{4}\mathrm{trace}(M^*M) = \frac{\mu^2}{2\lambda}g^2, \qquad \mathrm{Tr}\left(\left(\nu^\perp(M^*M)\right)^2\right) = \frac{\mu^4}{8\lambda^2}g^4$$

が得られる。ところで、(5.13)における$|1+\varphi_1|^2+|\varphi_2|^2=1$のときと、$|1+\varphi_1|^2+|\varphi_2|^2=0$のときの$I_0$の値の差は$2\mathrm{Tr}\left(\left(\nu^{\perp}(M^*M)\right)^2\right)=\mu^4 g^4/4\lambda^2$であるが、これを(5.22)の$-\mathcal{L}_{\mathrm{V}}$の最小値$-\mathcal{L}_{\mathrm{Vmin}}=-\mu^4/2\lambda$と$\Phi=0$のときの$-\mathcal{L}_{\mathrm{V0}}=0$の値の差を比較する。すると、$\mathcal{L}(f,W,B,\Phi)$における$\mathcal{L}_{\mathrm{V}}$に含まれる$-\mathcal{L}_{\mathrm{V0}}+\mathcal{L}_{\mathrm{Vmin}}=\mu^4/2\lambda$は、$\widetilde{\mathrm{YM}}(\widetilde{\nabla})$における$I_0$に含まれる$2\mathrm{Tr}\left(\left(\nu^{\perp}(M^*M)\right)^2\right)=\mu^4 g^4/4\lambda^2$に$2g^{-4}\lambda$を乗じたものであることが分かる。同様にして、(5.12)において$\varphi_1=\varphi_2=0$としたときのI_1の値

$$2\left|\left(\omega_{11}^a-\omega_{11}^b\right)^2+(\omega_{12}^a)^2\right|\ \mathrm{Tr}(M^*M)$$

$$=2\left(\left|\frac{gW_{\mu3}}{2}-\frac{g'B_\mu}{2}\right|^2+\left|\frac{g\left(W_{\mu1}+iW_{\mu2}\right)}{2}\right|^2\right)\mathrm{Tr}(M^*M)$$

と、(5.21)において$\Phi=\begin{bmatrix}0\\ \sqrt{\mu^2/\lambda}\end{bmatrix}$としたときの$\mathcal{L}_\Phi$の値

$$\left(\left|\frac{gW_{\mu3}}{2}-\frac{g'B_\mu}{2}\right|^2+\left|\frac{g\left(W_{\mu1}+iW_{\mu2}\right)}{2}\right|^2\right)\left(\frac{\mu^2}{\lambda}\right)$$

とを比較する。すると、$\mathcal{L}(f,W,B,\Phi)$における$\mathcal{L}_\Phi$に含まれるμ^2/λは、$\widetilde{\mathrm{YM}}(\widetilde{\nabla})$における$I_1$に含まれる$2\mathrm{Tr}(M^*M)=\mu^2 g^2/\lambda$に$g^{-2}$を乗じたものであることが分かる。これらの$\mathcal{L}(f,W,B,\Phi)$と$\widetilde{\mathrm{YM}}(\widetilde{\nabla})$の間の比が整合的になり、

$$\mathcal{L}(\nabla,\psi)=\mathcal{L}(f,W,B,\Phi)$$

が(5.14)に即して成立するためには、$c=2g^{-4}\lambda=g^{-2}$とならなければならない。その結果、$\lambda=g^2/2$が得られる。標準理論では、ゲージボゾンの結合定数gとg'、Higgs 場の結合定数λは独立した定数として与えられ、実験によって与えられるほかないが、非可換幾何学を用いると、$g=g'$の場合には、このような関係が与えられる。

一般の$\tan\theta_w=g'/g$の場合には、$m_Z=\mu\sqrt{g^2+g'^2}/\sqrt{2\lambda}=\mu g\cos^{-1}\theta_w/\sqrt{2\lambda}$なので、

$$M=\frac{\mu g}{\sqrt{2\lambda}}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\cos^{-1}\theta_w&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\ M^*M=\frac{\mu^2 g^2}{2\lambda}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\cos^{-2}\theta_w&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$\nu^{\perp}(M^*M)=\frac{\mu^2 g^2}{2\lambda}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\cos^{-2}\theta_w&0&0&0\\0&\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\cos^{-2}\theta_w&0&0\\0&0&-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\cos^{-2}\theta_w&0\\0&0&0&-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\cos^{-2}\theta_w\end{bmatrix}$$

とし、

$$\mathrm{Tr}(M^*M)=\frac{\mu^2}{8\lambda}g^2(2+\cos^{-2}\theta_w), \mathrm{Tr}\left(\left(\nu^{\perp}(M^*M)\right)^2\right)=\frac{\mu^4}{64\lambda^2}g^4(4-4\cos^{-2}\theta_w+3\cos^{-4}\theta_w)$$

を得る。以下、同様な推論により、

$$\lambda=\frac{4\cos^4\theta_w-4\cos^2\theta_w+3}{8\cos^4\theta_w+4\cos^2\theta_w}g^2$$

となる。ところで、Higgs 粒子の質量は$v=2m_{W^{\pm}}/g=\sqrt{2}\mu/\sqrt{\lambda}$として、$m_h=\sqrt{2}\mu=v\sqrt{\lambda}$である。実験によると、$v\approx 250\mathrm{Gev}$、$\cos^2\theta_w\approx 0.777$、$g\approx 0.64$であるので、$\cos^2\theta_w\approx 3/4$として概算すると$\alpha=(4\cos^4\theta_w-4\cos^2\theta_w+3)/(8\cos^4\theta_w+4\cos^2\theta_w)\approx 0.3$となり、$m_h=v\sqrt{\alpha}g\approx 87.6\mathrm{Gev}$と計算されるが、これは、実測値の$m_h\approx 126\mathrm{Gev}$に比べるとかなり小さい（因みに$g=g'$とした際、$\alpha=1/2$になることを示したが、その際には$m_h\approx 113.1\mathrm{Gev}$と計算される）[6]。このように、非可換幾何学による結合定数の間の関係は、実験結果と比較可能であり、実験値に合致しないものではあるが、物理学的に興味深いことである。Connes 自身は、これよりもずっと洗練された方法で、クォーク質量なども考慮しながら結合定数の関係を考察し、Higgs 粒子の質量を$m_h\approx 170\mathrm{Gev}$と 2007 年に予言したが（Chamseddine, Connes, Marcolli [2007]）、2018 年の Tevatron の実験によりこの値は排除され、さらに 2012 年の Higggs 粒子の観測に伴う実験結果$m_h\approx 126\mathrm{Gev}$と合わなかった。

6. 結語

本論考で触れることはできなかったが、Connes [1994]（Chapter 6）は、クォークの 3 世代模型における小林・益川行列も統合しつつ、素粒子理論の強い相互作用までも射程に入れた大統一理論$U(1)\times SU(2)\times SU(3)$を非可換リーマン幾何学によって創出しようと試みている。さらに、Connes and Marcolli [2007] (Chapter 1）では、ニュートリノ振動や重力理論なども取り込みながら、現在の標準模型を超える試みもなされている。Connes はこのような非可換幾何学により、Higgs 粒子の質量についても予言したが、2008 年の実験の測定値とはずれていた。そのため、Connes による素粒子理論の標準模型の再構成ついての物理学者からの興味は失われた（Hossenfelder [2018] chap. 7; 邦訳 p. 202）。

とは言うものの、非可換幾何学による素粒子理論の標準模型再構成の試みは、哲学的に非常に興味深いものである。それは、現在の物理学において、現象と標準模型が大いに合致するものの、場の量子論が理解されているとは言えないからである。また、そこに含まれる多くの結合定数も独立に与えられている。数学者 René Thom は、「理解するとは幾何学化することである」（Thom [1983], p. 6）と言っている。また、彼は次のように述べている。

> Dirac は、『量子力学の諸原理 *Principles of Quantum Mechanics*』の序文の中で、量子力学の根底にある概念には直観的内容を与えることが不可能である、ということを無視できることとして切り捨てている。[…] 知的理解 intellection の可能性、すなわち所与の

[6] このあたりのことは、筆者自身の計算によるものなので、検討の余地が大いに残っている。

シェーマを幾何学的に解釈する可能性を欠いているとき、人がとる態度には二つの可能性がある。一つは、そのような状況にもかかわらず、適切なイマージュによって、所与のシェーマに対して直観的正当性を創造していくことを求める可能性である。もう一つは、そのような無理解を仕方ないものとする状況に陥り、その無理解が習慣によって無関心へと変形していってしまう可能性である（Thom [1977], p. 5)。

Connes の試みは、直観的理解の困難な場の量子論に対して、質量を与えるダイナミカルな結合定数を、Dirac 作用素を介して、計量や接続、曲率として捉えて空間概念に取り込み、また、各点上に局所化されえない非可換環の構造を通して、素粒子の標準モデルを幾何学的に理解しようとする試みなのである。

Appendix A サイクリック・コホモロジー cyclic cohomology

非可換微分幾何学において用いられるコホモロジーは、cyclic cohomology であるが、それを定義しておく。複素数$\mathbb{C}$上の代数$\mathcal{A}$を考える。その代数$\mathcal{A}$の$(n+1)$重線形汎関数$C^n(\mathcal{A}):=\mathrm{Hom}(\mathcal{A}^{\otimes(n+1)},\mathbb{C})$を考える。このような$\varphi\in C^n(\mathcal{A})$に対して、全ての$a_j\in\mathcal{A}$について

$$(b\varphi)(a_0,a_1,\dots,a_{n+1}):=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\,\varphi(a_0,a_1,\dots,,a_ja_{j+1},\dots,a_{n+1})$$
$$+(-1)^{n+1}\varphi(a_{n+1}a_0,a_1,\dots,,a_n)$$

を満たすコバウンダリー（coboundary）作用素 b を与えた複体を Hochschild complex (C^*,b)、また、$b\varphi=0$を満たす$\varphi\in C^n(\mathcal{A})$のことを Hochschid n-cocycle と言う。ここで、常に$b^2=0$となることを確認しておく。この Hochschild complex から生成されるコホモロジーのことを$\mathcal{A}$ の Hochschild cohomology と言い、$HH^*(\mathcal{A})$と書く。

さらに、この Hochschild complex の部分複体で、

$$\varphi(a_1,\dots,a_n,a_0)=(-1)^n\varphi(a_0,a_1,\dots,a_n)$$

を満たすものを考える。ここで、

$$(\lambda\varphi)(a_0,a_1,\dots,a_n):=(-1)^n\varphi(a_n,a_0,a_1,\dots,a_{n-1})$$
$$(b'\varphi)(a_0,a_1,\dots,a_{n+1}):=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\,\varphi(a_0,a_1,\dots,a_ja_{j+1},\dots,a_{n+1})$$

となる$\lambda: C^n(\mathcal{A})\to C^n(\mathcal{A})$と$b': C^n(\mathcal{A})\to C^{n+1}(\mathcal{A})$を考えると、$(1-\lambda)b=b'(1-\lambda)$を満たすことが確かめられる。そこで、$C_\lambda^n(\mathcal{A})=\ker(1-\lambda)$と設定すると、$bC_\lambda^n(\mathcal{A})\subset C_\lambda^{n+1}(\mathcal{A})$となるので、$b$ を作用させることによって、

$$C_\lambda^0\xrightarrow{b}C_\lambda^1\xrightarrow{b}C_\lambda^2\xrightarrow{b}\cdots$$

という複体ができる。このようにして構成される Hochschild complex の部分複体を cyclic complex と言い、(C_λ^*,b)と記す。また、この cyclic complex のコホモロジーを cyclic cohomology と言い、$HC^*(\mathcal{A})$と記す。この cyclic cohomology の cocycle、すなわち$(1-\lambda)\varphi=0$と$b\varphi=0$を満たす$\mathcal{A}$上の$(n+1)$重線形汎関数$\varphi\in C_\lambda^n(\mathcal{A})$のことを cyclic n-cocycle と呼ぶ。

ここで、滑らかで向きづけられた n 次元閉（境界のないコンパクトな）多様体X上の複素数$\mathbb{C}$上に値をとる滑らかな関数の生成する環$\mathcal{A} = C^{\infty}(X)$を考える。関数$f_j \in \mathcal{A}$ $(j = 0,1,\ldots,n)$についての$\varphi \in C^n(\mathcal{A})$を、$X$上での積分

$$\varphi(f_0, f_1, \ldots, f_n) \coloneqq \int_X f_0 df_1 \wedge \ldots \wedge df_n$$

として設定すると、b の定義から$(b\varphi)(f_0, f_1, \ldots, f_n) = 0$となること、すなわち$b\varphi = 0$となることから、$\varphi$が$\mathcal{A}$上の Hochschild n-cocycle となっていることが分かる。一方、多様体 X 上の r 次微分形式を$\Omega^r(X)$として、その全体を

$$\Omega^*(X) = \bigoplus_{r=0}^{n} \Omega^r(X)$$

とおく。そこで、通常の微分位相幾何学における作用素 d を de Rham 微分$d\colon \Omega^r(X) \to \Omega^{r+1}(X)$とすることで、de Rham cohomology が生成される。多様体Xに境界がないことを考慮して、ストークス（Stokes）の定理を用いると、X上の de Rham cohomology はX上に定義された環$\mathcal{A} = C^{\infty}(X)$の cyclic cohomology となっていることが分かる。すなわち、

$$\int_X d(f_n f_0 df_1 \wedge \ldots \wedge df_{n-1}) = \int_X (f_n df_0 \wedge df_1 \wedge \ldots \wedge df_{n-1} - (-1)^n f_0 df_1 \wedge \ldots \wedge df_{n-1} \wedge df_n)$$

という一般に成り立つ等式の左辺は、ストークスの定理より 0 となるが、右辺が 0 であることは環$\mathcal{A}$が cyclic 複体となっていることを意味している（Connes [1994] III. 1; Khalkhali [2013], Chapter 3; 原田 [2024] Appendix Q）。

Appendix B Dixmier trace

ヒルベルト空間$\mathcal{H}$上のコンパクト作用素 T について$|T| = (T^*T)^{1/2}$の固有値$\mu_n(T)$を考える。ここで、スペクトルの値が 0 以上の実数値であるコンパクト作用素 T の$\mu_n(T)$についての和を考え、

$$\sigma_N(T) = \sum_{n=0}^{N-1} \mu_n(T)$$

とする。N を無限大にもっていくと、対数発散する可能性があるため、$\log N$で割って、極大フィルターωによる極限をとって、

$$\mathrm{Tr}_{\omega}(T) = \mathrm{Lim}_{\omega} \frac{1}{\log N} \sigma_N(T)$$

とし、これを Dixmier trace と呼ぶ（Connes [1994] IV. 2β, Definition 2）。すなわち、Dixmier trace とは、$1/n$のオーダーで収束する対角項の$1/N$のオーダーまでの和を$\log N$ で測ったトレースの極限のことである。

この Dixmier trace は次の 4 つの性質を満たす。

A）**正値性**　Tが正作用素の場合、$\mathrm{Tr}_{\omega}(T) \geq 0$となる。

B）**有限性**　$|T|$の固有値が$\sum_{n=0}^{N-1} \mu_n(T) = O(\log N)$を満たす場合、$\mathrm{Tr}_{\omega}(T) < \infty$となる。

C）**共変性**　いかなるユニタリー作用素 Uに対しても$\mathrm{Tr}_\omega(UTU^*) = \mathrm{Tr}_\omega(T)$となる。

D）**消滅性**　Tがトレースクラスの作用素の場合、$\mathrm{Tr}_\omega(T) = 0$となる。

このうち性質 D)は、T の有限階の揺らぎ、さらにはトレースクラスの揺らぎに対して、$\mathrm{Tr}_\omega(T)$が不変であることを意味している（Connes [1994] VI. 1)。

文献

CHAMSEDDINE, Ali H.; CONNES, Alain; MARCOLLI, Matilde [2007], "Gravity and the standard model with neutrino mixing". Advances in Theoretical and Mathematical Physics. 11 (6): 991–1089. arXiv:hep-th/0610241.

CONNES, Alain [1994], *Noncommutative Geometry*, New York/Tokyo, Academic Press.

CONNES, Alain; MARCOLLI, Maltilde [2007], *Noncommutative Geometry, Quantum Fields and Motives*, American Mathematical Society.

HIGSON, N.; Roe, J. [2000], *Analytic K-homology*, Oxford/New York, Oxford University Press.

HOSSENFELDER, Sabine [2018], *Lost in Math: How Beauty Leads Physics Astray,* Hachette Book Group; 邦訳 『数学に魅せられて、科学を見失う』、吉田三知世訳、みすず書房、2021。

KHALKHALI, M. [2013], *Basic Noncommutative Geometry, second edition*, European Mathematical Society, Zurich.

RIEMANN, Bernhard [1854], *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*; 邦訳 [2013]『幾何学の基礎をなす仮説について』菅原正巳訳、ちくま学芸文庫。

SCHWARTZ, D. Matthew [2014], *Quantum Field Theory and the Standard Model*, Cambridge University Press.

THOM, René [1977], *Stabilité structurelle et morphogenèse*, Paris, Inter Editions, deuxième édition.

-[1983] *Paraboles et catastrophes: Entretiens sur les mathématiques, la science et la philosophie réalisés par Giulio Giorello et Simona Morini*, coll. «Champs», 186, Paris, Flammarion.

原田雅樹 [2023], 「Atihah-Singer の指数定理とその非可換化」、『数理物理研究 II　特集 量子』、数理物理出版会、pp. 169-233。

-[2024], 『量子と非可換のエピステモロジー－数学と物理学における概念と実在』、東京大学出版会。