二次元共形場理論とオペラッド

(Two dimensional Conformal Field Theory and operad)

理化学研究所　森脇 湧登

本稿では [Mo1] に基づき、二次元共形場理論に現れる operad 構造を簡潔に概観する。[1]

1　頂点作用素代数

頂点作用素代数とは大雑把にいって点付きリーマン球面のなす operad の上の代数である [Hu3]。複素構造を忘れて位相的な operad と思った場合は E_2 operad と思えるため、E_2 algebra をより「硬く」したものが頂点作用素代数と思ってよい。

E_2 operad の二項演算 (パンツ) は、三点付きリーマン球面に対応する。リーマン球面の正則自己同型群は $\mathrm{PSL}_2\mathbb{C}$ であり、その作用を使うとこの三点を $(0, z, \infty) \in (\mathbb{C}P^1)^3$ に正規化できる。

頂点作用素代数はこのような複素構造 $(0, z, \infty)$ に依存した積

$$V \otimes V \to V((z)), \quad a \otimes b \mapsto a \cdot_z b = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n b z^{-n-1}$$

を持つ代数である [B, FLM]. ここで $V = \bigoplus_{n \geq 0} V_n$ は $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-graded vector space である.

E_2 代数の類似であるので積は二次元の空間の中で解析接続をすると「可換」である。$\mathrm{PSL}_2\mathbb{C}$ は $(\mathbb{C}P^1)^3$ に 3-transitive に作用しているため、実際は $(0, 1, \infty)$ に正規化できるのだが、頂点作用素代数の代数構造は $\mathrm{PSL}_2\mathbb{C}$ invariant ではなく、r だけスケール変換すると r^k だけおつりが来る。k は積に現れる V のベクトルの $\mathbb{Z}$-grading (spin と呼ばれる) に応じて決まっており、それにより上記の expansion が得られる.

頂点作用素代数の加群は通常の結合代数の加群と同様に z に依存した積

$$V \otimes M \to M((z))$$

で結合法則を満たしているものとして定義される [FLM]。

また頂点作用素代数の加群の間には (logarithmic) intertwining operator と呼ばれる積が定義される [FLM, Mi1, Mi2]:

$$M_1 \otimes M_2 \to M_3((z^{\mathbb{R}}, \log z)), \quad m_1 \otimes m_2 \mapsto \sum_{r \in \mathbb{C}, i \geq 0} m_1(r, i) m_2 z^{-r-1} (\log z)^i$$

V 自身は $\mathbb{Z}$-graded であった。この grading は $\mathrm{PSL}_2\mathbb{C}$ の中の diagonal の作用の固有空間分解によって定まっている。また一般に加群は一般固有空間に分解し grading は任意の複素数が現れるうる

$$M = \bigoplus_{h \in \mathbb{C}} M_h.$$

M_h が全て固有空間になる場合は $\log z$ の項は現れない。また expansion の中の z のべきはここで現れる固有値 h で決まる。

V 加群 $M_0, M_1, \ldots, M_r$ とベクトル $a_0^* \in M_0^\vee$ と $a_i \in M_i$ が与えられると、それらの積を考えることができる:

$$\langle a_0^*, a_1 \cdot_{z_1} a_2 \cdot_{z_2} \cdots a_r \cdot_{z_r} \rangle \in \mathbb{C}[[z_1^{\mathbb{C}}, \ldots, z_r^{\mathbb{C}}]][\log z_1, \ldots, \log z_r]. \tag{1}$$

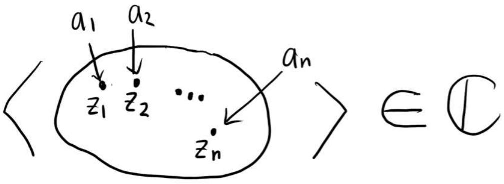

図 1:

物理的にはこれは図 1 にあるようにリーマン球面の点 z_i に a_i で表される state を挿入した状態の期待値 (振幅) を考えていることに対応する.

$$X_r(\mathbb{C}) = \{(z_1, \ldots, z_r) \in \mathbb{C}^r \mid z_i \neq z_j\}$$

を r 点の配位空間とする。[Mo1, 定理 4.22] において示した、より一般的な結果から次が従う:

Proposition 1.1 *$M_1, \ldots, M_r$ が C_1-cofinite という有限性を満たす加群であるならば (1) の級数は $\{|z_1| > |z_2| > \cdots > |z_r|\}$ を満たす $X_r(\mathbb{C})$ の開領域において絶対収束し、多価の正則関数を定める.*

これは次のように分かる. C_1-cofinite 条件を満たす $M_0, M_1, \ldots, M_r$ に対して、我々は $X_r(\mathbb{C})$ 上の holonomic D-module を対応させることができる. つまり functor

$$(\underline{V\text{-mod}_{\mathrm{f}}})^{\mathrm{op}} \times (\underline{V\text{-mod}_{\mathrm{f}}})^r \to \text{holonomic } \underline{D_{X_r}\text{-mod}}$$
$$(M_0^\vee, M_1 \ldots, M_r) \mapsto D_{M_0, M_1, \ldots, M_r}^{M_0^\vee}$$

を得る。ただし $\underline{V\text{-mod}_{\mathrm{f}}}$ は C_1-cofinite な V 加群のなす圏。以下 $(M_0^\vee, M_1 \ldots, M_r)$ を $M_{[0;r]}$ と略記する。

$$CB_{M_{[0;r]}} = \mathcal{H}\mathrm{om}(D_{M_{[0;r]}}, O_{X_r})$$

を D_{X_r} 加群 $D_{M_{[0;r]}}$ の正則関数解のなす sheaf とする。これは共形ブロックと呼ばれる [NT]. (1) は $D_{M_{[0;r]}}$ の命題で与えられた領域上の正則関数解を与えており、$CB_{M_{[0;r]}}$ の section になっている。

共形ブロックは locally constant sheaf であるから、配位空間の fundamental groupoid $\Pi_1(X_r(\mathbb{C}))$ が作用する。$\{X_r(\mathbb{C})\}_{r \geq 0}$(の適切なコンパクト化) には glueing によって operad の構造が入る。図 2 にあるように実は共形ブロックたちはこうした operad 構造に整合的に振舞うはずである.

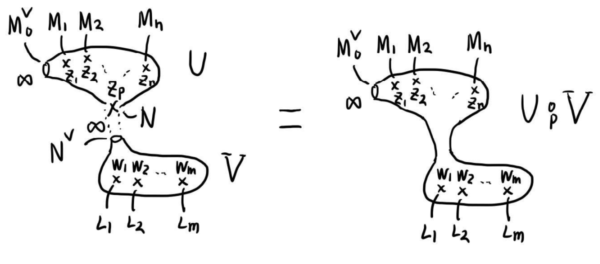

図 2:

実際、筆者は [Mo1, 定理 5.11] でこうした glueing を構成した. これは [NT] の結果の圏論的な精密化である。また [NT] では頂点作用素代数 V が regular であるというとても強い条件を課していたが、我々の論文では任意の頂点作用素代数に対して、加群が C_1-cofinite であるという条件のみで glueing を構成した。本

[1] 2 次元共形場理論と頂点作用素代数の関係のより詳しい日本語の解説は [Mo2] を参照されたい

来であればこの glueing が operad 構造としかしこの glueing が operad 構造と compatibility であることについては topological に証明するにとどめた。

これは以下に説明する理由による: $\{X_r(\mathbb{C})\}_{r\geq 0}$ の" コンパクト化" に入る operad はそのコンパクト化の種類によって

1. Deligne-Mumford operad

2. Fulton-MacPherson operad

3. Huang の tubed Riemann sphere のなす partial operad [Hu3]

などがある。Deligne-Mumford stack のなす operad 構造との compatiblity は、筆者の考えでは axiomatic QFT における cluster decomposition property と対応しており、共形場理論としては持っている情報が少ない (AQFT において cluster decomposition は unitary 性などの下、真空の一意性と同値である)。

しかし共形場理論はもっと細かい構造を見ることができる。見るべき情報を最大元見ている一つの例は Huang 氏の tubed Riemann sphere のなす partial operad であり、重要な仕事であるが、これは formal に定義されているため扱いがとても難しい。

Fulton-MacPherson operad は Haung 氏の operad と Deligne-Mumford operad の中間であるが、どういった operad を選ぶべきかという問いは、共形場理論を functorial QFT と思ったときに target category をどう定義するかと関わっている。これは現時点では答えが分かっていない問いである。そのため、[Mo1] では硬い operad の構造には拘らずに、簡潔に主張が述べられる部分を取り出した。それが以下に説明する主定理である.

fundamental groupoid を取る関手は対称モノイダル関手なので $\{\Pi_1(X_r(\mathbb{C}))\}_{r\geq 0}$ は groupoid の圏における operad 対象になる。この operad と equivalent な operad を colored parenthesized braid operad (CPaB operad) という [T]。我々は共形ブロックの glueing が 表現圏に CPaB algebra の構造を定めることを示した。

Theorem 1.1 共形ブロックの *glueing* により $\underline{V\text{-}mod_f}$ には *CPaB operad* が *weak 2-categorial* に作用する.

[F] およびその一般化である [Mo1, 命題 2.24 と命題 2.25] によると、$\mathbb{C}$-linear category C に、CPaB operad の strong 2-categorical な作用を与えることと C 上の組紐テンソル圏の構造を与えることは同値である.

Theorem 1.2 V が *regular* 頂点作用素代数ならば、上記の作用は *strong 2-categorical* である。とくに $\underline{V\text{-}mod_f}$ は *balanced braided tensor category* になる。

定理 1.2 は [Hu1, Hu2, Hu3, HL1, HL2, HL3] という Huang 氏と Lepowsky 氏による一連の論文で得られた結果の別証明を与える。この論文は 800 ページ以上に渡る論文であり、我々の論文はそれを簡潔にした。大きな違いは intertwining operator を用いずに、[NT] に習い幾何でできる部分は幾何学的に扱った点である。また 2-category を用いて構造を記述している点 (これは 2 次元の場の量子論を扱う上で自然である) や factorization の証明方法などが本質的に異なる。

参考文献

[B] R.E. Borcherds, Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **83**, 1986, (10), 3068–3071.

[F] B. Fresse, Homotopy of operads and Grothendieck-Teichmüller groups. Part 1, Mathematical Surveys and Monographs, 217, American Mathematical Society, Providence, RI, 2017.

[FLM] I. Frenkel, J. Lepowsky, and A. Meurman, Vertex operator algebras and the Monster, Pure and Applied Mathematics, **134**, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1988.

[FHL] I. Frenkel, Y. Huang and J. Lepowsky, On axiomatic approaches to vertex operator algebras and modules, Mem. Amer. Math. Soc., **104**, 1993, (494).

[Hu1] Y.-Z. Huang, A theory of tensor products for module categories for a vertex operator algebra, IV, J. Pure Appl. Alg., **100**, (1995), 173–216.

[Hu2] Y.-Z. Huang, Virasoro vertex operator algebras, (nonmeromorphic) operator product expansion and the tensor product theory, J. Alg., **182**, (1996), 201–234.

[Hu3] Y.-Z. Huang, Two-dimensional conformal geometry and vertex operator algebras, Progress in Mathematics, **148**, Birkhauser Boston, Inc., Boston.,(1997).

[HL1] Y.-Z. Huang and J. Lepowsky, A theory of tensor products for module categories for a vertex operator algebra, I, Selecta Mathematica (New Series), **1**, 1995, 699–756.

[HL2] Y.-Z. Huang and J. Lepowsky, Vertex operator algebras and operads, 145–161, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1993

[HL2] Y.-Z. Huang and J. Lepowsky, A theory of tensor products for module categories for a vertex operator algebra, II, Selecta Mathematica (New Series), **1**, 1995, 757–786.

[HL3] Y.-Z. Huang and J. Lepowsky, A theory of tensor products for module categories for a vertex operator algebra, III, J. Pure Appl. Alg., **100**, 1995, 141–171.

[Mi1] A. Milas, Weak modules and logarithmic intertwining operators for vertex operator algebras, Contemp. Math., **297**, 201–225.

[Mi2] A. Milas, Logarithmic intertwining operators and vertex operators, Comm. Math. Phys., **277**, 2008, (2), 497–529.

[Mo1] Y. Moriwaki, Vertex operator algebra and colored parenthesized braid operad, arXiv:2209.10443.

[Mo2] 二次元共形場理論の定式化とその構成, 第 67 回代数学シンポジウム報告集, (2023), 10-18.

[NT] K. Nagatomo and A. Tsuchiya, Conformal field theories associated to regular chiral vertex operator algebras. I. Theories over the projective line, Duke Math. J., 128, 2005, (3), 393–471.

[T] D. E. Tamarkin,, Formality of chain operad of little discs, Lett. Math. Phys., 66, 2003, (1-2), 65–72.