正則性可積分性構造によるBPHZ定理の証明

大阪大学大学院基礎工学研究科　星野 壮登 *

本稿では，Bailleul–Hoshino [1] で扱われている問題の背景や，[1] の主定理と証明の概略を解説する．

1　背景

繰り込みを伴う確率偏微分方程式の研究は近年特に盛んである．繰り込みとは場の量子論などで用いられる考え方で，ある量を計算しようとすると値が発散してしまうとき，発散の原因となる項を打ち消すことによって，何か意味のある値を得ようとする操作のことをいう．典型的な例としては，Parisi–Wu [23] による「確率過程量子化」のモデルの一つである，動的 Φ^4_d 模型などと呼ばれる次のような確率偏微分方程式がある．

$$(\partial_t - \Delta)\Phi(t,x) = -\Phi(t,x)^3 + \xi(t,x) \qquad (t>0,\ x\in\mathbb{R}^d). \tag{1.1}$$

右辺の $\xi(t,x)$ は**時空ホワイトノイズ**と呼ばれる確率変数で，次の形式的な共分散構造をもつ平均 0 の Gauss 確率場として定義される．

$$\mathbb{E}[\xi(t,x)\xi(s,y)] = \delta(t-s)\delta(x-y).$$

厳密には，$\xi(t,x)$ は固定した t,x に対しては意味をもたず，ランダムな超関数としてのみ定義される．この ξ の存在により，$d\ge 2$ のとき解 Φ は関数ではなく超関数となるため，その三乗 Φ^3 を標準的な意味で定義することはできない．そのため，形式的に

$$\Phi^3 - \infty\Phi$$

と表される非自明な変形を施した上で理解する必要がある．もう少し正確に述べると，まず Φ を十分性質のよい関数列 $\{\Phi_n\}_{n=1}^\infty$ によって近似し，関数列 $\{\Phi_n^3 - C_n\Phi_n\}_{n=1}^\infty$ が適当な超関数に収束するような，ランダムではない発散数列 $\{C_n\}_{n=1}^\infty$ を適切に選ぶ．このように発散を上手く制御する操作が繰り込みである．動的 Φ^4_d 模型 (1.1) の繰り込み可能性は，$d=2$ の

*Email: hoshino@sigmath.es.osaka-u.ac.jp

場合に Da Prato–Debussche [9] によって，$d=3$ の場合に Hairer [12] によって証明されている[1]．特に Hairer が導入した**正則性構造 (regularity structure) 理論**は，動的 Φ^4_d 模型だけでなく多くの放物型確率偏微分方程式に適用可能なものであり，Kardar–Parisi–Zhang 方程式 [11, 15] や，放物型 Anderson 模型 [13, 19], 動的 $\Phi^4_{4-\delta}$ 模型 [8], 動的 sine-Gordon 模型 [16, 7] などにも応用されている．

確率偏微分方程式の繰り込み可能性は，形式的には次のように「証明」される．放物型偏微分方程式 (1.1) は，Duhamel の原理により，積分作用素 $If(t)=\int_0^t e^{(t-s)\Delta}f(s)ds$ を用いて次のように変形される．

$$\Phi(t,x)=e^{t\Delta}\big(\Phi(0,\cdot)\big)(x)+I(-\Phi^3+\xi)(t,x).$$

以下，初期値は重要ではないので $\Phi(0,\cdot)=0$ としておく．このような積分方程式の解は，$\Phi_{(1)}=I(\xi)$ を第一近似として，関数列 $\{\Phi_{(n)}\}$ を $\Phi_{(n+1)}=I(-\Phi_{(n)}^3+\xi)$ と帰納的に定義することにより，形式的には ξ の汎関数（以下，**ノイズ汎関数**という）の無限和として表される．

$$\Phi=I(\xi)-I(I(\xi)^3)+3I(I(\xi)^2I(I(\xi)^3))+\cdots. \tag{1.2}$$

従って，Φ^3 も形式的には次のような表示をもつ．

$$\Phi^3=I(\xi)^3-3I(\xi)^2I(I(\xi)^3)+\cdots.$$

右辺の各項はホワイトノイズの明示的な多重線形汎関数であるから，よく知られた Wick 積の手法を用いることができ，例えば “$I(\xi)^3-\infty I(\xi)$” のように繰り込みを直接計算することができる．各ノイズ汎関数に対して繰り込みを行い，それらの総和をとれば，最終的に “$\Phi^3-\infty\Phi$” という繰り込み形になると期待できる．もちろん以上の議論は形式的なものであり，数学的には (1.2) のような級数表示の収束性などの問題がある．$d=2$ の場合の数学的正当化は Da Prato–Debussche [9] によって行われているが，実はこの場合は第一近似 $\Phi=I(\xi)+\cdots$ だけで十分である．このとき，剰余項 $\Psi=\Phi-I(\xi)$ は Φ よりも正則性が少しよくなっており，Ψ についての方程式は数学的に well-posed となる．しかし $d=3$ の場合は，同様の分解をいくら行っても剰余項の正則性が改善されなくなり，Da Prato–Debussche の方法では上手くいかなかった．この問題を解決したのが Hairer [12] である．

Hairer の理論の仕組みを簡単に述べる．Hairer は (1.2) のような「大域的」な表示ではなく，時空間の各点 $z=(t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^3$ の周りで「局所的に」成り立つ，次のような表示を用いた．

$$\Phi(w)=\sum_{\tau\in\mathcal{F}}\phi_\tau(z)(\Pi_z\tau)(w)+R_z(w)\qquad(w\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^3). \tag{1.3}$$

[1] 正確には，[9, 12] では x の定義域がトーラス $\mathbb{T}^d$ の場合を考えている．$\mathbb{R}^d$ 全体での方程式の繰り込み可能性は，$d=2$ では [21], $d=3$ では [10] などによって示されている．

ここで，$\mathcal{F}$ は有限個のノイズ汎関数の族であり，$\phi_\tau(z)$ は適当な係数，$\Pi_z\tau$ はノイズ汎関数 τ の点 z における（ある階数までの）Taylor 展開の剰余項を表す．(1.3) の剰余項 $R_z(w)$ は，$w \to z$ のとき十分速く 0 に収束するようなものである．このような解の局所表示は，確率微分方程式の文脈でも自然に現れる．ラフパス理論では確率微分方程式 $dX_t = \sigma(X_t)dB_t$ の解を

$$X_t = X_s + \sigma(X_s)(B_t - B_s) + O(|t-s|^{1-\varepsilon})$$

（$\varepsilon > 0$ は十分小さい）という被制御パスの形で表すが，ここで $\mathcal{F} = \{1, B\}$，$\Pi_s 1 = 1$，$(\Pi_s B)(\cdot) = B_{(\cdot)} - B_s$ とおけば (1.3) の形が現れる．さて，Hairer は解の局所表示 (1.3) を用いて動的 Φ_3^4 模型の繰り込み可能性を証明したが，その証明は大きく三つのパートに分けられる．

(1) **確率論パート**：剰余項 $\Pi_z\tau$ たちの三個[2]以下の積が（繰り込みを施した上で）定義できることを示す．

(2) **実解析パート**：(1) が上手くいったと仮定して，局所表示 (1.3) をもつ超関数 Φ の三乗が（これも繰り込みを施した上で）定義できることを示す．また，動的 Φ_3^4 模型 (1.1) を係数 ϕ_τ たちの方程式として解釈し直し，それらが well-posed であることを示す．

(3) **代数パート**：(1)(2) が上手くいくために必要な，τ たちの間の代数的な関係式を導く．

これらのパートのうち，(2) は Hairer [12] によって，(3) も Bruned–Hairer–Zambotti [5] や Bruned–Chandra–Chevyrev–Hairer [4] によって，ほとんど一般の（定数係数）放物型確率偏微分方程式に適用可能な形で完成されている．しかし (1) については，そのような一般的な形で主張を示すことは非常に困難であった．以下，(1) の主張を，古典的な繰り込み理論に因んで **BPHZ (Bogoliubov–Parasiuk–Hepp–Zimmerman) 定理**と呼ぶことにする．

確率偏微分方程式の文脈における BPHZ 定理の証明の歴史を振り返る．多くの場合用いられてきたのは，各ノイズ汎関数を「Feynman 図」と呼ばれるグラフと対応させ，組み合わせ論的な計算に持ち込むという方法である．例えば動的 Φ_3^4 模型の場合は 10 個のノイズ汎関数が現れるが，Hairer [12] はそれらのモーメントをグラフを用いて直接計算し，繰り込み可能性を確かめている．この方法は基本的かつ確実なものであるが，一つの方程式から得られるノイズ汎関数のグラフ的構造が非常に多種多様であるため，繰り込み可能性を一度に示すことは難しかった．Chandra–Hairer [6] はグラフによる計算を一般化し，ノイズ汎関数が繰り込み可能であるための十分条件を与えているが，その論文は 129 ページと非常に長く，議論も抽象的で難解である．しかし最近になって，ノイズが満たす **Poincaré 不等式**（2.2 節参照）に基づく帰納的な証明が考えられるようになった．最初に提唱したのは Linares–Otto–Tempelmayr–Tsatsoulis [20] で，正則性構造とは異なる枠組みを用いてはいるが，ある準線

[2]三次の非線形項を考えているためである．必要な演算の種類は方程式によって異なる．

形確率偏微分方程式に対する BPHZ 定理が，グラフを用いない帰納的な方法で証明されている．同様の証明を正則性構造の枠組みで行い，一般の（定数係数）放物型確率偏微分方程式に適用可能な形で示したのが，Hairer–Steele [17] や Bailleul–Hoshino [1] である．本稿では後者の結果について解説する．

この章の最後に，[17] と [1] の違いについて述べておく．いずれの場合も既存の正則性構造理論に新しい要素を加える必要があるのだが，その仕方が異なっている．[17] で導入されたのは pointed modelled distribution という概念であるが，これはラフパス理論の言葉で説明すれば，二変数関数であったラフパスとともに，被制御パスも二変数関数化するというものである．このような変更は実解析パートの中核をなす「再構成定理」などの証明に本質的な修正を必要とする．一方，[1] で導入されたのは，正則性構造に Besov ノルムの要素を加えた，**正則性可積分性構造 (regularity-integrability structure)** という代数的な枠組みである．再構成定理などの Besov ノルムへの拡張は，[14, 2] でもなされているように比較的容易であり，理論の大幅な修正を必要としない．

2　設定と主定理

問題設定と主定理を説明するための準備を 2.1 節から 2.4 節で行い，2.5 節で主定理を述べる．

2.1　Besov ノルムに関する記号

熱作用素 $\partial_t - \Delta$ は放物型スケール変換 $(t,x) \mapsto (\lambda^2 t, \lambda x)$ $(\lambda > 0)$ に対してよく振る舞うため，時間変数と空間変数が異なる重みをもつような関数空間を考えると便利である．以下，時空変数を $x = (x_i)_{i=0}^d \in \mathbb{R}^{1+d}$ と表す．x_0 は時間変数を，$x_1, \dots, x_d$ は空間変数を表す．時空変数 $x \in \mathbb{R}^{1+d}$ と多重指数 $k = (k_i)_{i=0}^d \in \mathbb{N}^{1+d}$ に対し，以下の記号を用いる．

$$\|x\|_s := |x_0|^{1/2} + \sum_{i=1}^d |x_i|, \qquad |k|_s := 2k_0 + \sum_{i=1}^d k_i, \qquad x^k := \prod_{i=0}^d x_i^{k_i}.$$

偏微分作用素 $(\partial_{x_0} - \Delta)(\partial_{x_0} + \Delta)$ によって生成される半群を $\{Q_t\}_{t>0}$ と表す．ここで，$\Delta = \sum_{i=1}^d \partial_{x_i}^2$ は空間変数に関するラプラシアンである．すなわち，Q_t は急減少関数

$$(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_d) \mapsto e^{-t(\xi_0^2 + (\xi_1^2 + \cdots + \xi_d^2)^2)}$$

の逆 Fourier 変換 p_t との畳み込み $Q_t f = p_t * f$ として表される積分型作用素である．

本稿ではあまり用いられないが，放物型スケール変換に対応した Besov ノルムの定義を述べておく．後の定義 2.8 における「モデルの解析的条件」が，Besov ノルムの拡張となっているためである．

- $\alpha \in (0,1)$, $p \in [1,\infty]$ とする．可測関数 $f : \mathbb{R}^{1+d} \to \mathbb{R}$ の $B^{\alpha}_{p,\infty}$ ノルムを次のように定義する．

$$\|f\|_{B^{\alpha}_{p,\infty}} = \|f\|_{L^p} + \sup_{\|y\|_s \le 1} \frac{\|f(x+y) - f(x)\|_{L^p_x}}{\|y\|_s^{\alpha}}.$$

（二変数可測関数 $(x,y) \mapsto F(x,y)$ に対し，y を固定して x についての可測関数とみた場合の L^p ノルム $\|F(\cdot,y)\|_{L^p}$ を $\|F(x,y)\|_{L^p_x}$ と表す.）

- $\alpha < 0$, $p \in [1,\infty]$ とする．緩増加超関数 $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{1+d})$ の $B^{\alpha}_{p,\infty}$ ノルムを次のように定義する．

$$\|f\|_{B^{\alpha}_{p,\infty}} = \sup_{0<t\le 1} t^{-\alpha/4} \|Q_t f\|_{L^p}.$$

t の右肩に現れる定数 4 は，p_t がスケール変換

$$p_t(x) = t^{-(d+2)/4} p_1\big((t^{-1/4})^2 x_0, t^{-1/4} x_1, \dots, t^{-1/4} x_d\big)$$

によって得られることから来ている．

ノイズ汎関数は一般に $\mathbb{R}^{1+d}$ 全体で有界ではないため，指数型重み関数 $w_c(x) := e^{-c\|x\|_s}$ $(c > 0)$ 付きの L^p ノルム

$$\|f\|_{L^p(w_c)} := \|f w_c\|_{L^p}$$

をよく用いる．上記の Besov ノルムの定義において，L^p を $L^p(w_c)$ に置き換えたものを $B^{\alpha}_{p,\infty}(w_c)$ と表す.

2.2　Poincaré 不等式

ノイズが満たす Poincaré 型の不等式を定式化する．[1] の結果は同様の不等式を満たす任意のノイズに対して成り立つが，簡単のためホワイトノイズの場合のみを述べる．

$B \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{1+d})$ は可分 Banach 空間で，$H = L^2(\mathbb{R}^{1+d})$ は B に連続かつ稠密に埋め込まれているとする．また，$\mathbb{P}$ は B 上の Borel 確率測度で，確率変数 $\xi(\omega) = \omega$ $(\omega \in B)$ は $\mathbb{P}$ の下で時空ホワイトノイズであるとする.（例えば，任意の $\alpha_0 < -\frac{d+2}{2}$ と $c > 0$ に対して，$B = B^{\alpha_0}_{\infty,\infty}(w_c)$ は条件を満たす.[3]）

定義 2.1. 可測関数 $F : B \to \mathbb{R}$ が H**-連続微分可能**であるとは，可測関数 $\nabla_{(\cdot)} F : B \to H^*$ が存在し，任意の $\omega \in B$ と $h \in H$ に対して

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(\omega + th) - F(\omega)}{t} = \nabla_h F(\omega)$$

が成り立つことをいう．$\mathbb{E}[\|F\|^2] + \mathbb{E}[\|\nabla F\|^2_{H^*}] < \infty$ であるような H-連続微分可能関数 F 全体を $\mathbb{D}^{1,2}$ と表す.

[3] $L^\infty(w_c)$ は可分ではないため，厳密には滑らかな緩増加関数全体の完備化とする必要がある．

確率測度 $\mathbb{P}$ は次の **Poincaré 不等式**を満たすことが知られている．証明は [22, Exercise 2.11.1] などを参照せよ．

定理 2.2. 任意の $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ に対して，次の不等式が成り立つ．

$$\mathbb{E}\big[(F-\mathbb{E}[F])^2\big] \le \mathbb{E}\big[\|\nabla F\|_{H^*}^2\big].$$

2.3 正則性可積分性構造

本節では，ノイズ汎関数の族がなす代数的な構造を導入する．1 章で $I(\xi), I(\xi)^3, I(\xi)^2 I(I(\xi)^3)$ といったノイズ汎関数が現れたが，この時点では繰り込みが全く考慮されていなかったため，この時点では単なる「記号」でしかないことに注意が必要である．このような記号としてのノイズ汎関数を実際の超関数と区別するために，以下 $\mathcal{I}(\Xi), \mathcal{I}(\Xi)^3, \mathcal{I}(\Xi)^2\mathcal{I}(\mathcal{I}(\Xi)^3)$ といった表記を用いる．とりあえず，このような記号として「あり得るもの全て」を集めてみよう．

定義 2.3. 集合 $\mathcal{X}$ を，次の規則によって帰納的に定義する．

(1) 記号 $\Xi, \dot{\Xi}, \mathbf{1}, X_0, X_1, \dots, X_d$ は $\mathcal{X}$ に含まれる．

(2) $\mathcal{X}$ の元 τ と，多重指数 $k \in \mathbb{N}^{1+d}$ に対し，$\mathcal{I}_k(\tau)$ と表される記号も $\mathcal{X}$ の元である．

(3) $\mathcal{X}$ の二元 τ, σ に対し，$\tau\sigma$ と表される記号も $\mathcal{X}$ の元である．ただし，次の演算法則を常に仮定する．

$$(\tau\sigma)\eta = \tau(\sigma\eta), \qquad \tau\sigma = \sigma\tau, \qquad \tau\mathbf{1} = \tau.$$

すなわち，$\mathcal{X}$ は $\mathbf{1}$ を単位元とする可換なモノイドである．

各記号の意味と，表記上の注意を述べる．

- X_0 は時間変数 x_0 を，$X_1, \dots, X_d$ は空間変数 $x_1, \dots, x_d$ を表す．多重指数 $k = (k_i)_{i=0}^d \in \mathbb{N}^{1+d}$ に対して $X^k := \prod_{i=0}^d X_i^{k_i}$ と表す．ただし，$X^0 = \mathbf{1}$ であるとする．
- $\mathcal{I}_k$ は積分作用素 I の k 階微分 $I^{(k)} := \partial^k I$ を表す作用素である．$k = 0$ の場合は単に $\mathcal{I}$ と表す．
- $\dot{\Xi}$ は H の元を表す記号である．実際にはノイズ汎関数の一階 H-微分しか考えないため，$\dot{\Xi}$ を高々一つ含む記号のみ考えれば十分である．$\tau \in \mathcal{X}$ に含まれる $\dot{\Xi}$ の個数を $n_{\dot{\Xi}}(\tau)$ と表す．すなわち，$n_{\dot{\Xi}} : \mathcal{X} \to \mathbb{N}$ は次のように定義される写像である．

$$\begin{aligned} n_{\dot{\Xi}}(X^k) = n_{\dot{\Xi}}(\Xi) = 0, &\qquad n_{\dot{\Xi}}(\dot{\Xi}) = 1, \\ n_{\dot{\Xi}}(\mathcal{I}_k(\tau)) = n_{\dot{\Xi}}(\tau), &\qquad n_{\dot{\Xi}}(\tau\sigma) = n_{\dot{\Xi}}(\tau) + n_{\dot{\Xi}}(\sigma). \end{aligned} \tag{2.1}$$

  自然数 m に対し，$\mathcal{X}^{(m)} = \{\tau \in \mathcal{X}\,; n_{\dot{\Xi}}(\tau) = m\}$, $\mathcal{X}^{(\le m)} = \{\tau \in \mathcal{X}\,; n_{\dot{\Xi}}(\tau) \le m\}$ と定義する．

$\dot{\Xi}$ を導入したことで，ノイズ汎関数の H-微分を抽象的に表すことができる．

定義 2.4. 線形写像 $D : \langle \mathcal{X}^{(0)} \rangle \to \langle \mathcal{X}^{(1)} \rangle$ を次のように定義する．

$$
\begin{aligned}
D\Xi &= \dot{\Xi}, & D\tau &= 0 \qquad (\tau \in \{\dot{\Xi}, X^k\}),\\
D\mathcal{I}_k(\tau) &= \mathcal{I}_k(D\tau), & D(\tau\sigma) &= (D\tau)\sigma + \tau(D\sigma).
\end{aligned}
$$

ただし，第三式では写像 $\mathcal{I}_k : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ を線形に拡張している．

[1] の主定理は「ノイズ汎関数の $B^{\alpha}_{p,\infty}$ 型ノルムでの収束」である．ここで目標となる指数 α, p を定める写像を用意する．以下，本稿を通して

$$
\alpha_0 < -\tfrac{d+2}{2}, \qquad \beta_0 \in (0,2)
$$

を満たす実数 α_0, β_0 を固定する．α_0 は時空ホワイトノイズが存在する空間 $B^{\alpha_0}_{\infty,\infty}(w_c)$ の正則性を表す．β_0 は作用素 I が超関数の正則性を 2 だけ上げることに対応しているが，$\beta_0 = 2$ としないのは，**多層 Schauder 評価** ([18, Theorem 5.12]) の証明における技術的な理由による．

定義 2.5. 任意の $\varepsilon \geq 0$ と $p \in [2,\infty]$ に対し，写像 $r_{\varepsilon,p} : \mathcal{X}^{(\leq 1)} \to \mathbb{R}$ を次のように定義する．

$$
\begin{aligned}
&r_{\varepsilon,p}(X^k) = 0, \qquad r_{\varepsilon,p}(\Xi) = \alpha_0 - \varepsilon, \qquad r_{\varepsilon,p}(\dot{\Xi}) = \alpha_0 - \varepsilon + \tfrac{d+2}{p},\\
&r_{\varepsilon,p}(\mathcal{I}_k(\tau)) = r_{\varepsilon,p}(\tau) + \beta_0 - |k|_s, \qquad r_{\varepsilon,p}(\tau\sigma) = r_{\varepsilon,p}(\tau) + r_{\varepsilon,p}(\sigma).
\end{aligned}
$$

また，写像 $i_p : \mathcal{X}^{(\leq 1)} \to [2,\infty]$ を次のように定義する．

$$
i_p(\tau) = \begin{cases} \infty & (n_{\dot{\Xi}}(\tau) = 0), \\ p & (n_{\dot{\Xi}}(\tau) = 1). \end{cases}
$$

目標はノイズ汎関数 τ の収束を $B^{r_{\varepsilon,p}(\tau)}_{i_p(\tau),\infty}$ 型のノルムで示すことである．p を 2 と ∞ の間で動かす理由は，帰納法の最後のステップ（3.3 節）で明らかとなる．ε は，帰納法のいくつかのステップで生じる「正則性の無限小の損失」を表すパラメータである．このような損失は，Kolmogorov の連続性定理においても現れるものである．

さて，$\mathcal{X}$ は「あり得るノイズ汎関数全て」を集めた集合であるが，実際にはこれほど大きな集合を考える必要はない．例えば動的 Φ^4_3 模型の場合は，次の 10 個のノイズ汎関数の収束のみ示せば十分である．

$$
\begin{gathered}
\Xi, \mathcal{I}(\Xi), \mathcal{I}(\Xi)^2, \mathcal{I}(\Xi)^3, \mathcal{I}(\Xi)^2 X_1, \mathcal{I}(\Xi)^2 X_2, \mathcal{I}(\Xi)^2 X_3,\\
\mathcal{I}(\mathcal{I}(\Xi)^3)\mathcal{I}(\Xi), I(\mathcal{I}(\Xi)^2)\mathcal{I}(\Xi)^2, I(\mathcal{I}(\Xi)^3)\mathcal{I}(\Xi)^2.
\end{gathered}
$$

収束を示すべきノイズ汎関数の集合を $\mathcal{F}$ とおき，次の仮定をおく．

仮定 2.6 ([5, Section 5])**.** $\mathcal{F} \subset \mathcal{X}^{(0)}$ は，complete subcritical rule に強く適合する記号全体からなる集合である．

用語の定義は省略する．重要なのは，仮定 2.6 から以下の性質が従うことである．

- ([5, Proposition 5.15]) 任意の $\gamma \in \mathbb{R}$ に対し，$\{\tau \in \mathcal{F}\,;\, r_{0,\infty}(\tau) < \gamma\}$ は有限集合である．
- ([5, Corollary 5.32]) $V = \langle \mathcal{F} \rangle$ は，次節で定義する Γ や R_c などの線形写像について閉じている．

Hairer [12] の用語では，線形空間 V と，線形写像 $\Gamma : V \to V$ で

$$(\Gamma - \mathrm{id})\tau \in \big\langle \{\sigma \in \mathcal{F}\,;\, r_{\varepsilon,\infty}(\sigma) < r_{\varepsilon,\infty}(\tau)\} \big\rangle \qquad (\tau \in \mathcal{F})$$

を満たすものからなる群 G_ε の組 (V, G_ε) は，**正則性構造 (regularity structure)** をなすという．Bailleul–Hoshino [1] ではそれを拡張し，$\mathcal{F}$ とその元の H-微分からなる構造を導入した．

定義 2.7. $\varepsilon \geq 0$, $p \in [2, \infty]$ とする．次の二つの要素からなる組 $\mathscr{W}_{\varepsilon,p} = (W, G_{\varepsilon,p})$ を**正則性可積分性構造 (regularity-integrability structure)** という．

(1) $W = \langle \mathcal{F} \cup \dot{\mathcal{F}} \rangle$ である．ただし，$\dot{\mathcal{F}} \subset \mathcal{X}^{(1)}$ は $D\langle \mathcal{F} \rangle \subset \langle \dot{\mathcal{F}} \rangle$ を満たす最小の集合である．

(2) $G_{\varepsilon,p}$ は，任意の $\tau \in \mathcal{F} \cup \dot{\mathcal{F}}$ に対して

$$(\Gamma - \mathrm{id})\tau \in \big\langle \{\sigma \in \mathcal{F} \cup \dot{\mathcal{F}}\,;\, r_{\varepsilon,p}(\sigma) < r_{\varepsilon,p}(\tau),\ i_p(\sigma) \geq i_p(\tau)\} \big\rangle$$

を満たす線形写像 $\Gamma : W \to W$ からなる群である．

2.4 モデル

記号としてのノイズ汎関数に実際の超関数を対応させる写像を「モデル」という．本節では，モデルの一般的な定義を与えた後で，ホワイトノイズを直接持ち上げたモデルと，自然な繰り込みを行なったモデルを構成する．本節を通して $\varepsilon \geq 0$ と $p \in [2, \infty]$ を固定する．

定義 2.8. 線形写像の族

$$\Pi = \{\Pi_x : W \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{1+d})\}_{x \in \mathbb{R}^{1+d}}, \qquad \Gamma = \{\Gamma_{yx}\}_{x,y \in \mathbb{R}^{1+d}} \subset G_{\varepsilon,p}$$

が与えられ，次の条件 (1)(2) を満たすとき，$M = (\Pi, \Gamma)$ を正則性可積分性構造 $\mathscr{W}_{\varepsilon,p}$ に対する**モデル**という．

(1) **（代数的条件）** 任意の $x, y, z \in \mathbb{R}^{1+d}$ に対して，次の三つの等式が成り立つ．

$$\Pi_x \Gamma_{xy} = \Pi_y, \qquad \Gamma_{xx} = \mathrm{id}, \qquad \Gamma_{xy}\Gamma_{yz} = \Gamma_{xz}.$$

(2) **（解析的条件）** 任意の $\tau \in \mathcal{F} \cup \dot{\mathcal{F}}$ と $c > 0$ に対して，次の二つの量は有限である．

$$\begin{aligned} \|\Pi : \tau\|_{\varepsilon,p;c} &:= \sup_{0<t\le 1} t^{-r_{\varepsilon,p}(\tau)/4} \|Q_t(\Pi_x \tau)(x)\|_{L_x^{ip(\tau)}(w_c)}, \\ \|\Gamma : \tau\|_{\varepsilon,p;c} &:= \sup_{\sigma \in \mathcal{F}\cup\dot{\mathcal{F}}} \sup_{y \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \frac{w_c(y) \|(\Gamma_{(x+y)x}\tau)_\sigma\|_{L_x^{ip(\tau)\ominus ip(\sigma)}(w_c)}}{\|y\|_s^{r_{\varepsilon,p}(\tau)-r_{\varepsilon,p}(\sigma)}}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

ただし，第二式では以下の表記を用いた．

- $\eta \in W$ の $\sigma \in \mathcal{F} \cup \dot{\mathcal{F}}$ に対する成分を $(\eta)_\sigma$ と表す．
- $1 \le q \le r \le \infty$ に対し，$1/s + 1/r = 1/q$ を満たす $s \in [q, \infty]$ を $s = q \ominus r$ と表す．

$M = (\Pi, \Gamma)$ がモデルであるとき，任意の部分集合 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F} \cup \dot{\mathcal{F}}$ に対して以下の量を定義する．

$$\begin{aligned} &\|\Pi : \mathcal{G}\|_{\varepsilon,p;c} := \sup_{\tau \in \mathcal{G}} \|\Pi : \tau\|_{\varepsilon,p;c}, \qquad \|\Gamma : \mathcal{G}\|_{\varepsilon,p;c} := \sup_{\tau \in \mathcal{G}} \|\Gamma : \tau\|_{\varepsilon,p;c}, \\ &\|M : \mathcal{G}\|_{\varepsilon,p;c} := \|\Pi : \mathcal{G}\|_{\varepsilon,p;c} + \|\Gamma : \mathcal{G}\|_{\varepsilon,p;c}. \end{aligned}$$

また，二つのモデル $M^{(1)}, M^{(2)}$ に対して，$\|\Pi^{(1)}, \Pi^{(2)} : \mathcal{G}\|_{\varepsilon,p;c}$ や $\|\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)} : \mathcal{G}\|_{\varepsilon,p;c}$ といった量を，(2.2) における Π_x や $\Gamma_{(x+y)x}$ をそれぞれ $\Pi_x^{(1)} - \Pi_x^{(2)}$ や $\Gamma_{(x+y)x}^{(1)} - \Gamma_{(x+y)x}^{(2)}$ に置き換えることで定義する．

$\Pi_x \tau$ は，τ に対応するノイズ汎関数を x において階数 $r_{\varepsilon,p}(\tau)$ まで Taylor 展開したときの剰余項を表している．Γ は異なる x, y に対する $\Pi_x \tau$ と $\Pi_y \tau$ の間の関係を記述するための作用素である．これらに加え，実際に考えるモデルでは，τ に対応するノイズ汎関数そのものを表す写像 $\mathbf{\Pi}$ も用意されている．

定義 2.9. $\mathscr{W}_{\varepsilon,p}$ に対するモデル $M = (\Pi, \Gamma)$ が**許容される (admissible)**（または M が**被許容モデル**である）とは，各 Π_x, Γ_{yx} が，次の条件 (1)(2) を満たす $\mathbf{\Pi}$ と $\{F_x\}_{x \in \mathbb{R}^{1+d}}$ によって

$$\Pi_x = \mathbf{\Pi} F_x, \qquad \Gamma_{yx} = F_y^{-1} F_x$$

と分解されることをいう．

(1) 線形写像 $\mathbf{\Pi} : W \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{1+d})$ は次式を満たす．

$$(\mathbf{\Pi} X^k)(x) = x^k, \qquad \mathbf{\Pi} \mathcal{I}_k(\tau) = I^{(k)}(\mathbf{\Pi}\tau).$$

(2) 線形写像の族 $\{F_x\}_{x\in\mathbb{R}^{1+d}} \subset G_{\varepsilon,p}$ は次のように定義される．

$$\begin{aligned} F_x X^k &= (X - x\mathbf{1})^k, \qquad F_x\tau = \tau \qquad (\tau \in \{\Xi, \dot{\Xi}\}), \\ F_x(\tau\sigma) &= (F_x\tau)(F_x\sigma), \\ F_x\mathcal{I}_k(\tau) &= \mathcal{I}_k(F_x\tau) - \sum_{|\ell|_s < r_{\varepsilon,p}(\mathcal{I}_k(\tau))} \frac{(X - x\mathbf{1})^\ell}{\ell!} I^{(k+\ell)}(\Pi_x\tau)(x). \end{aligned}$$

ただし，$(X - x\mathbf{1})^\ell = \prod_{i=0}^d (X_i - x_i\mathbf{1})^{\ell_i}$ である．

$\mathscr{W}_{\varepsilon,p}$ に対する被許容モデル全体からなる集合を $\mathscr{M}_{\mathrm{ad}}(\mathscr{W}_{\varepsilon,p})$ と表す．

注意 2.10. 厳密には，I は $\mathbb{R}^{1+d}$ 全体で定義された緩増加超関数に対する作用素であり，1 章で定義した積分作用素 $f \mapsto \int_0^t e^{(t-s)\Delta} f(s)ds$ とは微妙に異なるが，「よい平滑化効果をもつ作用素」の差を除いて等しいものである．詳しくは [1, Section 1] などを参照せよ．

滑らかな緩増加関数 f, g が与えられると，

$$\begin{aligned} (\mathbf{\Pi}^{f,g} X^k)(x) &= x^k, \qquad \mathbf{\Pi}^{f,g}\Xi = f, \qquad \mathbf{\Pi}^{f,g}\dot{\Xi} = g, \\ \mathbf{\Pi}^{f,g}\mathcal{I}_k(\tau) &= I^{(k)}(\mathbf{\Pi}^{f,g}\tau), \qquad \mathbf{\Pi}^{f,g}(\tau\sigma) = (\mathbf{\Pi}^{f,g}\tau)(\mathbf{\Pi}^{f,g}\sigma) \end{aligned} \tag{2.3}$$

によって写像 $\mathbf{\Pi}^{f,g}$ が定まり，さらに $\mathscr{W}_{\varepsilon,p}$ に対する被許容モデル

$$M^{f,g;\varepsilon,p} = (\Pi^{f,g;\varepsilon,p}, \Gamma^{f,g;\varepsilon,p})$$

が $\mathbf{\Pi}^{f,g}$ から構成される[4]．$M^{f,g;\varepsilon,p}$ を f, g の**標準的な持ち上げ**という．同様に時空ホワイトノイズ ξ を持ち上げようとすると，超関数の積をとる際に問題が生じるため，滑らかな関数による近似列 $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ を持ち上げることにする．以下，本稿を通して軟化子 $\{\varrho_n\}_{n=1}^\infty$ を固定する．

定義 2.11. $n \in \mathbb{N}$, $h \in H$ とする．$\xi_n := \xi * \varrho_n$ と $h_n := h * \varrho_n$ の標準的な持ち上げ $M^{\xi_n,h_n;\varepsilon,p}$ を ξ_n に対する**標準的なモデル**という．

標準的なモデルでは繰り込みが考慮されていないため，$n \to \infty$ での収束は期待できない．モデルの被許容性を保ちつつ収束させるために，適当なモデルの変形のクラスを導入する．

定義 2.12. 線形写像 $\Delta : \langle\mathcal{X}\rangle \to \langle\mathcal{X}\rangle \hat{\otimes} \langle\mathcal{X}\rangle$ [5]を次のように定義する．

$$\Delta\tau = \tau \otimes \mathbf{1} \qquad (\tau \in \{\Xi, \dot{\Xi}, \mathbf{1}\}), \qquad \Delta X_i = X_i \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes X_i,$$

[4] 許容されるモデルは写像 $\mathbf{\Pi}$ から一意的に定まる．また，構成されたモデルは ε, p に依存していることに注意せよ．

[5] 無限和を許すテンソル積であるが，詳細については [5, Section 2.3] を参照せよ．

$$\Delta(\tau\sigma) = (\Delta\tau)(\Delta\sigma), \qquad \Delta\mathcal{I}_k(\tau) = (\mathcal{I}_k \otimes \mathrm{id})\Delta\tau + \sum_{\ell\in\mathbb{N}^{1+d}} \frac{X^\ell}{\ell!} \otimes \mathcal{I}_{k+\ell}(\tau).$$

$\tau \in \mathcal{F}$ のうち，$r_{0,\infty}(\tau) < 0$ であり，かつ $\tau = \mathcal{I}_k(\sigma)$ の形でないようなもの全体を $\mathcal{F}_-$ と表す．関数 $c : \mathcal{F}_- \to \mathbb{R}$ を，$\tau \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_-$ に対しては $c(\tau) = 0$ として，さらに線形に拡張することにより，写像 $R_c^r : W \to W$ を次のように定義する．

$$(R_c^r - \mathrm{id})\tau = (c \otimes \mathrm{id})\Delta\tau.$$

また，写像 $R_c^\times, R_c^r : W \to W$ を次のように帰納的に定義する．

$$\begin{aligned} R_c &= R_c^\times R_c^r, & R_c^\times\tau &= \tau \qquad (\tau \in \{X^k, \Xi, \dot{\Xi}\}), \\ R_c^\times(\tau\sigma) &= (R_c^\times\tau)(R_c^\times\sigma), & R_c^\times\mathcal{I}_k(\tau) &= \mathcal{I}_k(R_c\tau). \end{aligned}$$

命題 2.13 ([3, Proposition 3.16])**.** 滑らかな緩増加関数 f, g から (2.3) によって定義された写像 $\mathbf{\Pi}^{f,g}$ に対し，$\mathbf{\Pi}^{f,g} R_c$ も被許容モデルを定める．

ホワイトノイズの近似列 ξ_n に対し，次の意味で「自然」なモデルの変形が定まる．

定理 2.14 ([5, Theorem 6.18])**.** 定義 2.11 の設定の下，関数 $c_n : \mathcal{F}_- \to \mathbb{R}$ で，任意の $\tau \in \mathcal{F}_-$ に対して

$$\mathbb{E}[(\mathbf{\Pi}^{\xi_n,h_n} R_{c_n}\tau)(x)] = 0 \tag{2.4}$$

を満たすようなものがただ一つ存在する．

標準的なモデルの変形 $\mathbf{\Pi}^{\xi_n,h_n} R_{c_n}$ から定義される被許容モデルを，ξ_n に対する **BPHZ モデル**といい，

$$\hat{M}^{n,h;\varepsilon,p} = (\hat{\Pi}^{n,h;\varepsilon,p}, \hat{\Gamma}^{n,h;\varepsilon,p})$$

と表す．

2.5 主定理

[1] の主定理は，繰り込みを施したモデルの収束に関するものである．簡単のためホワイトノイズに対する BPHZ モデルに限定した結果を述べるが，[1] ではより一般のノイズや，BPHZ モデルより多少広いクラスのモデルも扱われている．

定理 2.15 ([1, Theorem 6]). 全ての $\tau \in \mathcal{F} \setminus \{\Xi\}$ は，次の条件を満たすとする．

$$r_{0,\infty}(\tau) > -\tfrac{d+2}{2}. \tag{2.5}$$

このとき，任意の $p \in [2,\infty]$ と，十分小さい任意の $\varepsilon > 0$ に対して，BPHZ モデルの列 $\{\hat{M}^{n,h;\varepsilon,p}\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathscr{M}_{\mathrm{ad}}(\mathscr{W}_{\varepsilon,p})$ において収束する．正確には，任意の有限集合 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F} \cup \dot{\mathcal{F}}$ と，任意の $c > 0$, $q \geq 1$ に対して次の二式が成り立つ．

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[\sup_{\|h\|_H \leq 1} \|\hat{M}^{n,h;\varepsilon,p} : \mathcal{G}\|_{\varepsilon,p;c}^{q}\right] < \infty,$$

$$\lim_{m,n\to\infty} \mathbb{E}\left[\sup_{\|h\|_H \leq 1} \|\hat{M}^{m,h;\varepsilon,p}, \hat{M}^{n,h;\varepsilon,p} : \mathcal{G}\|_{\varepsilon,p;c}^{q}\right] = 0.$$

3 証明の概略

定理 2.15 を証明するための準備を行う．X^k に対する被許容モデルの作用は常に

$$(\Pi_x X^k)(y) = (y-x)^k, \qquad \Gamma_{yx} X^k = (X + (y-x)\mathbf{1})^k$$

と定まっており，n に依存しないため，X^k 以外の記号のみ考えればよい．まずは，$\mathcal{F} \setminus \{X^k\}_{k\in\mathbb{N}^{1+d}}$ の元を「単純」なものから順に

$$\mathcal{F} \setminus \{X^k\}_{k\in\mathbb{N}^{1+d}} = \{\tau_1, \tau_2, \ldots\}$$

と並べる．τ_1 は最も単純な記号 Ξ であり，添字が大きくなるごとに記号も複雑になっていく．具体的には，τ に含まれる Ξ の個数と $\{\mathcal{I}_k\}_{k\in\mathbb{N}^{1+d}}$ の個数をそれぞれ $n_\Xi(\tau)$, $n_{\mathcal{I}}(\tau)$ と表すとき[6]，$\mathbb{R}^3$ の辞書式順序 $\leq$ に関して

$$\bigl(n_\Xi(\tau_i), n_{\mathcal{I}}(\tau_i), r_{0,\infty}(\tau_i)\bigr) \leq \bigl(n_\Xi(\tau_{i+1}), n_{\mathcal{I}}(\tau_{i+1}), r_{0,\infty}(\tau_{i+1})\bigr)$$

となるように添字付けたものである．各 $i \geq 1$ に対して

$$\mathcal{F}_i = \{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_i\}$$

とおき，$\dot{\mathcal{F}}_i \subset \mathcal{X}^{(1)}$ は $D\langle\mathcal{F}_i\rangle \subset \langle\dot{\mathcal{F}}_i\rangle$ を満たす最小の集合とする．構成法から，$\langle\mathcal{F}_i \cup \{X^k\}_k\rangle$ や $\langle\mathcal{F}_{i-1} \cup \dot{\mathcal{F}}_i \cup \{X^k\}_k\rangle$ といった部分空間は $\hat{\Gamma}^{n,h;\varepsilon,p}$ の作用について閉じている ([1, Lemma 7])．部分集合 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F} \cup \dot{\mathcal{F}}$ と $p \in [2,\infty]$ に対し，命題 $\mathbf{bd}(\mathcal{G},p)$ と $\mathbf{cv}(\mathcal{G},p)$ を次のように定める．

[6] 正確には，(2.1) のように帰納的に定義する．

- $\mathbf{bd}(\mathcal{G},p)$：任意の $c>0$, $q\geq 1$ と，十分小さい任意の $\varepsilon>0$ に対して，次の量は有限である．
$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{E}\Bigg[\sup_{\|h\|_H\leq 1}\|\hat{M}^{n,h;\varepsilon,p}:\mathcal{G}\|_{\varepsilon,p;c}^q\Bigg].$$
- $\mathbf{cv}(\mathcal{G},p)$：任意の $c>0$, $q\geq 1$ と，十分小さい任意の $\varepsilon>0$ に対して，次の収束が成り立つ．
$$\lim_{m,n\to\infty}\mathbb{E}\Bigg[\sup_{\|h\|_H\leq 1}\|\hat{M}^{m,h;\varepsilon,p},\hat{M}^{n,h;\varepsilon,p}:\mathcal{G}\|_{\varepsilon,p;c}^q\Bigg]=0.$$

また，全ての $p\in[2,\infty]$ に対して $\mathbf{bd}(\mathcal{G},p)$（または $\mathbf{cv}(\mathcal{G},p)$）が成り立つことを，$\mathbf{bd}(\mathcal{G})$（または $\mathbf{cv}(\mathcal{G})$）と表す．

以上の設定の下，定理 2.15 の証明の概略を述べる．証明の流れは以下の通りである．

(1) **（初期命題）** $\dot{\mathcal{F}}_1=\{\dot\Xi\}$ に対する BPHZ モデルの作用は $\hat\Pi_x^{n,h;\varepsilon,p}\dot\Xi=h_n$, $\hat\Gamma_{yx}^{n,h;\varepsilon,p}\dot\Xi=\dot\Xi$ であるから，h_n の h への（適当なノルムでの）収束から，$\mathbf{bd}(\dot{\mathcal{F}}_1)$ と $\mathbf{cv}(\dot{\mathcal{F}}_1)$ が従う．

(2) **（有界性）** 任意の i に対して $\mathbf{bd}(\mathcal{F}_i)$ と $\mathbf{bd}(\dot{\mathcal{F}}_i)$ が成り立つことを，以下の手順で示す．

   (a) **確率論（＋実解析）的ステップ**：$\mathbf{bd}(\mathcal{F}_{i-1}\cup\dot{\mathcal{F}}_i)$ から $\mathbf{bd}(\mathcal{F}_i)$ を示す．

   (b) **実解析的ステップ**：$\mathbf{bd}(\mathcal{F}_i\cup\dot{\mathcal{F}}_i,2)$ から $\mathbf{bd}(\dot{\mathcal{F}}_{i+1},2)$ を示す．

   (c) **代数的ステップ**：$\mathbf{bd}(\mathcal{F}_i\cup\dot{\mathcal{F}}_i)$ と $\mathbf{bd}(\dot{\mathcal{F}}_{i+1},2)$ から $\mathbf{bd}(\dot{\mathcal{F}}_{i+1})$ を示す．

(3) **（収束性）** 任意の i に対して $\mathbf{cv}(\mathcal{F}_i)$ と $\mathbf{cv}(\dot{\mathcal{F}}_i)$ が成り立つことを，(2) と同様の手順で示す．

帰納法の手順を図示すると次のようになる．実線矢印の順に主張が示されていく．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_1=\{\Xi\} \arrow[r, phantom, "\subsetneq"] \arrow[d, dashed, "D"] \arrow[dr] & \mathcal{F}_2 \arrow[r, phantom, "\subsetneq"] \arrow[d, dashed, "D"] \arrow[dr] & \cdots \arrow[r, phantom, "\subsetneq"] \arrow[dr] & \mathcal{F}_i \arrow[d, dashed, "D"] & \cdots \\
\dot{\mathcal{F}}_1=\{\dot\Xi\} \arrow[u, bend left] \arrow[r, phantom, "\subsetneq"] & \dot{\mathcal{F}}_2 \arrow[u, bend left] \arrow[r, phantom, "\subsetneq"] & {} \arrow[r, phantom, "\subsetneq"] & \dot{\mathcal{F}}_i \arrow[u, bend left] &
\end{tikzcd}$$

以下の節では，帰納法の各ステップ (a)(b)(c) の概要を説明する．簡単のため $\mathbf{bd}$ に関する不等式のみ述べるが，それらの不等式がモデルに関して局所 Lipschitz であることを用いれば，$\mathbf{cv}$ の証明もほぼ同様である．また，被許容モデルにおいては Γ の評価は Π の評価から従う[7]から，Π の評価のみ示す．

[7]例えば [12, Theorem 10.7], [1, Lemma 12] などを参照せよ．

3.1　確率論（＋実解析）的ステップ：$\mathbf{bd}(\mathcal{F}_{i-1}\cup\dot{\mathcal{F}}_i)\to\mathbf{bd}(\mathcal{F}_i)$

$\mathbf{bd}(\mathcal{F}_{i-1}\cup\dot{\mathcal{F}}_i)$ を仮定して，$\hat{\Pi}_x^{n,h;\varepsilon,p}\tau_i$ の評価を示す．ただし，h,p は $\hat{\Pi}_x^{n,h;\varepsilon,p}\tau_i$ の定義に影響しないため，

$$\hat{\Pi}_x^{n;\varepsilon}\tau_i=\hat{\Pi}_x^{n,h;\varepsilon,p}\tau_i$$

と略記する．$r_{0,\infty}(\tau_i)>0$ の場合は，$\hat{\Pi}_x^{n;\varepsilon}\tau_i$ の評価は**再構成定理 (reconstruction theorem)** ([12, Theorem 3.10]) から直ちに従う．関数の点ごとの積 $(f\cdot g)(x)=f(x)g(x)$ は，$\alpha+\beta>0$ であれば連続双線形写像

$$B^{\alpha}_{\infty,\infty}\times B^{\beta}_{\infty,\infty}\to B^{\alpha\wedge\beta}_{\infty,\infty}$$

に拡張できるが，これと同じような理由である．

補題 3.1 ([1, Lemma 8])**.** $r_{0,\infty}(\tau_i)>0$ とする．ある定数 $b>0$ と多項式 P が存在し，任意の $c>0$ と十分小さい任意の $\varepsilon>0$ に対して次式が成り立つ．

$$\|\hat{\Pi}^{n;\varepsilon}:\tau_i\|_{\varepsilon,\infty;bc}\le P\big(\|\hat{\Pi}^{n;\varepsilon}:\mathcal{F}_{i-1}\|_{\varepsilon,\infty;c}\big).$$

この補題は純粋に実解析的な主張であり，確率論は一切使われていない．一方，$r_{0,\infty}(\tau_i)\le 0$ の場合は確率論の助けが必要である．(確率論の知識を用いるのはここだけである．）Poincaré の不等式（定理 2.2）から，任意の $q\ge 1$ に対して次の不等式が成り立つことに注意する．

$$\mathbb{E}\big[|Q_t(\hat{\Pi}_x^{n;\varepsilon}\tau_i)(x)|^q\big]\lesssim\big|\mathbb{E}\big[Q_t(\hat{\Pi}_x^{n;\varepsilon}\tau_i)(x)\big]\big|^q+\mathbb{E}\Bigg[\sup_{\|h\|_H\le 1}|\nabla_h Q_t(\Pi_x^{n;\varepsilon}\tau_i)(x)|^q\Bigg].$$

右辺第一項は BPHZ モデルの性質 (2.4) を用いて評価される．第二項は H-微分と作用素 D を繋ぐ等式

$$\nabla_h\Pi_x^{n;\varepsilon}\tau_i=\Pi_x^{n,h;\varepsilon,\infty}(D\tau_i)$$

を用いることにより，$\mathbf{bd}(\dot{\mathcal{F}}_i)$ の仮定に帰着される．

補題 3.2 ([1, Lemma 10])**.** $r_{0,\infty}(\tau_i)\le 0$ とする．ある定数 $b>0$ と多項式 P が存在し，任意の $c>0,\ q\ge 1$ と十分小さい任意の $\varepsilon>0$ に対して次式が成り立つ．

$$\mathbb{E}\big[\|\hat{\Pi}^{n;2\varepsilon}:\tau_i\|^q_{2\varepsilon,\infty;bc}\big]^{1/q}\le\mathbb{E}\Bigg[P\Bigg(\sup_{\|h\|_H\le 1}\|\hat{\Pi}^{n,h;\varepsilon,\infty}:\mathcal{F}_{i-1}\cup\dot{\mathcal{F}}_i\|_{\varepsilon,\infty;c}\Bigg)\Bigg].$$

以上により，$\mathbf{bd}(\mathcal{F}_{i-1}\cup\dot{\mathcal{F}}_i)$ から $\mathbf{bd}(\mathcal{F}_i)$ が従うことが示された．

3.2　実解析的ステップ：$\mathbf{bd}(\mathcal{F}_i \cup \dot{\mathcal{F}}_i, 2) \to \mathbf{bd}(\dot{\mathcal{F}}_{i+1}, 2)$

$\mathbf{bd}(\mathcal{F}_i \cup \dot{\mathcal{F}}_i, 2)$ を仮定し，任意の $\tau \in \dot{\mathcal{F}}_{i+1} \setminus \dot{\mathcal{F}}_i$ に対して $\hat{\Pi}_x^{n,h;\varepsilon,2}\tau$ の評価を示す．$\tau \neq \dot{\Xi}$ であるから，仮定 (2.5) より

$$r_{0,2}(\tau) = r_{0,\infty}(\tau) + \tfrac{d+2}{2} > 0$$

となっていることに注意する．このことから，補題 3.1 と同じように再構成定理（ただし正則性可積分性構造への拡張版 [18, Theorem 4.1]）を用いた議論に持ち込むことができる．

補題 3.3 ([1, Lemma 13])**.** ある定数 $b > 0$ と多項式 P が存在し，任意の $c > 0$ と十分小さい任意の $\varepsilon > 0$ に対して次式が成り立つ．

$$\|\hat{\Pi}^{n,h;\varepsilon,2} : \dot{\mathcal{F}}_{i+1}\|_{\varepsilon,2;bc} \leq P\big(\|\hat{\Pi}^{n,h;\varepsilon,2} : \mathcal{F}_i \cup \dot{\mathcal{F}}_i\|_{\varepsilon,2;c}\big).$$

3.3　代数的ステップ：$\mathbf{bd}(\mathcal{F}_i \cup \dot{\mathcal{F}}_i) + \mathbf{bd}(\dot{\mathcal{F}}_{i+1}, 2) \to \mathbf{bd}(\dot{\mathcal{F}}_{i+1})$

前節に引き続き $\tau \in \dot{\mathcal{F}}_{i+1} \setminus \dot{\mathcal{F}}_i$ とする．帰納法を完成させるには，$\hat{\Pi}_x^{n,h;\varepsilon,2}\tau$ だけではなく，$\hat{\Pi}_x^{n,h;\varepsilon,p}\tau$ ($p \in (2,\infty]$) に対しても評価を示さなければならない．そもそも p によって変化するのは，Taylor 展開の階数である．例えば，$d = 1$, $\alpha_0 = -\frac{3}{2} - \delta$, $\beta_0 = 2 - \delta$（$\delta > 0$ は十分小さい）として，$\hat{\Pi}_x^{n,h:0,p}\mathcal{I}(\dot{\Xi})$ を計算すると

$$(\hat{\Pi}_x^{n,h:0,p}\mathcal{I}(\dot{\Xi}))(y) = \begin{cases} I(h)(y) - I(h)(x) - (y_1 - x_1)\partial_{x_1} I(h)(x) & (p \in [2, \frac{6}{1+4\delta})) \\ I(h)(y) - I(h)(x) & (p \in [\frac{6}{1+4\delta}, \infty]) \end{cases}$$

のように，階数が p の値によって変化する．$p = \frac{6}{1+4\delta}$ は $r_{0,p}(\mathcal{I}_{(0,1)}(\dot{\Xi})) = 0$ の解である．すなわち，$\hat{\Pi}_x^{n,h:0,p}\mathcal{I}(\dot{\Xi})$ と $\hat{\Pi}_x^{n,h:0,2}\mathcal{I}(\dot{\Xi})$ の間には次の関係式が成り立つ．

$$\hat{\Pi}_x^{n,h:0,p}\mathcal{I}(\dot{\Xi}) = \hat{\Pi}_x^{n,h:0,2}\mathcal{I}(\dot{\Xi}) + \mathbf{1}_{\{r_{0,p}(\mathcal{I}_{(0,1)}(\dot{\Xi})) \leq 0\}} \partial_{x_1} I(h)(x)(y_1 - x_1).$$

これを一般化したものが次の等式である．

補題 3.4 ([1, Lemma 4 & Lemma 14])**.** 任意の $\tau \in \dot{\mathcal{F}}_{i+1}$ に対して，有限個の $\{\sigma_j\} \subset \dot{\mathcal{F}}_i$, $\{\eta_j\} \subset \mathcal{F}_i$, $\{\lambda_j\} \subset \mathbb{R}$ が存在し，任意の $p \in [2,\infty]$ に対して次式が成り立つ．

$$\hat{\Pi}_x^{n,h;\varepsilon,p}\tau = \hat{\Pi}_x^{n,h;\varepsilon,2}\tau + \sum_j \lambda_j \mathbf{1}_{\{r_{\varepsilon,p}(\sigma_j) \leq 0\}} f_x^{n,h;\varepsilon}(\sigma_j) \hat{\Pi}_x^{n;\varepsilon}\eta_j. \tag{3.1}$$

ただし，$\sigma_j, \eta_j, f_x^{n,h;\varepsilon}(\sigma_j)$ は次の性質を満たす．

- 各 j に対して，$r_{\varepsilon,p}(\tau) = r_{\varepsilon,p}(\sigma_j) + r_{\varepsilon,\infty}(\eta_j)$ である．

- $r_{\varepsilon,q}(\sigma_j)=0$ を満たす唯一の $q\in[2,\infty]$ を $q=p_\varepsilon(\sigma_j)$ と表す．ある定数 $b>0$ と多項式 P が存在し，任意の $r\in[2,p_\varepsilon(\sigma_j))$, $c>0$ と十分小さい任意の $\varepsilon>0$ に対して次式が成り立つ．

$$\|f_x^{n,h;\varepsilon}(\sigma_j)\|_{L_x^r(w_{bc})}\leq P\big(\|\hat{\Pi}^{n,h;\varepsilon,r}:\mathcal{F}_i\cup\dot{\mathcal{F}}_i\|_{\varepsilon,r;c}\big).$$

等式 (3.1) に対し，次の **Besov 埋め込み定理**と同種の議論を用いることで，$\hat{\Pi}_x^{n,h;\varepsilon,p}\tau$ の評価が得られる．

命題 3.5 ([18, Proposition 2.13])**.** $\alpha\leq 0$, $1\leq p\leq q\leq\infty$ とする．任意の $f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{1+d})$ に対して，次の不等式が成り立つ．

$$\|f\|_{B_{q,\infty}^{\alpha-(d+2)(1/p-1/q)}}\lesssim\|f\|_{B_{p,\infty}^{\alpha}}.$$

$\hat{\Pi}_x^{n,h;\varepsilon,p}\tau$ の評価は，直観的には次のように示される．超関数の族 $\{\zeta_x\}_{x\in\mathbb{R}^{1+d}}$ が

$$\|Q_t(\zeta_x)(x)\|_{L_x^p}\lesssim t^{\alpha/4}$$

という不等式を満たすとき,「$\{\zeta_x\}$ は $B_{p,\infty}^{\alpha}$ 型の評価をもつ」ということにする．等式 (3.1) の右辺第一項は，$\mathbf{bd}(\dot{\mathcal{F}}_{i+1},2)$ の仮定より $B_{2,\infty}^{r_{\varepsilon,2}(\tau)}$ 型の評価をもつが，Besov 空間 $B_{2,\infty}^{r_{\varepsilon,2}(\tau)}$ は

$$B_{p,\infty}^{r_{\varepsilon,2}(\tau)-(d+2)(1/2-1/p)}=B_{p,\infty}^{r_{\varepsilon,p}(\tau)}$$

に埋め込まれる．第二項については，$f_x^{n,h;\varepsilon}(\sigma_j)$ がおよそ $L^{p_\varepsilon(\sigma_j)}$ に含まれ，$\hat{\Pi}_x^{n;\varepsilon}\eta_j$ が $B_{\infty,\infty}^{r_{\varepsilon,\infty}(\eta_j)}$ 型の評価をもつことから，$f_x^{n,h;\varepsilon}(\sigma_j)\hat{\Pi}_x^{n;\varepsilon}\eta_j$ はおよそ $B_{p_\varepsilon(\sigma_j),\infty}^{r_{\varepsilon,\infty}(\eta_j)}$ 型の評価をもつ．σ_j,η_j の条件より

$$\begin{aligned}r_{\varepsilon,\infty}(\eta_j)-(d+2)(\tfrac{1}{p_\varepsilon(\sigma_j)}-\tfrac{1}{p})&=r_{\varepsilon,p}(\tau)-r_{\varepsilon,p}(\sigma_j)-(d+2)(\tfrac{1}{p_\varepsilon(\sigma_j)}-\tfrac{1}{p})\\&=r_{\varepsilon,p}(\tau)-r_{\varepsilon,p_\varepsilon(\sigma_j)}(\sigma_j)=r_{\varepsilon,p}(\tau)\end{aligned}$$

となるから，$B_{p_\varepsilon(\sigma_j),\infty}^{r_{\varepsilon,\infty}(\eta_j)}$ は $B_{p,\infty}^{r_{\varepsilon,p}(\tau)}$ に埋め込まれる．以上の議論から，右辺の各項が $B_{p,\infty}^{r_{\varepsilon,p}(\tau)}$ 型の評価をもつことが示唆される．

補題 3.6 ([1, Lemma 15])**.** ある定数 $b>0$ と多項式 P が存在し，以下の性質が成り立つ：任意の $p\in[2,\infty]$ と十分小さい任意の $\varepsilon>0$ に対し，$[2,\infty]$ の有限部分集合 $R_{\varepsilon,p}$ と $\varepsilon'\in(0,\varepsilon)$ が存在し，任意の $c>0$ に対して次式が成り立つ．

$$\|\hat{\Pi}^{n,h;\varepsilon,p}:\dot{\mathcal{F}}_{i+1}\|_{\varepsilon,p;bc}\leq\sum_{q\in R_{\varepsilon,p}}P\big(\|\hat{\Pi}^{n,h;\varepsilon',q}:\mathcal{F}_i\cup\dot{\mathcal{F}}_i\|_{\varepsilon',q;c}\big).$$

前節の内容と合わせて，$\mathbf{bd}(\mathcal{F}_i\cup\dot{\mathcal{F}}_i)$ から $\mathbf{bd}(\dot{\mathcal{F}}_{i+1})$ が従うことが示された．

参考文献

[1] I. Bailleul and M. Hoshino, *Random models on regularity-integrability structures.* arXiv:2310.10202.

[2] L. Broux and D. Lee, *Besov reconstruction.* Potential Anal. **59** (2023), 1875–1912.

[3] Y. Bruned, *Recursive formulae in regularity structures.* Stoch. Partial Differ. Equ. Anal. Comput. **6** (2018), 525–564.

[4] Y. Bruned, A. Chandra, I. Chevyrev, and M. Hairer, *Renormalising SPDEs in regularity structures.* J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **23** (2021), 869–947.

[5] Y. Bruned, M. Hairer, and L. Zambotti, *Algebraic renormalisation of regularity structures.* Invent. Math. **215** (2019), 1039–1156.

[6] A. Chandra and M. Hairer, *An analytic BPHZ theorem for regularity structures.* arXiv:1612.08138.

[7] A. Chandra, M. Hairer, and H. Shen, *The dynamical sine-Gordon model in the full subcritical regime.* arXiv:1808.02594.

[8] A. Chandra, A. Moinat, and H. Weber, *A priori bounds for the* Φ^4 *equation in the full sub-critical regime.* Arch. Ration. Mech. Anal. **247** (2023), Paper No. 48, 76 pp.

[9] G. Da Prato and A. Debussche, *Strong solutions to the stochastic quantization equations.* Ann. Probab. **31** (2003), 1900–1916.

[10] M. Gubinelli and M. Hofmanová, *Global solutions to elliptic and parabolic* Φ^4 *models in Euclidean space.* Comm. Math. Phys. **368** (2019), 1201–1266.

[11] M. Hairer, *Solving the KPZ equation.* Ann. of Math. **178** (2013), 559–664.

[12] M. Hairer, *A theory of regularity structures.* Invent. Math. **198** (2014), 269–504.

[13] M. Hairer and C. Labbé, *A simple construction of the continuum parabolic Anderson model on* $\mathbf{R}^2$. Electron. Commun. Probab. **20** (2015), no. 43, 11 pp.

[14] M. Hairer and C. Labbé, *The reconstruction theorem in Besov spaces.* J. Funct. Anal. **273** (2017), 2578–2618.

[15] M. Hairer and J. Quastel, *A class of growth models rescaling to KPZ.* Forum Math. Pi **6** (2018), e3, 112 pp.

[16] M. Hairer and H. Shen, *The dynamical sine-Gordon model.* Comm. Math. Phys. **341** (2016), 933–989.

[17] M. Hairer and R. Steele, *The BPHZ theorem for regularity structures via the spectral gap inequality.* Arch. Ration. Mech. Anal. **248** (2024), Paper No. 9, 81 pp.

[18] M. Hoshino, *A semigroup approach to the reconstruction theorem and the multilevel Schauder estimate.* arXiv:2310.07396.

[19] C. Labbé, *The continuous Anderson Hamiltonian in $d \leq 3$.* J. Funct. Anal. **277** (2019), 3187–3235.

[20] P. Linares, F. Otto, M. Tempelmayr, and P. Tsatsoulis, *A diagram-free approach to the stochastic estimates in regularity structures.* arXiv:2112.10739.

[21] J.-C. Mourrat and H. Weber, *Global well-posedness of the dynamic Φ^4 model in the plane.* Ann. Probab. **45** (2017), 2398–2476.

[22] I. Nourdin and G. Peccati, *Normal approximations with Malliavin calculus. From Stein's method to universality.* Cambridge University Press, Cambridge, 2012.

[23] G. Parisi and Y.-S. Wu, *Perturbation theory without gauge fixing.* Sci. Sinica **24** (1981), 483–496.