# ON RELATIONS BETWEEN $L$-FUNCTIONS AND RANDOM MATRIX THEORY
# ($L$ 関数とランダム行列理論との関係について)

杉山真吾 (金沢大学 理工研究域数物科学系)

SHINGO SUGIYAMA

FACULTY OF MATHEMATICS AND PHYSICS,
INSTITUTE OF SCIENCE AND ENGINEERING,
KANAZAWA UNIVERSITY

Contents



Abstract. 本記事は 2023 年 12 月 5 日に筆者が講演した内容をもとに執筆したものである. 本記事では $L$ 関数とランダム行列理論の間にある Katz と Sarnak の密度予想について紹介し, 筆者の対称べき $L$ 関数の族の零点分布と Dirichlet $L$ 関数の族の零点分布の公式を紹介する. 後者の Dirichlet $L$ 関数の族の場合の研究は Ade Irma Suriajaya (九州大学) との共同研究である.

## 1. Introduction

20 世紀の末葉に, 整数論と物理学の間のある関係性が Katz-Sarnak や Keating-Snaith によって見出された. 彼らの提唱する関係性とは, 整数論ではお馴染みの $L$ 関数 (Riemann ゼータ関数の一般化) の族が, 物理学において重い原子核のエネルギー準位の記述に用いられるランダム行列の族と対応しているだろう, というものである. 1999 年に Katz と Sarnak [13], [14] は $L$ 関数の族の零点分布はランダム行列の固有値分布と同じになるはずだという哲学を提唱した. また 2000 年に Keating と Snaith [15], [16] は $L$ 関数の値の平均 (モーメント) とランダム行列の特性多項式のモーメントの間の類似

性を予想した．本記事では Katz と Sarnak の哲学について諸々述べたいと思う．そして Katz-Sarnak 予想の重み付き版について, 筆者の研究 [37], [39] について触れたいと思う．

研究集会「量子場の数理とその周辺」での講演依頼が来た際には少々驚いた．筆者はこれまでに数理物理学と関連する論文としては, 量子 Rabi 模型に関する [34], 量子ウォークに関する [29], ベッセル関数の格子和に関する [9] などを執筆したが, 場の量子論については何も存じ上げない．しかしながら研究集会の名前が「量子場の数理」ではなく「量子場の数理とその周辺」であったため, 無事「その周辺」について講演することができた．参加者との学際交流も申し分なかった．コミュニティの寛容さには頭が上がらない．

本記事では筆者が提唱した重み付き密度予想 (Conjecture 4.1) およびこの予想の傍証となる Theorem 4.3, Theorem 5.6, Theorem 5.7 を紹介する．量子場の数理を主とする研究集会での講演であったため, 講演時には整数論を専門としない方でも雰囲気が掴めるように配慮した．そして本記事でも, 同様の配慮の下で執筆させていただいた．本記事には一部, 厳密でない記述があるが, それは初学者向けの文献や本格的な文献などに適宜譲るとして, さまざまなバックグランドをお持ちの方々にご笑覧いただければ幸いである．

## 2. $L$-functions

$L$ 関数 ($L$-function) とは Riemann ゼータ関数を一般化したものである．Riemann ゼータ関数について知りたい方には, 読みやすい松本 [20] や本格的な Titchmarsh [43] などの教科書をご覧いただきたい．Riemann ゼータ関数とは

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}, \qquad \mathrm{Re}(s) > 1$$

で定義される関数である．ここで $p$ は素数全体を走る[1]．$\zeta(s)$ は $\mathbb{C}$ 上の有理型関数として解析接続される．さらに $s=1$ が単純極で他の $s \in \mathbb{C} - \{1\}$ では正則である．$\Gamma_{\mathbb{R}}(s) := \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$ とし, $\hat{\zeta}(s) := \Gamma_{\mathbb{R}}(s)\zeta(s)$ とおく．このとき $s$ と $1-s$ に対する対称性を記述する関数等式

$$\hat{\zeta}(s) = \hat{\zeta}(1-s)$$

が成り立つことが知られている．素数に関する無限積表示と関数等式により, $\zeta(s)$ の零点はガンマ関数の極を打ち消す $s = -2, -4, -6, ...$ という零点以外は $0 \leqslant \mathrm{Re}(s) \leqslant 1$ の範囲にあることが分かる (実は $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$ の範囲にある)．Riemann は素数の数え上げ関数の漸近挙動に関連して, $\zeta(s)$ の零点は負の偶数たちを除いて必ず対称性の中心である $\mathrm{Re}(s) = 1/2$ という直線の上に乗っているであろうと予期した (Riemann 予想, 1859)．

[1]今後も, 条件を書かずに $p$ と書いたら素数のことを表すことにする．

素数の数え上げ関数を $\pi(x)$ とする:

$$\pi(x) := \#\{p \leqslant x \mid p \text{ は素数 }\}, \qquad x > 0.$$

このとき, Hadamard と de la Vallée Poussin (1896) によって独立に証明された素数定理

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}, \qquad x \to \infty$$

が知られている. 誤差項を明示したものも素数定理という. この $\pi(x)$ を用いると, $\zeta(s)$ の零点と素数の間の関係が以下の漸近式で記述される:

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + \mathcal{O}(x^c \log x), \qquad x \to \infty.$$

ここで $\mathrm{Li}(x) = \displaystyle\int_2^x \frac{1}{\log t} dt$ は補正対数積分と呼ばれ,

$$c = \sup\{\mathrm{Re}(\rho) \mid \mathrm{Re}(\rho) \in [1/2, 1],\ \zeta(\rho) = 0\} \in [1/2, 1]$$

である. Koch 曲線でお馴染みの von Koch (1901) [44] の $c = 1/2$ の場合と同様の議論により, 上述の公式が示される. 逆に, 上述の公式の誤差項が $\mathcal{O}(x^{1/2} \log x)$ になることを仮定すると Riemann 予想が証明できる.

**Remark 2.1.** ここは専門外の方は読み飛ばして構わないが一応言及しておく. zbMath の記事 (https://zbmath.org/31.0201.02) にもあるように, 実は von Koch より先に Franel (1896) [8] が, Riemann 予想の仮定下で誤差項が $\mathcal{O}_\epsilon(x^{1/2+\epsilon})$ になることを示している.

また, 「von Koch は Riemann 予想と誤差項が $\mathcal{O}(x^{1/2} \log x)$ であることの同値性を証明した」と書かれている文献をいくつか目にするが, 誤差項が $\mathcal{O}(x^{1/2} \log x)$ になることを仮定して Riemann 予想を証明する議論は von Koch [44] にはない. 例えば Ingham の教科書 [11, pp.82–85] には証明が載っている.

$\zeta(s)$ の一般化として次に簡単な Dirichlet $L$ 関数を紹介する. 詳細が知りたい方は Davenport [4] などをご覧いただきたい. $q$ を正の整数とし, $\chi : (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$ を群の準同型とする. $\chi$ は $q$ を法とする Dirichlet 指標と呼ばれる. $\gcd(n, q) > 1$ のときに $\chi(n) = 0$ とすることで $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ とみなす. $\chi$ に付随する Dirichlet $L$ 関数とは

$$L(s, \chi) := \sum_{n=1}^\infty \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - \chi(p)p^{-s}}, \qquad \mathrm{Re}(s) > 1$$

で定義される $s$ の関数のことである. $a_\chi \in \{0, 1\}$ を $\chi(-1) = (-1)^{a_\chi}$ となるように定める. さらに,

$$\hat{L}(s, \chi) := \Gamma_{\mathbb{R}}(s + a_\chi) L(s, \chi)$$

とおく．このとき, $\chi$ が原始的 (つまり $q$ より小さい $q'$ を法とする Dirichlet 指標から誘導されない) ならば, 関数等式

$$\hat{L}(s,\chi) = \epsilon_\chi q^{1/2-s}\hat{L}(1-s,\chi^{-1})$$

が成り立つ．ここで

$$\epsilon_\chi := \frac{1}{i^{a_\chi}\sqrt{q}}\sum_{a=1}^{q-1}\chi(a)e^{2\pi i\frac{a}{q}}$$

であり, $|\epsilon_\chi| = 1$ であることが知られている． $\displaystyle\sum_{a=1}^{q-1}\chi(a)e^{2\pi i\frac{a}{q}}$ は Gauss 和と呼ばれる. Gauss 和は平方剰余の相互法則の証明に有用であるという点で, 由緒正しい整数論的な対象である．Dirichlet $L$ 関数は「$a$ で割って $b$ 余る素数は無限個存在する」というタイプの定理を証明するときに力を発揮する関数である.

ad hoc ではあるが, 本記事では以下のような関数 $L(s,\mathcal{A})$ を $L$ 関数と呼ぶことにする ([36, Definition 2.2]):

- 素数に関する無限積で定義され, $\mathrm{Re}(s) \gg 1$ において広義一様絶対収束する:
$$L(s,\mathcal{A}) = \prod_p \left\{\prod_{j=1}^d (1-\alpha_{p,j}p^{-s})^{-1}\right\}, \qquad \mathrm{Re}(s) \gg 1.$$
ここで $\alpha_{p,j}$ は複素数であり, $p, j$ に依らないある $\theta > 0$ が存在して, $\alpha_{p,j} \ll p^\theta$ となる.
- $L(s,\mathcal{A})$ は $\mathbb{C}$ 上の有理型関数として解析接続されて, 位数が有限である (位数が 1 である), などといった解析的性質を有する.
- $\{\mu_{\mathcal{A},j}\}_{j=1}^d \in \mathbb{C}^d$, 絶対値が 1 である $\epsilon_\mathcal{A} \in \mathbb{C}^\times$, $N_\mathcal{A} \in \mathbb{Z}_{>0}$ が存在して,
$$\hat{L}(s,\mathcal{A}) := \{\prod_{j=1}^d \Gamma_\mathbb{R}(s+\mu_{\mathcal{A},j})\}L(s,\mathcal{A})$$
とおくと以下の関数等式が成り立つ:
$$\hat{L}(s,\mathcal{A}) = \epsilon_\mathcal{A}\, {N_\mathcal{A}}^{1/2-s}\,\overline{\hat{L}(1-\overline{s},\mathcal{A})}.$$
$\hat{L}(s,\mathcal{A})$ を $L(s,\mathcal{A})$ の完備化という.

$\mathcal{A}$ は $L$ 関数の添え字に過ぎない．$d \in \mathbb{Z}_{>0}$ を $L$ 関数の次数という．例えば Riemann ゼータ関数や Dirichlet $L$ 関数は次数 1 の $L$ 関数である.

関数等式のズレに現れるデータを集めたものを解析的導手 (解析的コンダクター, analytic conductor) と呼ぶ.

**Definition 2.2.** $L$ 関数 $L(s,\mathcal{A})$ の analytic conductor を以下で定める:

$$Q_\mathcal{A} := \left\{\ \prod_{j=1}^d (3+|\mu_{\mathcal{A},j}|)\ \right\} \times N_\mathcal{A}.$$

$L$ 関数の起源である Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ をスペクトルの観点で捉える思想は Hilbert-Pólya 予想に始まる. Hilbert-Pólya 予想は 1910 年代の Pólya の発言が元になっているとされるが, この予想に関してはOdlyzkoのホームページにて, Pólya と Odlyzko の手紙のやりとりが閲覧可能である[2]. Hilbert-Pólya 予想は「あるハミルトニアン $H$ があり, $\zeta(1/2+it) =$ "$\det(t\ \mathrm{id} - H)$" が成り立つであろう」というものである. det は無限次元空間上の作用素に対するものなので正当化の必要はあるが, もしこの予想が正しければ $H$ の固有値は実数なので Riemann 予想が従う. $H$ の候補は Connes [3], Deninger [5] などに書いてある.

のちに Montgomery (1973) による $\zeta(s)$ の零点の相関関係がガウス型ユニタリーアンサンブル (GUE) になるであろうと予想され, Odlyzko (1987) の数値実験による傍証が与えられた. 証明されていないので法則ではなく経験則ではあるが, しばしば Montgomery-Odlyzko law と呼ばれる. ある日のティータイムに Montgomery が, Riemann ゼータ関数の零点の相関関係に関する考察を物理学者 Dyson に話した. すると Dyson は「ある重い原子核[3]のエネルギー準位の間隔の相関関係と同じである」と指摘した. この有名なエピソード ([6, pp.514–516]) を含む, Riemann 予想やそれにまつわる整数論と物理学のあいだの関係については du Sautoy の一般向け書籍『素数の音楽』([6]) の 11 章をご覧いただきたい.

さて, このような研究の潮流の中で, 1 つの $L$ 関数に対して零点分布を論じるのではなく, 「$L$ 関数の族」の零点全体を考察することでスペクトル的特性が現れるのではないか, という哲学が, Katz, Sarnak (1999) [13], [14] によって提唱された. ここでいうスペクトル的特性とはランダム行列の固有値の分布のことである. 間もなくして Keating, Snaith (2000, [15], [16]) によって, $L$ 関数の族の値の平均 (モーメント) がランダム行列の特性多項式のモーメントと類似しているという予想がなされた[4].

Katz と Sarnak の哲学は端的に記述すると

$$(\text{Zeros of } L\text{-functions in } \mathcal{F}) = (\text{Eigenvalues of random matrices in } G)\ ?$$

である. 彼らの哲学を数式を使って論じるために, $L$ 関数の集まり $\mathcal{F}$ とランダム行列の集まり $G$ などの設定を今から準備しよう. $L$ 関数の零点分布としては 1 レベル密度 (one-level density) を扱うことにする. $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}$ 上の Schwartz 空間とする.

**Definition 2.3** (One-level density)**.** $L(s,\mathcal{A})$ を $L$ 関数とする. $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ は $\mathrm{supp}(\hat{\phi})$ がコンパクトとする. ここで $\hat{\phi}$ は $\phi$ の Fourier 変換 $\hat{\phi}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} \phi(x)e^{-2\pi i\xi x}dx$ である.

[2] 2023 年 12 月時点で閲覧可能.「https://www-users.cse.umn.edu/~odlyzko/」の Correspondence about the Hilbert-Polya Conjecture にあり. 手紙の写真も見れる. 一方で Hilbert が予想したのかどうかは不明である.

[3] ここでは原子番号 68 のエルビウム. 元素記号は Er である.

[4] なお, 論文の年号順が提唱された順と同じか否かは筆者は知らない.

このとき

$$D(\mathcal{A},\phi):=\sum_{\rho}\phi\left(\frac{\log Q_{\mathcal{A}}}{2\pi}\gamma\right)$$

とおき, $L$ 関数の零点の one-level density と呼ぶ. ここで, $\rho=\frac{1}{2}+i\gamma$ は $\hat{L}(s,\mathcal{A})$ の零点全体を重複度込みで動く.

**Remark 2.4.** 上の定義において $\phi$ に代入する数は実数である必要があるので, 一見すると $\gamma$ が常に実数でなければならないように思える. $\gamma$ が常に実数ならばそれは一般 Riemann 予想 (Generalized Riemann Hypothesis, 略して GRH) が成り立つことを意味するので GRH を仮定しなければならないように見える. しかし, 本記事では GRH は仮定しない. 実際 $\mathrm{supp}(\hat{\phi})$ がコンパクトのとき, $\mathrm{supp}(\hat{\phi})\subset[-\alpha,\alpha]$ となる $\alpha>0$ をとると, Fourier 反転公式により

$$\phi(x)=\int_{-\alpha}^{\alpha}\hat{\phi}(\xi)e^{2\pi ix\xi}d\xi$$

と書けるが, 右辺は一般の $x\in\mathbb{C}$ でも意味を持つ. このように $\phi$ を $\mathbb{C}$ 上の正則関数に延長したものも同じ記号 $\phi$ で表せば, GRH を仮定する必要はない. ちなみに $\mathbb{C}$ 上に延長した $\phi$ は Paley-Wiener 関数と呼ばれる. テスト関数 $\phi$ の性質と任意の $\epsilon>0$ に対する収束性 $\sum_{\rho}\frac{1}{|\rho|^{1+\epsilon}}<\infty$ ([4, §11]) を使えば, $D(\mathcal{A},\phi)$ の収束性は保証される.

**Remark 2.5.** 任意の $T>0$ に対して, $0\leqslant\mathrm{Im}(\rho)\leqslant T$ となる $\hat{L}(s,\mathcal{A})$ の零点 $\rho$ の個数は有限であり, 漸近的に

$$\frac{T}{2\pi}\log\frac{Q_{\mathcal{A}}T^d}{(2\pi e)^d}+\mathcal{O}(\log Q_{\mathcal{A}}T^d),\qquad T\to\infty$$

である (cf. [12, Theorem 5.8]). ゆえに, $T$ を固定して $\log Q_{\mathcal{A}}$ を十分大きくしたとき, $T\leqslant\mathrm{Im}(\rho)\leqslant T+1$ を満たす零点の個数は漸近的に $\frac{\log Q_{\mathcal{A}}}{2\pi}$ になる. したがって, $\frac{\log Q_{\mathcal{A}}}{2\pi}$ は零点の平均間隔を 1 に正規化するための定数と解釈できる.

analytic conductor で分割されうるような $L$ 関数の族 $\mathcal{F}$ を考える. つまり $\mathcal{F}$ とは多重集合であって

$$\mathcal{F}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\mathcal{F}_k,\qquad(\#\mathcal{F}_k<\infty,\ \mathcal{F}_k=\{\mathcal{A}\in\mathcal{F}\mid Q_{\mathcal{A}}\asymp k\})$$

と分割できるものとする. 以下, $L$ 関数の添え字の族と $L$ 関数の族は区別しないものとする. Katz-Sarnak 予想は以下のように記述できる.

**Conjecture 2.6** (Density Conjecture for $\mathcal{F}$ [Katz, Sarnak [14]])**.** $L$ 関数の族 $\mathcal{F}$ に対してランダム行列理論から来るタイプ

$$G=G(\mathcal{F})\in\{\mathrm{U},\mathrm{Sp},\mathrm{SO(even)},\mathrm{SO(odd)},\mathrm{O}\}$$

が存在して, $\mathrm{supp}(\hat{\phi})$ がコンパクトであるような任意の $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\#\mathcal{F}_k} \sum_{\mathcal{A}\in\mathcal{F}_k} D(\mathcal{A},\phi) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) W_G(x) dx.$$

ここで $W_G$ は群のタイプ $G$ に応じて定まる, ランダム行列の固有値の分布に現れる密度関数である.

この Katz-Sarnak 予想に関する先行研究は多く存在する. それらについては解説記事 [36] をご覧いただきたい.

上の密度予想で登場した密度関数 $W_G$ については, 次章で説明する.

## 3. Random Matrix Theory

$G(N) = \mathrm{U}(N),\ \mathrm{USp}(2N),\ \mathrm{SO}(2N),\ \mathrm{SO}(2N+1),\ \mathrm{O}(N)$ とする. 5 つは古典的コンパクト Lie 群である. 簡単のため $G(N) = \mathrm{U}(N)$ の場合を考える. $A \in \mathrm{U}(N)$ の固有値は $e^{i\theta_{A,j}}$ $(1 \leqslant j \leqslant N,\ \theta_{A,j} \in [0, 2\pi))$ の形に書ける. 偏角を $0 \leqslant \theta_{A,1} \leqslant \theta_{A,2} \leqslant \cdots \leqslant \theta_{A,N} < 2\pi$ とラベル付けしておく. ランダム行列 $A$ の固有値の one-level density は以下のように定義する.

**Definition 3.1** (One-level density)**.** $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_{\geqslant 0})$ に対して,

$$D(A,\phi) := \sum_{j=1}^{N} \phi\left(\frac{N}{2\pi}\theta_{A,j}\right).$$

ここで, $\frac{N}{2\pi}\theta_{A,j} \in [0, N)$ である. $\frac{N}{2\pi}$ は偏角の平均間隔を 1 に正規化するための定数である. 1 レベル密度の式を見て分かるように, この正規化因子は $L$ 関数の世界の $\frac{\log Q_{\mathcal{A}}}{2\pi}$ と役割が似ている. したがって, $L$ 関数の世界の $\log Q_{\mathcal{A}}$ はランダム行列理論の世界では行列のサイズ $N$ に対応していると思える.

1 レベル密度の $A$ に関する平均はサイズ $N$ を無限大に飛ばすと収束する.

**Theorem 3.2** (Katz, Sarnak [13, Appendix AD])**.** $\mathrm{U}(N)$ の Haar 測度 $dA$ を固定するとき, 任意の $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_{\geqslant 0})$ に対して,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\int_{A\in\mathrm{U}(N)} dA} \int_{\mathrm{U}(N)} D(A,\phi) dA = \int_0^\infty \phi(x) W_{\mathrm{U}}(x) dx.$$

ただし $W_{\mathrm{U}}(x) := 1$.

$G = \mathrm{U}$ のとき, すなわち $G(N) = \mathrm{U}(N)$ で $N \to \infty$ としたときと同様に, 残りの 4 つのコンパクト群に対しても同様の極限公式が成り立ち, 密度関数は群のタイプ

$G = \mathrm{U},\ \mathrm{Sp},\ \mathrm{SO(even)},\ \mathrm{SO(odd)},\ \mathrm{O}$ に応じて

$$W_G(x) := \begin{cases} 1 & G = \mathrm{U} \\ 1 - \dfrac{\sin 2\pi x}{2\pi x} & G = \mathrm{Sp} \\ 1 + \dfrac{\sin 2\pi x}{2\pi x} & G = \mathrm{SO(even)} \\ 1 - \dfrac{\sin 2\pi x}{2\pi x} + \delta_0 & G = \mathrm{SO(odd)} \\ 1 + \dfrac{1}{2}\delta_0 & G = \mathrm{O} \end{cases}$$

で与えられる. ここで $\delta_0$ は $0$ をサポートに持つ $\mathbb{R}$ 上の Dirac デルタ超関数である. $L$ 関数の族の零点は等間隔に並んでいる訳ではなく, 並び方が素数のようにいくぶんランダムになっている. そんな零点を群という対称性でラベル付けすることができるという予想は, 初見では成り立つかどうか俄かに信じがたい. 数学のトレンドの 1 つに「非可換の中に潜む対称性」の追究 ([42, §8.4]) が見受けられるが, 「ランダムの中に潜む対称性」は Riemann ゼータ関数や Dirichlet $L$ 関数のような可換類体論の対象にも起きうる興味深い現象である.

## 4. Weighted Density Conjecture

筆者は対称べき $L$ 関数の零点の one-level density を計算した ([37]). その際, 先行研究 [18] に感化されて, $L$ 関数の特殊値の重みをつけて零点分布を計算した. この計算結果を眺めていると, なんとなく以下のような予想を思いついた.

**Conjecture 4.1** (重み付き密度予想, Weighted Density Conjecture [37])**.**
$\mathcal{F} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_k$ を $L$ 関数の族とする. $1/2 \leqslant s < 1$ となる任意の $s$ に対して, 以下の極限公式を満たす密度関数 $W_{G(\mathcal{F}),s}$ が存在するとする:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sum_{\mathcal{A}\in\mathcal{F}_k} L(s,\mathcal{A})} \sum_{\mathcal{A}\in\mathcal{F}_k} L(s,\mathcal{A})\, D(\mathcal{A},\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) W_{G(\mathcal{F}),s}(x)dx.$$

このとき,

$$W_{G(\mathcal{F}),s} \begin{cases} = W_{G(\mathcal{F})} & (1/2 < s < 1), \\ \neq W_{G(\mathcal{F})} & (s = 1/2) \end{cases}$$

となるであろう. なお, 重み因子は $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対する $L(s,\mathcal{A})^m$, $|L(s,\mathcal{A})|^{2m}$ などに置き換えてもよいし, $\mathcal{F}$ が保型 $L$ 関数の族のときは周期積分でもよい.

対称べき $L$ 関数に関する結果 [37] の紹介は次章に回して, ここでは Dirichlet $L$ 関数の族の場合の結果 [39] を紹介する.

素数 $q$ に対して $\mathcal{F}_q := \{\chi : (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times \mid \chi :$ 恒等的に 1 ではない Dirichlet 指標$\}$ とする．このとき $\#\mathcal{F}_q = q-2$ である．Dirichlet $L$ 関数の族 $\bigcup_{q:\text{素数}}\{L(s,\chi)\}_{\chi\in\mathcal{F}_q}$ の零点の one-level density は以下のように記述される．

**Theorem 4.2** (Hughes, Rudnick [10])**.** テスト関数 $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ は $\mathrm{supp}(\hat{\phi}) \subset [-2,2]$ を満たすとする．このとき，

$$\lim_{q\to\infty} \frac{1}{\sum_{\chi\in\mathcal{F}_q} 1} \sum_{\chi\in\mathcal{F}_q} D(\chi,\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) W_{\mathrm{U}}(x) dx.$$

ここで $W_{\mathrm{U}}(x) := 1$ である．

Dirichlet $L$ 関数の族はユニタリー群に対応することが分かる．この結果の重み付き版は以下の通りである (Ade Irma Suriajaya (九州大学)[5] との共同研究).

**Theorem 4.3** (S., Suriajaya [39])**.** $s \in [1/2, 1)$ とする．テスト関数 $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ は $\mathrm{supp}(\hat{\phi}) \subset [-2s/3, 2s/3]$ を満たすとする．このとき，

$$\lim_{q\to\infty} \frac{1}{\sum_{\chi\in\mathcal{F}_q} |L(s,\chi)|^2} \sum_{\chi\in\mathcal{F}_q} |L(s,\chi)|^2 D(\chi,\phi) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} \phi(x) W_{\mathrm{U}}(x) dx & (1/2 < s < 1), \\ \int_{\mathbb{R}} \phi(x) W_{\mathrm{U},1/2}(x) dx & (s = 1/2). \end{cases}$$

ここで

$$W_{\mathrm{U}}(x) := 1,$$
$$W_{\mathrm{U},1/2}(x) := 1 - \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2$$

である．$W_{\mathrm{U},1/2}(x)$ はランダム Hermite 行列の固有値の相関関係関数に等しい．

$W_{\mathrm{U},1/2}$ は，あの Montgomery と Dyson のエピソードでも登場する密度関数に等しい．重み付き密度予想の歴史については，解説記事 [36], [38] を参照されたし．

## 5. Automorphic Forms

保型形式 (automorphic form) と一口に言ってもいろんなバージョンがある．本記事では，楕円モジュラー形式と呼ばれる基本的な保型形式を説明する．気になる方は読みやすく書かれている教科書である Serre [33] や，専門的に書かれている教科書である三宅 [22] や志村 [31] などを参照されたし．

$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ とおく．$\mathbb{H}$ は Poincaré 上半平面と呼ばれ，$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ が一次分数変換によって作用している:

$$gz := \frac{az+b}{cz+d}, \qquad z \in \mathbb{H},\ g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}).$$

[5] ちなみに彼女のニックネームはチャチャである．

特に, 離散群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ も $\mathbb{H}$ に作用する. この作用に関する周期関数のようなものが保型形式である.

**Definition 5.1.** $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ とする.

(1) $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ が重さ $k$ の保型形式であるとは, 以下を満たすときにいう.

(a) $f$ は正則である.

(b) $f\left(\dfrac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z), \qquad \forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \ \forall z \in \mathbb{H}.$

(c) 直前の条件 (b) を $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ に対して適用すると $f(z+1) = f(z)$ となるので $f$ は周期関数である. (a) より $f$ の Fourier 展開は

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_f(n) e^{2\pi i n z}$$

の形に表せる. このとき, $n < 0$ ならば $a_f(n) = 0$ である. (“カスプで正則” といわれる.)

(2) 保型形式 $f$ が $a_f(0) = 0$ を満たすとき, $f$ をカスプ形式という.

**Example 5.2.** (1) $k \geqslant 4$ を偶数とする.

$$G_k(z) := \sum_{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 - \{(0,0)\}} \frac{1}{(cz+d)^k}, \qquad z \in \mathbb{H}$$

とする. $G_k$ は Eisenstein 級数と呼ばれ, 重さ $k$ の保型形式である. Fourier 展開は

$$G_k(z) = 2\zeta(k) + \frac{2(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) e^{2\pi i n z}$$

で与えられる. ここで $\sigma_{k-1}(n) := \sum_{0<d|n} d^{k-1}$ は約数関数と呼ばれる.

(2)

$$\Delta(z) := e^{2\pi i z} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i n z})^{24}, \qquad z \in \mathbb{H}$$

とおく. これはデルタ関数と呼ばれ, 重さ 12 の保型形式である. 無限積を展開することで, Fourier 展開は

$$\Delta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) e^{2\pi i n z}$$

の形になる. ゆえに $\Delta$ はカスプ形式である. $\tau(n)$ は Ramanujan のタウ関数と呼ばれる.

**Remark 5.3.** $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の代わりに, $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ を一つとってレベル $N$ の合同部分群

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \;\middle|\; c \equiv 0 \pmod{N} \right\}$$

の作用を考えることで, レベル $N$ の保型形式という概念を導入することができる. 最初に紹介したものはレベル 1 の保型形式である.

$M_k(\Gamma_0(N))$ を重さ $k$, レベル $N$ の保型形式全体のなす $\mathbb{C}$ ベクトル空間とする. 重さ $k$, レベル $N$ のカスプ形式全体のなす $\mathbb{C}$ ベクトル空間 $S_k(\Gamma_0(N))$ は $M_k(\Gamma_0(N))$ の部分空間である. Riemann-Roch の定理により $M_k(\Gamma_0(N))$ は有限次元である.

保型形式は整数論とまったく関連がない関数のように見えるが, 素数で添え字づけられる $S_k(\Gamma_0(N))$ 上の作用素の族 $\{T(p)\}_{p\nmid N}$ がある. ここで "$p \nmid N$" は「$p$ は $N$ を割り切らない素数」という意味である. $T(p)$ たちは Hecke 作用素と呼ばれ, 保型形式を整数論たらしめる重要な作用素である. $p$ が $N$ を割り切らない素数のとき, Hecke 作用素 $T(p)$ は以下のように定義される:

$$T(p)f(z) := p^{k-1}f(pz) + \frac{1}{p}\sum_{b=0}^{p-1} f\left(\frac{z+b}{p}\right), \qquad f \in S_k(\Gamma_0(N)).$$

また, 以下で定義される Petersson 内積

$$\langle f, g\rangle := \int_{\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H}} f(z)\overline{g(z)}y^k \frac{dxdy}{y^2} \qquad (z = x+iy), \qquad f, g \in S_k(\Gamma_0(N))$$

によって $S_k(\Gamma_0(N))$ は内積空間になり, $T(p)$ は自己共役になる. $\{T(p)\}_{p\nmid N}$ は互いに可換な自己共役作用素の族であるため, 同時に対角化できる. したがって, 同時固有関数からなる直交基底 $B_k(N)$ が存在する. Hecke 作用素は一般の正整数 $n$ に対して $T(n)$ という記号で導入されるが, Hecke 作用素の族 $\{T(n)\}_n$ の本質は $n$ が素数の場合にある.

次に, 保型形式に付随する「保型 $L$ 関数」なるものを導入しよう. 簡単のためレベルを $N = 1$ にする. $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_f(n)e^{2\pi inz} \in S_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ に対して

$$L(s, f) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_f(n)}{n^{s+\frac{k-1}{2}}}, \quad \mathrm{Re}(s) \gg 1$$

とおき, $L(s, f)$ を保型 $L$ 関数という. この $L$ 関数は $\mathbb{C}$ 上正則に解析接続され, $\hat{L}(s, f) = \Gamma_{\mathbb{R}}(s + \frac{k-1}{2})\Gamma_{\mathbb{R}}(s + \frac{k+1}{2})L(s, f)$ とおくと, 関数等式 $\hat{L}(s, f) = i^k\hat{L}(1-s, f)$ が成り立つ.

$f$ は $B_k(1)$ を用いて線型和に分解することができるため, $f$ が Hecke 作用素の族 $\{T(p)\}_p$ の同時固有関数の場合が本質的である. このような同時固有関数は Hecke 固有形式と呼ばれる. Hecke 固有形式 $f$ が $a_f(1) = 1$ となるように正規化されているとき,

$$L(s, f) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{\frac{1-k}{2}}a_f(p)p^{-s} + p^{-2s}}, \qquad \mathrm{Re}(s) \gg 1$$

が成り立つ．保型 $L$ 関数は次数 2 の $L$ 関数である．以下，$B_k(1)$ のすべての元 $f$ は $a_f(1) = 1$ となるように正規化されているとする．

複素数 $\alpha_p, \beta_p$ を，2 次方程式 $1 - p^{\frac{1-k}{2}} a_f(p)X + X^2 = 0$ の 2 解とする．このとき，

$$L(s, f) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{\frac{1-k}{2}} a_f(p)p^{-s} + p^{-2s}} = \prod_p \frac{1}{(1 - \alpha_p p^{-s})(1 - \beta_p p^{-s})}, \quad \mathrm{Re}(s) \gg 1$$

と書ける．$\alpha_p, \beta_p$ を用いて，対称べき $L$ 関数 (symmetric power $L$-function) を導入する．

**Definition 5.4** (対称べき $L$ 関数)**.** 正規化された Hecke 固有形式 $f \in B_k(1)$ と $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して，

$$L(s, \mathrm{Sym}^r(f)) := \prod_p \prod_{j=0}^{r} \frac{1}{1 - {\alpha_p}^j {\beta_p}^{r-j} p^{-s}}, \qquad \mathrm{Re}(s) \gg 1$$

とおく．

$\mathrm{Sym}^r(f)$ という記号の由来は以下の通りである．$\mathrm{Sym}^r : \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_{r+1}(\mathbb{C})$ を $r$ 次対称テンソル表現とすると，

$$L(s, \mathrm{Sym}^r(f)) = \prod_p \det(1_{r+1} - p^{-s}\, \mathrm{Sym}^r(\begin{smallmatrix} \alpha_p & 0 \\ 0 & \beta_p \end{smallmatrix}))^{-1}$$

と書ける．ここで $1_{r+1}$ は $r+1$ 次単位行列である．

対称べき $L$ 関数は $\mathbb{C}$ 上の有理型関数に解析接続されることや，$L(s, \mathrm{Sym}^r(f))$ と $L(1-s, \mathrm{Sym}^r(f))$ の間の関数等式が成り立つこと知られており，近年になって $L(s, \mathrm{Sym}^r(f))$ は $\mathbb{C}$ 上正則であることが示された ([25], [26])．対称べき $L$ 関数 $L(s, \mathrm{Sym}^r(f))$ は次数 $r+1$ の $L$ 関数である．

**Remark 5.5.** Ostrowski の定理により，$\mathbb{Q}$ 上の非自明な付値による Cauchy 完備化として得られる体は $\{\mathbb{Q}_p\}_{p \leqslant \infty}$ で尽くされる．ここで「$p \leqslant \infty$」は「$p$ は素数または $\infty$」という意味であり，$p$ が有限のときは $\mathbb{Q}_p$ は $p$ 進数体とし，$\mathbb{Q}_\infty := \mathbb{R}$ としている．$\mathbb{A}_\mathbb{Q}$ を $\mathbb{Q}$ のアデール環とする:

$$\mathbb{A}_\mathbb{Q} := \prod_{p \leqslant \infty}{}' \mathbb{Q}_p \qquad (\text{制限直積}).$$

これは $a = (a_p)_{p \leqslant \infty} \in \prod_{p \leqslant \infty} \mathbb{Q}_p$ の元であって，有限個を除くすべての $p$ に対して $a_p$ が $p$ 進整数環 $\mathbb{Z}_p$ に含まれるような $a$ 全体からなる集合のことである．高木貞治の創出した類体論は現代の言葉を用いると「$\mathbb{A}_\mathbb{Q}^\times = \mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の Hecke 指標と $\mathbb{Q}$ の絶対 Galois 群 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の 1 次元表現の間の対応」と言い換えることができる．

Fermat の最終定理の証明で用いられたことで有名な，保型形式と楕円曲線の間の対応 (志村・谷山予想) を含む予想として，「$\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の保型表現と $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の $n$ 次元 Galois 表現の間の対応 (Langlands 対応)」がある．$\mathrm{Sym}^r$ は Galois 表現の世界では 2 次元表現を $r+1$ 次元表現に写す関手とみなせるので，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の保型表現

の集合から $\mathrm{GL}_{r+1}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の保型表現の集合への関手の存在が期待される (Langlands 関手性):

$$\begin{tikzcd}
\pi : \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}) \text{ の保型表現} \arrow[r, "\text{Langlands}"] \arrow[d, dotted, "\mathrm{Sym}^r"'] & \rho : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \text{ の } 2 \text{ 次元表現} \arrow[d] \\
\mathrm{Sym}^r(\pi) : \mathrm{GL}_{r+1}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}) \text{ の保型表現} & \mathrm{Sym}^r \circ \rho : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \text{ の } r+1 \text{ 次元表現} \arrow[l, "\text{Langlands}"]
\end{tikzcd}$$

Hecke 固有形式 $f$ によって生成される $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の保型表現 $\pi$ に対して $\mathrm{GL}_{r+1}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の保型表現 $\mathrm{Sym}^r(\pi)$ が存在するという信念のもと, $\mathrm{Sym}^r(f)$ という記号を用いた次第である.

ここでは簡単のため正確な記述を避けた. Langlands 対応について知りたい場合は, まず初学者向けの吉田 [45] をご覧になっていただくのが良い. 保型表現や Langlands 対応, Langlands 関手性については Bump の教科書 [2] や日本語の解説記事である成田 [23], 三枝 [21] などをご覧いただきたい.

なお $\mathrm{Sym}^r$ に対する Langlands 関手性については, 最近になって目覚ましい成果が Newton, Thorne [25], [26], [27] によって挙げられていることも注意しておく.

$q$ を素数とする. 重さが $k$, レベルが $q$ のカスプ形式の空間 $S_k(\Gamma_0(q))$ の直交基底 $B_k(q)$ を, 先頭の Fourier 係数が 1 であるように正規化された Hecke 固有形式から構成されるようにとっておく. ここで, 新形式 (new form) からなる $B_k(q)$ の部分集合を $B_k^{\mathrm{new}}(q)$ とする. 新形式とは, $q$ の真の約数をレベルに持つカスプ形式からは誘導されないような, レベル $q$ のカスプ形式のことである. いま $q$ は素数なので, ここではレベルが 1 のカスプ形式から誘導されないカスプ形式のことを新形式と呼んでいる. つまり, レベルが本質的に $q$ であるもののみを抽出して $B_k^{\mathrm{new}}(q)$ と書いている.

対称べき $L$ 関数の族に対する特殊値による重み付き零点分布ついて, 以下が成り立つ.

**Theorem 5.6** (S. [37], $r=2$ の場合)**.**
$L$ 関数の族 $\bigcup_{q:\text{素数}}\{L(s,\mathrm{Sym}^2(f))\}_{f\in B_k^{\mathrm{new}}(q)}$ の, 特殊値 $L(s,\mathrm{Sym}^2(f))(1/2\leqslant s<1)$ による重み付き one-level density は

$$s\neq 1/2 \Longrightarrow W_{\mathrm{Sp}}(x)=1-\frac{\sin 2\pi x}{2\pi x}$$

$$s=1/2 \Longrightarrow W_{\mathrm{Sp},1/2}(x)=1+\frac{\sin(2\pi x)}{2\pi x}-\frac{2\sin^2(\pi x)}{(\pi x)^2}$$

である. すなわち, $\mathrm{supp}(\hat{\phi})$ が十分小さい $\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して,

$$\lim_{q\to\infty}\frac{1}{\sum_{f\in B_k^{\mathrm{new}}(q)}\frac{\hat{L}(s,\mathrm{Sym}^2(f))}{\hat{L}(1,\mathrm{Sym}^2(f))}}\sum_{f\in B_k^{\mathrm{new}}(q)}\frac{\hat{L}(s,\mathrm{Sym}^2(f))}{\hat{L}(1,\mathrm{Sym}^2(f))}D(\mathrm{Sym}^2(f),\phi)$$

$$
= \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) W_{\mathrm{Sp}}(x) dx & (\frac{1}{2} < s \leqslant 1), \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) W_{\mathrm{Sp},1/2}(x) dx & (s = \frac{1}{2}). \end{cases}
$$

**Theorem 5.7** (S. [37], 一般の $r$ の場合)**.**
$L$ 関数の族 $\bigcup_{q:\text{素数}} \{L(s, \mathrm{Sym}^r(f))\}_{f \in B_k^{\mathrm{new}}(q)}$ の, 特殊値 $L(s, \mathrm{Sym}^2(f))$ $(1/2 \leqslant s < 1)$ による重み付き one-level density は以下のように記述される: $\mathrm{supp}(\hat{\phi})$ が十分小さい $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して,

$$
\lim_{q \to \infty} \frac{1}{\sum_{f \in B_k^{\mathrm{new}}(q)} \frac{\hat{L}(s, \mathrm{Sym}^2(f))}{\hat{L}(1, \mathrm{Sym}^2(f))}} \sum_{f \in B_k^{\mathrm{new}}(q)} \frac{\hat{L}(s, \mathrm{Sym}^2(f))}{\hat{L}(1, \mathrm{Sym}^2(f))} D(\mathrm{Sym}^r(f), \phi)
$$
$$
= \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) W_{\mathrm{O}}(x) dx & (r \text{ は奇数}), \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) W_{\mathrm{Sp}}(x) dx & (r \text{ は偶数}, (r, s) \neq (2, 1/2)), \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) W_{\mathrm{Sp},1/2}(x) dx & (r = 2, s = \frac{1}{2}). \end{cases}
$$

**Remark 5.8.** 正則な Hilbert 保型形式の場合 (多変数保型形式の場合) にも同様の結果を与えることができる ([37]).

$r$ の偶奇に応じて対応する対称タイプ $G$ が Sp や O になるが, これは $\frac{1}{\hat{L}(1, \mathrm{Sym}^2(f))}$ の重み付き 1 レベル密度 Ricotta, Royer [28] と一致している. 解析的整数論的な事情により $\frac{1}{\hat{L}(1, \mathrm{Sym}^2(f))}$ はしばしば無視してよいとみなされる因子なので, Ricotta, Royer の結果は重みのついていない one-level density に対するものとみなせる.

**Remark 5.9.** $L$ 関数の族の重み付き零点分布に関する先行研究は少なく, 時系列は以下の通りである. (専門用語が増えるが, ご容赦いただきたい.)

- 2019 年までは Siegel 保型形式に付随するスピノール $L$ 関数に対する Kowalski, Saha, Tsimerman (2012) [19] と楕円モジュラー形式に付随する保型 $L$ 関数に対する Knightly, Reno (2019) [18] しかなかった.
- 筆者は 2000 年に対称べき $L$ 関数の場合を考察し, いくつかの集会で講演した. 論文を arXiv に公開したのは 2021 年 1 月である ([37]). $L(s, \mathrm{Sym}^2(f))$ の重みを付けた場合の対称べき $L$ 関数の族 $\{L(s, \mathrm{Sym}^r(f))\}_f$ の零点分布の密度関数 $W_{G,s}$ を決定した. 先行研究では $W_{\mathrm{O},1/2}$ しか考察されていなかったが, この研究で $W_{\mathrm{Sp},1/2}$ の明示式が与えられた. そしてこの研究を通して Weighted Density Conjecture を思いつくに至ったのである.

- その後, 筆者とは独立に重み付き零点密度を研究をしていた Fazzari の 2021 年 6 月の学位論文 (出版されたものは [7]) で, $W_{\mathrm{U},1/2}$, $W_{\mathrm{Sp},1/2}$, $W_{\mathrm{O},1/2}$ の明示式が予想された. Fazzari は比予想や GRH のような強い仮定の下で連続な族 $\{\zeta(s+it)\}_{t\in\mathbb{R}}$, mod $D$ の Kronecker 指標 $\chi_D$ に付随する Dirichlet $L$ 関数の族 $\{L(s,\chi_D)\}_D$, デルタ関数 $\Delta$ を $\chi_D$ で捻った保型 $L$ 関数の族 $\{L(s,\Delta\otimes\chi_D)\}_D$ の 3 つの族に対して, 中心値による重み付き one-level density 調べた. ここで $D$ は基本判別式を動く.
- 筆者は 2021 年 11 月に Ade Irma Suriajaya (九州大学) と共同で $\{L(s,\chi)\}_{\chi\in\mathcal{F}_q}$ の場合の $W_{\mathrm{U},s}$ を決定した ([39]). なお論文を arXiv に公開したのは 2022 年 1 月である.
- 2022 年 8 月に Bettin, Fazzari [1] は重み因子を $|\zeta(1/2+it)|^m$ $(m=2,4)$ にした場合の $\{\zeta(s+it)\}_{t\in\mathbb{R}}$ の零点分布を決定した. 彼らは Fazzari [7] とは異なり, 比予想や Riemann 予想などの強い条件を課さず研究した.

## 6. Sketch of Proof

Theorem 4.3, Theorem 5.6, Theorem 5.7 の証明は 3 つのステップから成る. 簡単のため, このことを Dirichlet $L$ 関数の場合 (Theorem 4.3) に限定して説明する.

【Step 1】 $\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ を $\mathrm{supp}(\hat{\phi})$ がコンパクトであるようなものとする. $\mathbb{C}$ 上の Paley-Wiener 関数とみなせる. ここで複素線積分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} -\frac{\hat{L}'(s,\chi)}{\hat{L}(s,\chi)}\,\phi\left(\frac{\log q}{2\pi i}\left(s-\frac{1}{2}\right)\right)ds$$

を考える. 関数等式により, 実軸に垂直な 2 本の直線上の線積分として書き換えられる. その 2 本の直線で挟まれた帯領域の境界上の線積分と思うと留数定理が適用できて, 偏角の原理のように零点に関する和が取り出せる. 一方で $L$ 関数の素数に関する無限積表示を使うと, 被積分関数に現れる $L$ 関数の対数微分は素数に関する和で書ける. この 2 通りの計算により, Weil の明示公式を得る:

$$\begin{aligned}D(\chi,\phi)=\hat{\phi}(0)-\sum_{k=1}^{2}\sum_{p}(\chi(p^k)+\overline{\chi(p^k)})\hat{\phi}\left(\frac{k\log p}{\log q}\right)\frac{\log p}{p^{k/2}\log q}\\ +\mathcal{O}\left(\frac{1}{\log q}\right),\qquad q\to\infty.\end{aligned}$$

これにより零点の問題が素数の問題に置き換えられた.

【Step 2】 $D(\chi,\phi)$ に $|L(s,\chi)|^2$ を掛けて $\chi$ について平均をとると, 零点分布の問題は結局, $\chi(p^k)$ で捻られた $L$ 関数のモーメント (twisted moment) $\sum_{\chi\in\mathcal{F}_q}|L(s,\chi)|^2\chi(p^k)$ を計算する問題に帰着される. Dirichlet $L$ 関数の研究としてよく知られている Selberg (1946) [32] により $q\to\infty$ としたときの主要項と誤差項を明示的に与

えることができる．主要項は $s \neq 1/2$ のときと $s=1/2$ で変化するのがポイントである．

【Step 3】主要項と誤差項の明示式を使うと, 零点分布の密度関数は $\hat{\phi}$ の値の素数上の和を計算すればよいことが分かる．素数上の和は Riemann-Stieljes 積分に関する部分積分 (Abel の総和法, 部分和法) と素数定理を使えば計算可能である．例えば

$$\sum_p \hat{\phi}\left(\frac{\log p}{\log q}\right)\frac{\log p}{p\log q} = \int_0^\infty \hat{\phi}(x)dx + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log q}\right)$$

などの公式が証明できる．誤差項を評価する際に $\mathrm{supp}(\hat{\phi})$ はある程度小さくしなければならないことが分かる．

かくして, Dirichlet $L$ 関数の族に対する重み付き one-level density の定理 (Theorem 4.3) は証明終了である．

次に対称べき $L$ 関数の場合について考察する．$D(\phi, \mathrm{Sym}^r(f))$ を Weil の明示公式により素数上の和に変形し, 素数定理と部分和法を使うところは Dirichlet $L$ 関数の場合の計算と同様である．一方, $L(s, \mathrm{Sym}^2(f))$ の $a_f(p^k)$ で捻られた平均 (twisted moment) は, 保型表現論・調和解析学の手法によって導出される以下の公式を用いる．

**Theorem 6.1** (Jacquet-Zagier 型跡公式 [都築, S. [40], [41]]). $q$ を素数とする．$k \geqslant 4$ は偶数とし, 正の整数 $n$ は $\gcd(n,q)=1$ とする．複素数 $s$ が $2-k/2 < \mathrm{Re}(s) < k/2-1$ を満たすとする．このとき,

$$\sum_{f\in B_k(q)} \frac{\hat{L}(s, \mathrm{Sym}^2(f))}{\hat{L}(1, \mathrm{Sym}^2(f))} a_f(n) = \mathbb{J}_{\mathrm{id}}(s) + \mathbb{J}_{\mathrm{unip}}(s) + \mathbb{J}_{\mathrm{hyp}}(s) + \mathbb{J}_{\mathrm{ell}}(s)$$

が成り立つ．右辺の明示式は複雑なので省略する．

$n$ が 2 と互いに素のときは [40], $n$ が 2 で割り切れるときは [41, §5] の 2-adic な積分の計算と [40] から示される．Jacquet-Zagier 型跡公式の歴史については解説記事 [35] を参照されたし．

$k \geqslant 6$ のとき, $s=1$ を上の公式に代入すると左辺は $a_f(n)$ の $f$ に関する和になる．これは $S_k(\Gamma_0(q))$ 上の Hecke 作用素 $T(n)$ のトレース $\mathrm{tr}\, T(n)$ に一致する．$s=1$ を代入することで得られる $\mathrm{tr}\, T(n)$ は Eichler-Selberg 跡公式に一致する．したがって, 上記の公式は跡公式 (trace formula) の一般化になっている．Eichler-Selberg 跡公式は, 例えば [30] で一般の重さやレベルの下で記述されている．

Jacquet-Zagier 型跡公式の証明は以下の通りである．$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の不変測度 $dg$ をとり, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の $L^2(\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q}), dg)$ 上の右正則表現 $R$ を考える．

良いテスト関数 $\Phi : \mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q}) \to \mathbb{C}$ をとり, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の右正則表現

$$(R, L^2(\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q}), dg))$$

から誘導される積分作用素

$$R(\Phi) := \int_{\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})} \Phi(g)R(g)dg$$

の積分核を $K_\Phi(g,h)$ とする．$\mathrm{tr}\, R(\Phi) = \int_{\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})} K_\Phi(g,g)dg$ を 2 通りの方法で計算して得られる公式が跡公式である．ここではこの積分の拡張として, 複素パラメーター $s$ に対して定義される spherical な Eisenstein 級数 $E^*(s,g)$ を引っ掛けた積分

$$\int_{\mathrm{PGL}_2(F)\backslash \mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})} K_\Phi(g,g)E^*(s,g)dg$$

を 2 通りの方法で計算する．$K_\Phi(g,g)$ のスペクトル展開を用いて積分の計算をすると $L$ 関数が生じ, $K_\Phi(g,g)$ を $\mathrm{GL}_2$ の共役類上の和に分解し積分を計算すると $\mathbb{J}_{\mathrm{id}}(s)$ などの項が得られる．共役類を用いて分解する手法や分解して得られるものは幾何的展開と呼ばれる．

実は上記の積分は発散するので, その問題を解消し積分計算を正当化する必要がある．今回の場合では, 概均質ベクトル空間に付随する新谷ゼータ関数の解析接続の方法を流用すれば正当化可能である．また $s = 1$ を代入する (厳密には $s = 1$ に関する留数をとる) ことで $E^*(s,g)$ が定数に化けるため, 跡公式が得られる．これは Theorem 6.1 の左辺に $s = 1$ を代入すると分母と分子の $L$ 関数の値がキャンセルされることと対応している．

細かい計算は省略したが, [40] ではハードな解析学をゴリゴリに実行している．一口に整数論と言っても手法は代数・幾何・解析とさまざまであるが, 解析的整数論の専門家たちはほとんどがハード・アナライザーである．そして保型形式と解析的整数論を融合したような何かを研究している筆者も, ハード・アナライザーの一人である．本記事で紹介したような $L$ 関数の零点分布に関する考察およびハード・アナリシスの手法が, 量子場の数理の発展に少しでも貢献できるのであれば, 僥倖の極みである．

## Acknowledgements

講演および本記事の執筆の機会を与えてくださった世話人の廣島文生氏 (九州大学), 西郷甲矢人氏 (長浜バイオ大学), 佐々木格氏 (信州大学) にはこの場を借りて感謝いたします．筆者は整数論や調和解析学の専門家ですが, 量子場の数理については門外漢です．このような者を寛容に受け入れてくださった参加者の方々にも感謝いたします．

またこの原稿の内容に関して, 鈴木正俊氏 (東京工業大学) から有益なコメントをいただいたので感謝いたします．

なお, 本研究は科研費 20K14298 (若手研究) の助成を受けています．

## References

[1] S. Bettin, A. Fazzari, *A weighted one-level density of the non-trivial zeros of the Riemann zeta-function*, to appear in Math Z., arXiv:2208.08421 [math.NT].

[2] D. Bump, *Automorphic forms and representations*, Cambridge University Press, 1997.

[3] A. Connes, *Trace formula in noncommutative geometry and the zeros of the Riemann zeta function*, Selecta Math. (N.S.) **5** (1999), no. 1, 29–106.

[4] H. Davenport, *Multiplicative Number Theory* Graduate Texts in Math, vol. 74, 3rd edn., Springer, New York, 2000.

[5] C. Deninger, *Local L-factor of motives and regularized determinants*, Invent. Math., **107**, (1992), 135–150.

[6] M. P. F. du Sautoy (著), 冨永星 (訳), 『素数の音楽』(文庫版), 新潮社, 2013.

[7] A. Fazzari, *A weighted one-level density of families of L-functions*, Algebra Number Theory **18** No.1, (2024), 87–132.

[8] J. Franel, *Sur la fonction $\xi(t)$ de Riemann et son application à l'arithmétique*, Zürich. Naturf. Ges. 41, 2. Teil. 7–19 (1896).

[9] T. Hasegawa, H. Saigo, S. Saito, S. Sugiyama, *Lattice sums of I-Bessel functions, theta functions, linear codes and heat equations*, preprint, arXiv:2311.06489 [math-ph].

[10] C. P. Hughes, Z. Rudnick, *Linear statistics of low-lying zeros of L-functions*, Q. J. Math. **54** (2003), no. 3, 309–333.

[11] A. E. Ingham, *The distribution of prime numbers*, Reprint of the 1932 original, With a foreword by R. C. Vaughan, Cambridge Math. Lib., Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[12] H. Iwaniec, E. Kowalski, *Analytic number theory*, American Mathematical Society Colloquium Publications, 53. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

[13] N. M. Katz, P. Sarnak, *Random matrices, Frobenius eigenvalues, and monodromy*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 45. American Mathematical Society, Providence (1999).

[14] N. M. Katz, P. Sarnak, *Zeroes of zeta functions and symmetry*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **36** no. 1, (1999), 1–26.

[15] J. P. Keating, N. C. Snaith, *Random matrix theory and $\zeta(1/2+it)$*, Comm. Math. Phys., **214** (2000), 57–89.

[16] J. P. Keating, N. C. Snaith, *Random matrix theory and L-functions at $s=1/2$*, Comm. Math. Phys., **214** (2000), 91–110.

[17] A. Knightly, C. Li, *Traces of Hecke operators*, Mathematical Surveys and Monographs, 133. American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.

[18] A. Knightly, C. Reno, *Weighted distribution of low-lying zeros of* $\mathrm{GL}(2)$ *L-functions*, Canad. J. Math. **71** (1), (2019), 153–182.

[19] E. Kowalski, A. Saha, J. Tsimerman, *Local spectral equidistribution for Siegel modular forms and applications*, Compos. Math. **148** (2012), 335–384.

[20] 松本耕二, リーマンのゼータ関数, 朝倉書店, 2005.

[21] 三枝洋一, $\mathrm{GL}(n)$ の局所ラングランズ対応, 第 21 回整数論サマースクール「$p$ 進簡約群の表現論入門」報告集, 241–370.

[22] T. Miyake, *Modular forms*, Translated from the 1976 Japanese original by Yoshitaka Maeda. Reprint of the first 1989 English edition. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[23] 成田宏秋, 保型 $L$ 関数の定義 -Problem and Motivation-, 第 16 回整数論サマースクール「保型 L 関数」報告集, 137–170.

[24] J. Neukirch (著), 足立恒雄 (監修), 梅垣敦紀 (訳), 代数的整数論, シュプリンガー・ジャパン, 2003.

[25] J. Newton, J. A. Thorne, *Symmetric power functoriality for holomorphic modular forms*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **134** (2021), 1–116.

[26] J. Newton, J. A. Thorne, *Symmetric power functoriality for holomorphic modular forms, II*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **134** (2021), 117–152.

[27] J. Newton, J. A. Thorne, *Symmetric power functoriality for Hilbert modular forms*, preprint, arXiv:2212.03595 [math.NT].

[28] G. Ricotta, E. Royer, *Statistics for low-lying zeros of symmetric power L-functions in the level aspect*, Forum Math. **23** (2011), 969–1028.

[29] H. Saigo, S. Sugiyama, *Quantum works for the working mathematicians*, to appear in Mathematical Foundations for Post-Quantum Cryptography.

[30] R. Schoof, M. van der Vlugt, *Hecke operators and weight distribution of certain codes*, J. Combinatorial Theory, series A, **57** (1991), 163–186.

[31] G. Shimura, *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*, Princeton University Press, 1971.

[32] A. Selberg, *Contributions to the theory of Dirichlet's L-functions*, Skr. Norske Vid.-Akad. Oslo I 1946 (1946), no. 3, 62 pp.

[33] J. P. Serre (著), 彌永健一 (訳), 数論講義 (オンデマンド版), 岩波書店, 2017.

[34] S. Sugiyama, *Spectral zeta functions for the quantum Rabi models*, Nagoya Math. J., **229** (2018), 52–98.

[35] 杉山真吾, Hilbert モジュラー形式に対する Jacquet-Zagier 型の跡公式, 第 11 回福岡数論研究集会報告集, (2018), 57–69.

[36] 杉山真吾, 対称べき $L$ 関数の低い位置にある零点の重みつき密度について, 数理解析研究所講究録 2230「保型形式、保型 L 関数とその周辺」, 1–15, 2022.

[37] S. Sugiyama, *Low-lying zeros of symmetric power L-functions weighted by symmetric square L-values*, preprint, arXiv:2101.06705 [math.NT].

[38] 杉山真吾, Dirichlet $L$ 関数の族の重み付き 1 レベル密度, 数理解析研究所講究録 2259「解析的整数論とその周辺」, 102–114, 2023.

[39] S. Sugiyama, A. I. Suriajaya, *Weighted one-level density of low-lying zeros of Dirichlet L-functions*, Res. Number Theory, **8**, Article number: 55 (2022).

[40] S. Sugiyama, M. Tsuzuki, *An explicit trace formula of Jacquet-Zagier type for Hilbert modular forms*, J. Func. Anal. **275**, Issue 11, (2018), 2978–3064.

[41] S. Sugiyama, M. Tsuzuki, *Quantitative non-vanishing of central values of certain L-functions on* $\mathrm{GL}(2) \times \mathrm{GL}(3)$, Math. Z., **301** (2022), 1447–1479.

[42] 杉山真吾, 横山俊一, 『社会に最先端の数学が求められるワケ (2) データ分析と数学の可能性』, 日本評論社, 2022.

[43] E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta function*, 2nd ed., revised by D. R. Heath-Brown, Oxford, 1986.

[44] H. von Koch, *Sur la distribution des nombres premiers*, Acta Math., **24** (1901), 159–182.

[45] 吉田輝義, $GL_n$ の大域・局所 Langlands 対応, 第 50 回代数学シンポジウム報告集.

*Email address*: `s-sugiyama@se.kanazawa-u.ac.jp`