無限成分スピンを持つ Dicke 型の量子開放系について

公立小松大学　田村　博志
Hiroshi Tamura
Komatsu University

ABSTRACT

Gorini-Kossakowski-Sudarshan-Lindblad-Davies[GKSLD] 型のマスター方程式で記述される開放調和振動子は量子光学の基本的なモデルであるが，その取り扱いは複雑な面がある．ここではこれに関連した事項を，密度行列に作用する作用素の間の交換関係という観点から整理する．

その延長として，無限成分スピンをもつ Dicke 型の開放系を扱う．Completely Positive Trace Preserving[CPTP] 変換によって， この系は互いに相互作用しないが 減衰する 2 自由度に分解することが出来る．さらに，漸近挙動に同期現象が現れることが示される．

この原稿は 興川氏と守屋氏との共同研究に基づく論文 [KMT] の日本語に依る要約である．

keywords : open quantum dynamics, Gorini-Kossakowski-Sudarshan-Lindblad-Davies type master equation, CPTP transformation, open Dicke model, infinite-component vector spin, synchronization

1　記号の説明と交換関係の概略

ここでは，以後の議論の方針と記号の説明のため，少し一般的な観点から GKSLD 型のマスター方程式 [GKS, L, Da2] とそこに現れる作用素間の交換関係を紹介する．

$\mathscr{H}$ を Hilbert 空間，$\mathfrak{C}_1(\mathscr{H})$ を $\mathscr{H}$ 上の trace class 作用素全体のなす Banach 代数とする．

$\mathscr{H}$ 内に作用する (非) 有界作用素 A, B, C に対し, $\mathfrak{C}_1(\mathscr{H})$ 内に作用する (非) 有界作用素 $\mathcal{K}_A$ と $\mathcal{D}_{B\circ C}$ を

$$\mathcal{K}_A(\rho) = [A, \rho], \quad \mathcal{D}_{B\circ C}(\rho) = 2B\rho C - \{CB, \rho\} \quad \text{for} \quad \rho \in \mathfrak{C}_1(\mathscr{H}).$$

により導入する．

$\mathscr{H}$ 上の散逸量子系を記述するために GKSLD 型の master equation

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -i\mathcal{K}_H(\rho(t)) + \sum_j \mathcal{D}_{A_j \circ A_j^\dagger}(\rho(t)),$$

を考える．ここで，H は対応する孤立系の Hamiltonian であり，(非) 有界作用素とその共役 A_j, $A_j^\dagger$ は，系と熱浴の相互作用を記述する．

次の交換関係は以後の議論で主要な役割を演ずる．

Lemma 1.1 $\mathscr{H}$ 上の有界作用素 A, B, C に対し，

$$[\mathcal{K}_A, \mathcal{K}_B] = \mathcal{K}_{[A,B]}, \tag{1.1}$$
$$[\mathcal{K}_A, \mathcal{D}_{B\circ C}] = \mathcal{D}_{[A,B]\circ C} + \mathcal{D}_{B\circ[A,C]}, \tag{1.2}$$
$$\begin{aligned}[\mathcal{D}_{A\circ B}, \mathcal{D}_{C\circ D}] = {} & \mathcal{D}_{[A,C]\circ\{B,D\}} - \mathcal{D}_{\{A,C\}\circ[B,D]} + \mathcal{D}_{[DC,A]\circ B} \\ & + \mathcal{D}_{A\circ[B,DC]} - \mathcal{D}_{[BA,C]\circ D} - \mathcal{D}_{C\circ[D,BA]} + \mathcal{K}_{[BA,DC]},\end{aligned} \tag{1.3}$$
$$\mathcal{D}_{A\circ\mathbf{1}} = \mathcal{K}_A, \qquad \mathcal{D}_{\mathbf{1}\circ B} = -\mathcal{K}_B. \tag{1.4}$$

が成り立つ．

この交換関係の意味は最初のものの導出

$$[\mathcal{K}_A, \mathcal{K}_B]\rho = (\mathcal{K}_A\mathcal{K}_B - \mathcal{K}_B\mathcal{K}_A)\rho = [A,[B,\rho]] - [B,[A,\rho]] = [[A,B],\rho] = \mathcal{K}_{[A,B]}\rho\,,$$

を見れば，明らかであろう．その他のものも同様に直接的に示せるが計算が面倒なものもある．また，A, B, C が非有界作用素の場合には，ここでは言及しないが定義域に関する注意が必要になる．

2　減衰振動子

ここでは，熱浴と相互作用することにより減衰する調和振動子（減衰振動子）[AJP, AL, BP] の性質を我々の立場から整理する．

$\mathscr{F}$ を 1 自由度の Fock 空間とし，そこで作用する消滅作用素と生成作用素 a, $a^\dagger$ と完全正規直交系 $\{\,|n\,\rangle\,\}_{n=0}^\infty$ は

$$a|0\rangle = 0, \quad a\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle, \qquad a^\dagger\,|n-1\rangle = \sqrt{n}\,|n\rangle \qquad (n \in \mathbb{N})$$

を満たしているとする．

ここで，$\{\,|n\,\rangle\,\}_{n=0}^\infty$ で生成される $\mathscr{F}$ の密部分線形空間 $\mathscr{F}_0$ を導入しておく．

$\mathfrak{C}_1(\mathscr{F})$ に作用する Liouvillian として

$$\mathcal{L}_0 = -i\omega\mathcal{K}_{a^\dagger a} + \gamma\Big((J+1)\mathcal{D}_{a\circ a^\dagger} + J\mathcal{D}_{a^\dagger\circ a}\Big)$$

を考え， master equation

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = \mathcal{L}_0\rho(t) \tag{2.1}$$

を扱う.（ここで $\omega, \gamma, J\big(=1/(e^{\beta\omega}-1)\big)$ は正の定数であり， $\beta > 0$ は熱浴の逆温度に対応する.）

議論の基礎となる交換関係 Lem.1.1 は，この場合次のようになる:

Lemma 2.1

$$[\mathcal{K}_a, \mathcal{K}_{a^\dagger}] = 0\,, \quad [\mathcal{K}_a, \mathcal{K}_{a^\dagger a}] = \mathcal{K}_a\,, \quad [\mathcal{K}_a, \mathcal{K}_{a^\dagger a}] = -\mathcal{K}_{a^\dagger}\,, \tag{2.2}$$

$$[\mathcal{K}_a, \mathcal{D}_{a\circ a^\dagger}] = \mathcal{K}_a\,, \quad [\mathcal{K}_{a^\dagger}, \mathcal{D}_{a\circ a^\dagger}] = \mathcal{K}_{a^\dagger}\,, \tag{2.3}$$

$$[\mathcal{K}_a, \mathcal{D}_{a^\dagger\circ a}] = -\mathcal{K}_a\,, \quad [\mathcal{K}_{a^\dagger}, \mathcal{D}_{a^\dagger\circ a}] = -\mathcal{K}_{a^\dagger} \tag{2.4}$$

及び,

$$[\mathcal{K}_{a^\dagger a}, \mathcal{D}_{a\circ a^\dagger}] = [\mathcal{K}_{a^\dagger a}, \mathcal{D}_{a^\dagger\circ a}] = 0\,, \tag{2.5}$$

$$[\mathcal{D}_{a\circ a^\dagger}, \mathcal{D}_{a^\dagger\circ a}] = -2\big(\mathcal{D}_{a\circ a^\dagger} + \mathcal{D}_{a^\dagger\circ a}\big)\,. \tag{2.6}$$

が $\mathscr{D}_0$ 上で成立する.

ここで，$\mathscr{D}_0$ は $\mathscr{F}_0$ の元から作られる有限階作用素の全体で，$\mathfrak{C}_1(\mathscr{F})$ の密部分空間になっている．これらの具体的な作用の例のいくつかを挙げる：

$$\mathcal{K}_a(|n\rangle\langle m|) = \sqrt{n}\,|n-1\rangle\langle m| - \sqrt{m+1}\,|n\rangle\langle m+1|\,,$$

$$\mathcal{K}_{a^\dagger}(|n\rangle\langle m|) = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\langle m| - \sqrt{m}\,|n\rangle\langle m-1|\,,$$

$$\mathcal{D}_{a\circ a^\dagger}(|n\rangle\langle m|) = 2\sqrt{nm}\,|n-1\rangle\langle m-1| - (n+m)\,|n\rangle\langle m|\,, \tag{Leak}$$

$$\mathcal{D}_{a^\dagger\circ a}(|n\rangle\langle m|) = 2\sqrt{(n+1)(m+1)}\,|n+1\rangle\langle m+1| - (n+m+2)\,|n\rangle\langle m|\,. \tag{Gain}$$

議論を判りやすくするために $\mathfrak{C}_1(\mathscr{H})$ の便利な基底を導入しよう.

Def. $\Phi_{n,m} = \mathcal{K}_{a^\dagger}^n \mathcal{K}_a^m(|0\rangle\langle 0|) \quad (n, m = 0, 1, 2, \cdots)$

これらは、次の性質を持つ：

Proposition 2.2 $\{\Phi_{n,m}\}_{n,m=0}^\infty$ は $\mathfrak{C}_1(\mathscr{H})$ で *total.*

実際、
Linear Span of $\{\,\Phi_{n,m}\,|\,n, m = 0, 1, 2, \cdots\}$ = Linear Span of $\{\,|n\rangle\langle m|\,|\,n, m = 0, 1, 2, \cdots\}$
は，$\mathfrak{C}_1(\mathscr{F})$ で密で $\mathcal{K}_a, \mathcal{D}_{a\circ a^\dagger}, etc.$ の定義域に含まれる.

Proposition 2.3

$$\mathcal{K}_{a^\dagger a}\Phi_{n,m} = (n-m)\Phi_{n,m}\,, \quad \mathcal{D}_{a\circ a^\dagger}\Phi_{n,m} = -(n+m)\Phi_{n,m} \quad (n, m = 0, 1, 2, \cdots)$$

が成立する． つまり $\Phi_{n,m}$ は $\mathcal{K}_{a^\dagger a}$ と $\mathcal{D}_{a\circ a^\dagger}$ の同時固有ベクトルになっている．

さて， Liouvillian が半群を生成することを示すために，その各項について調べよう．

Proposition 2.4 *$\mathcal{D}_{a^\dagger\circ a}$ と $\mathcal{D}_{a\circ a^\dagger}$ は，それぞれ CPTP 半群を生成する．*

実際, Kraus form

$$e^{t\mathcal{D}_{a^\dagger\circ a}}(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(t)\rho E_n^\dagger(t) \tag{2.7}$$

etc. が成立することが示せる． ここで，

$$E_n(t) = \frac{(1-e^{-2t})^{n/2}}{\sqrt{n!}} a^{\dagger n} e^{-taa^\dagger} \in \mathfrak{B}(\mathscr{F}) \tag{2.8}$$

は

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n^\dagger(t) E_n(t) = \mathbf{1}\,. \tag{2.9}$$

を満たす．

$\mathcal{L}_0$ による時間発展については，滑らかな正値関数 f を工夫することにより

$$e^{t\mathcal{L}_0} = e^{-it\omega\mathcal{K}_{a^\dagger a}} e^{f(t\gamma)\mathcal{D}_{a^\dagger\circ a}} e^{(t\gamma+f(t\gamma))\mathcal{D}_{a\circ a^\dagger}}\,. \tag{2.10}$$

と表せることが分かる．これは，CPTP 写像の合成として表されているので

Theorem 2.5 *$\{e^{t\mathcal{L}_0}\}_{t\geqslant 0}$ は CPTP 強連続半群となる．*

ことが示される．

次に，$\mathcal{L}_0$ の固有値についてみておく．

$\tau = \frac{1}{2}\log(J+1) = \frac{1}{2}\log\big(e^{\beta\omega}/(e^{\beta\omega}-1)\big)$ とおくと

Theorem 2.6

$$\mathcal{L}_0 e^{\tau\mathcal{D}_{a^\dagger\circ a}}\Phi_{n,m} = \big(-i\omega(n-m)-\gamma(n+m)\big)e^{\tau\mathcal{D}_{a^\dagger\circ a}}\Phi_{n,m} \qquad (n,m=0,1,2,\cdots)\,.$$

が成立する．

これは、

Lemma 2.7

$$e^{\tau\mathcal{D}_{a^\dagger\circ a}}\big(-i\omega\mathcal{K}_{a^\dagger a}+\gamma\mathcal{D}_{a\circ a^\dagger}\big) = \mathcal{L}_0\, e^{\tau\mathcal{D}_{a^\dagger\circ a}}\,. \tag{2.11}$$

と Prop.2.3 からわかる．一方，Lem.2.7 は $\mathcal{L}_0 = -i\omega\mathcal{K}_{a^\dagger a} + \gamma e^{2\tau}\mathcal{D}_{a\circ a^\dagger} + \gamma(e^{2\tau}-1)\mathcal{D}_{a^\dagger\circ a}$ の τ 依存性に注意して，(2.11) の右辺を X_τ とおくと $X_0 = -i\omega\mathcal{K}_{a^\dagger a} + \gamma\mathcal{D}_{a\circ a^\dagger}$ と $dX_\tau/d\tau = \mathcal{D}_{a^\dagger\circ a}X_\tau$ となることが導かれる（ (2.5), (2.6) 参照）ことによる．

これと Thm.2.5 より，Gibbs（平衡）状態への緩和が導かれる：

Corollary 2.8 任意の密度行列 ρ に対し，

$$e^{t\mathcal{L}_0}\rho \to e^{\tau\mathcal{D}_{a^\dagger\circ a}}\Phi_{0,0} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\beta\omega n}}{Z}|\,n\rangle\langle n\,| =: \rho_G \tag{2.12}$$

がトレースノルムによる収束の意味で成立する．

3 無限成分スピン

Hilbert 空間 $\mathscr{G}$ において, 完全正規直交系 $\{\,|n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ と有界作用素 $l_\pm$ と閉作用素 M が

$$M\,|n) = n\,|n), \quad l_\pm|n) = \,|n\pm 1) \qquad (n = 0, \pm1, \pm2, \cdots)\,.$$

を満たすように設定されているとしよう．$\mathscr{G}_0$ を $\{\,|n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ で生成される $\mathscr{G}$ の密部分空間，$\mathscr{E}_0$ を $\mathscr{G}_0$ の元から作られる有限階作用素全体とする．

これが無限成分スピン [Da1] を表す枠組みであることは，次のように考えると 直感的に納得できるだろう．すなわち，$|m)$ が大きさ j のスピンの z 成分が m の状態だと思うと，z 成分の昇降作用素 $J_\pm$ の作用は

$$J_\pm\,|m) = \sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\,|m\pm 1)$$

なので

$$j^{-1}J_\pm\,|m) \to |m\pm 1) = \ell_\pm\,|m) \qquad (j\to\infty)$$

と見ることが出来るからである．

ここでは、この無限成分スピンが外部熱浴と接している系を扱う．マスター方程式

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = \mathcal{L}_1\rho(t) \tag{3.1}$$

において，Liouvilliran として

$$\mathcal{L}_1 = -i\mu\mathcal{K}_M + \alpha_-\mathcal{D}_{l_-\circ l_+} + \alpha_+\mathcal{D}_{l_+\circ l_-}$$

を考える．ここで，$\mu, \alpha_\pm > 0$ であり，$\alpha_\pm$ には大小関係は設けない．

ここでの交換関係 Lem.1.1 は次のように単純になる：

Lemma 3.1

$$[\mathcal{K}_M, \mathcal{D}_{l_-\circ l_+}] = [\mathcal{K}_M, \mathcal{D}_{l_+\circ l_-}] = [\mathcal{D}_{l_-\circ l_+}, \mathcal{D}_{l_+\circ l_-}] = 0 \tag{3.2}$$

が，$\mathscr{E}_0$ 上で成立する．

$\mathcal{K}_M, \mathcal{D}_{l_+\circ l_-}, \mathcal{D}_{l_+\circ l_-}$ によって Kraus 型の半群が生成される：

Lemma 3.2

$$e^{-i\mu t\mathcal{K}_M}(\rho) = e^{-i\mu tM}\rho\, e^{i\mu tM}\,, \tag{3.3}$$

$$e^{t\alpha_-\mathcal{D}_{l_-\circ l_+}}(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2t\alpha_-)^n}{n!} e^{-2t\alpha_-} l_-^n \rho l_+^n\,, \tag{3.4}$$

$$e^{t\alpha_+\mathcal{D}_{l_+\circ l_-}}(\rho) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2t\alpha_+)^m}{m!} e^{-2t\alpha_+} l_+^m \rho l_-^m \tag{3.5}$$

が $\rho \in \mathfrak{C}_1(\mathscr{G})$ に対し成立する．

これらの生成元は可換なので $\mathcal{L}_1$ による時間発展を表す半群は，

Theorem 3.3

$$\begin{aligned} e^{t\mathcal{L}_1}(\rho) =& e^{t\alpha_-\mathcal{D}_{l_-\circ l_+}} e^{t\alpha_+\mathcal{D}_{l_+\circ l_-}} e^{-i\mu t\mathcal{K}_M}(\rho) \\ =& \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(t) l_-^k e^{-i\mu tM}\rho\, e^{i\mu tM} l_+^k\,, \end{aligned} \tag{3.6}$$

で与えられる．ここで

$$c_k(t) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \delta_{n-m,k} \frac{(2t\alpha_-)^n(2t\alpha_+)^m}{n!m!} e^{-2t(\alpha_-+\alpha_+)}\,. \tag{3.7}$$

である．

Corollary 3.4 $\{\, c_k(t)\,\}_{k=-\infty}^{\infty}$ は，

$$c_k(t) > 0, \qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(t) = 1\,,$$

及び

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} kc_k(t) = 2(\alpha_- - \alpha_+)t, \qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 c_k(t) - \Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty} kc_k(t)\Big)^2 = 2(\alpha_- + \alpha_+)t\,,$$

を満たす．

よって，$c_k(t)$ は時刻 t でスピンが k だけずれる確率を表すとみなせる．さらに，スピンの平均と分散は t に比例して変化するので，定常状態が存在しないことがわかる．特に，

Corollary 3.5 任意の $\rho \in \mathfrak{C}_1(\mathscr{G})$ に対し，$e^{t\mathcal{L}_1}\rho \to 0$ が $\mathscr{G}$ 上の作用素の強収束の意味で成り立つ．

4　散逸する無限成分 Dicke モデル

ここでは，$\mathscr{F}$ と $\mathscr{G}$ のテンソル積から作られる Hilbert 空間 $\mathscr{H} = \overline{\mathscr{F} \bigotimes \mathscr{G}}$ において，作用素　$a^\dagger a \otimes \mathbf{1}$, $a \otimes l_+$　などを考える．以後これらを，$a^\dagger a$, al_+　などと略記する．

$\mathfrak{C}_1(\mathscr{H})$ における時間発展として，master 方程式

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = \mathcal{L}\rho(t) \tag{4.1}$$

を，Liouvillian

$$\mathcal{L} = -i\omega\mathcal{K}_{a^\dagger a} - i\mu\mathcal{K}_M - i\lambda\mathcal{K}_{al_+ + a^\dagger l_-} + \gamma\Big((J+1)\mathcal{D}_{a\circ a^\dagger} + J\mathcal{D}_{a^\dagger\circ a}\Big).$$

に対し考える．

このモデルによって，単色光（調和振動子）とスピンが Janes-Cummings 型の相互作用をしている系 [D, Da1, HL] が光子と熱浴の相互作用によって散逸する様子を調べたい，ということがこの節の趣旨である．

次のような作用素の記号を用いる．

$$\begin{aligned}
\mathcal{D} =&(J+1)\mathcal{D}_{a\circ a^\dagger} + J\mathcal{D}_{a^\dagger\circ a}\,,\\
\mathcal{D}_+ =&(J+1)\mathcal{D}_{l_-\circ a^\dagger} + J\mathcal{D}_{a^\dagger\circ l_-}\,,\\
\mathcal{D}_- =&(J+1)\mathcal{D}_{a\circ l_+} + J\mathcal{D}_{l_+\circ a}\,,\\
\mathcal{D}_0 =&(J+1)\mathcal{D}_{l_-\circ l_+} + J\mathcal{D}_{l_+\circ l_-}\,,
\end{aligned}$$

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_{a^\dagger a}\,,\quad \mathcal{K}_+ = \mathcal{K}_{a^\dagger l_-}\,,\quad \mathcal{K}_- = \mathcal{K}_{al_+}\,.$$

これらに関する次の $\mathscr{D}_0 \bigotimes \mathscr{E}_0$ 上の交換関係が成立する．

Lemma 4.1

$$[\mathcal{K},\mathcal{K}_\pm] = [\mathcal{K}_M,\mathcal{K}_\mp] = \pm\mathcal{K}_\pm\,,\quad [\mathcal{D},\mathcal{K}_\pm] = \pm\mathcal{D}_\pm\,,\quad [\mathcal{K}_\pm,\mathcal{D}_\mp] = \mp\mathcal{D}_0\,, \tag{4.2}$$

$$[\mathcal{K},\mathcal{D}] = [\mathcal{K}_M,\mathcal{D}] = [\mathcal{K}_+,\mathcal{K}_-] = [\mathcal{K}_\pm,\mathcal{D}_\pm] = [\mathcal{D}_0,\mathcal{K}_\pm] = [\mathcal{D}_0,\mathcal{D}] = 0\,. \tag{4.3}$$

さて，ここで $\mathfrak{C}_1(\mathscr{H})$ 上の変換

$$W(\alpha) = e^{\alpha K_+ - \bar{\alpha}K_-} \quad \text{for} \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

を導入しよう．（これは，$\mathscr{H}$ 上の unitary 作用素による相似変換になっている．）これによって，作用素の次の変換が導かれる．

Lemma 4.2 （変換則）

$$W(\alpha)\begin{pmatrix}\mathcal{K}\\ \mathcal{K}_M\\ \mathcal{K}_\pm\\ \mathcal{D}\\ \mathcal{D}_+\\ \mathcal{D}_-\\ \mathcal{D}_0\end{pmatrix}W(-\alpha)=\begin{pmatrix}\mathcal{K}-\alpha\mathcal{K}_+-\bar{\alpha}\mathcal{K}_-\\ \mathcal{K}_M+\alpha\mathcal{K}_++\bar{\alpha}\mathcal{K}_-\\ \mathcal{K}_\pm\\ \mathcal{D}-\alpha\mathcal{D}_+-\bar{\alpha}\mathcal{D}_-+|\alpha|^2\mathcal{D}_0\\ \mathcal{D}_+-\bar{\alpha}\mathcal{D}_0\\ \mathcal{D}_--\alpha\mathcal{D}_0\\ \mathcal{D}_0\end{pmatrix}, \tag{4.4}$$

$$e^{s\mathcal{D}}\begin{pmatrix}\mathcal{K}_+\\ \mathcal{K}_-\\ D_+\\ \mathcal{D}_-\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathcal{K}_+\cosh s+\mathcal{D}_+\sinh s\\ \mathcal{K}_-\cosh s-\mathcal{D}_-\sinh s\\ \mathcal{D}_+\cosh s+\mathcal{K}_+\sinh s\\ \mathcal{D}_-\cosh s-\mathcal{K}_-\sinh s\end{pmatrix}e^{s\mathcal{D}}. \tag{4.5}$$

これを用いると

$$\begin{aligned}&\delta=\lambda/(\gamma^2+(\omega-\mu)^2),\\ &\alpha=-(\omega+i\gamma\coth s)\delta, \qquad\qquad (s>0)\\ &\zeta=i\gamma\delta\,\mathrm{cosech}\,s.\end{aligned}$$

とおくとき，

Theorem 4.3 （*dressed photon* と *dressed spin* への分離）

$$\begin{aligned}&\big(-i(\omega\mathcal{K}+\mu\mathcal{K}_M+\lambda(\mathcal{K}_++\mathcal{K}_-))+\gamma\mathcal{D}\big)W(\alpha)e^{s\mathcal{D}}W(\zeta)\\ &\qquad=W(\alpha)e^{s\mathcal{D}}W(\zeta)\big(-i(\omega\mathcal{K}+\mu\mathcal{K}_M)+\gamma\mathcal{D}+\lambda\gamma\delta\mathcal{D}_0\big),\end{aligned} \tag{4.6}$$

となることが導かれる．これは，散逸無限成分 Dicke model が，互いに相互作用しない減衰振動子 (dressed photon) と減衰無限成分スピン (dressed spin) の系に変換されたことを示している．

$W(\alpha)e^{s\mathcal{D}}W(\zeta)$ は $\mathfrak{C}_1(\mathscr{H})$ 上の CPTP map であり，パラメーター $s>0$ に依存するが s は他の部分に影響を与えない．この任意性は，交換関係

$$[\mathcal{D},-i(\omega\mathcal{K}+\mu\mathcal{K}_M)+\gamma\mathcal{D}+\lambda\gamma\delta\mathcal{D}_0]=0\,.$$

によっているが，これが何か物理的意味のある対象性と関連するかどうか，筆者には不明である．また，γ (振動子の散逸の強さ）が小さいときは勿論，大きいときも $\lambda\gamma\delta$ (dressed spin の散逸の強さ) が小さくなることが見て取れる．

4.1 同期現象

ここでは、密度行列の時間発展の漸近挙動が同期現象を示すことを見る．結果を示すと，

Theorem 4.4

$$\forall\rho(\textit{density matrix}),\exists\rho_0(\textit{density matrix}): \lim_{t\to\infty}\|e^{t\mathcal{L}}\rho - e^{t(-i\mu(\mathcal{K}_M+\mathcal{K})+\lambda\gamma\delta\mathcal{D}_0)}\rho_0\|_1 = 0$$

となる．これは，長時間では「photon の振動数 ω が spin の振動数 μ に同期し，spin のみ散逸するように運動する.」ことを示している．

簡単のため

$$\rho = W(\alpha)e^{s\mathcal{D}}W(\zeta)\sigma$$

の場合の証明の概略を述べる。dressed photon だけを時間発展させるとその極限は平衡状態になり，それ以上に Hamiltonian による時間発展によって状態は変化しないので，

$$\Big(e^{t(-i\omega\mathcal{K}+\gamma\mathcal{D})}\otimes\mathbf{1}\Big)\sigma \to \rho_G\otimes\rho_* = \Big(e^{t(-i\mu\mathcal{K})}\otimes\mathbf{1}\Big)\rho_G\otimes\rho_* \qquad (t\to\infty) \tag{4.7}$$

と書ける．ここで，最右辺で任意に選べるパラメーターを μ に選んだ．(4.6) を用いて，$\mathcal{L}$ を分離して photon のみの長時間での挙動は (4.7) 式の最右辺に近いので，

$$e^{t\mathcal{L}}\rho = e^{t\mathcal{L}}W(\alpha)e^{s\mathcal{D}}W(\zeta)\sigma = W(\alpha)e^{s\mathcal{D}}W(\zeta)\Big(\mathbf{1}\otimes e^{t(-i\mu\mathcal{K}_M+\lambda\gamma\delta\mathcal{D}_0)}\Big)\Big(e^{t(-i\omega\mathcal{K}+\gamma\mathcal{D})}\otimes\mathbf{1}\Big)\sigma$$

$$\sim W(\alpha)e^{s\mathcal{D}}W(\zeta)\Big(\mathbf{1}\otimes e^{t(-i\mu\mathcal{K}_M+\lambda\ \ \gamma\delta\mathcal{D}_0)}\Big)\Big(e^{t(-i\mu\mathcal{K})}\otimes\mathbf{1}\Big)\rho_G\otimes\rho_*$$

$$= e^{t(-i\mu(\mathcal{K}_M+\mathcal{K})+\lambda\gamma\delta\mathcal{D}_0)}W(\alpha)e^{s\mathcal{D}}W(\zeta)\rho_G\otimes\rho_*$$

となる．最後の等式では，$\omega=\mu$ の場合，時間発展が変換 $W(\alpha)e^{s\mathcal{D}}W(\zeta)$ と可換になること

$$[\mathcal{K}_M+\mathcal{K}, W(\alpha)e^{s\mathcal{D}}W(\zeta)] = [\mathcal{D}_0, W(\alpha)e^{s\mathcal{D}}W(\zeta)] = 0$$

を，用いた.（ここで，上で任意に選べるパラメーターを μ に選んだことが効いている.）

5 まとめ

減衰振動子の交換関係を用いた分かり易い取り扱い方を紹介した．この方法の応用として，無限成分スピンをもつ Dicke 型モデルの開放系の，CPTP 変換による互いに相互作用しないが減衰する 2 自由度への分解法を示した．同期現象のメカニズムの説明として「熱平衡によって自由度の 1 部が死に，生き残った自由度の下で運動が続く」というものがある [GCZ] が，我々の無限成分 Dicke 型モデルの開放系がこのメカニズムの単純なモデルによる実例となっている．

参考文献

[AJP] Attal S, Joye A and Pillet C-A(Eds.) 2006 *Open quantum systems II, The Markovian approach*, Lecture Notes in Mathematics **1881** (Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag)

[AL] Alicki R and Lendi K 1987 *Quantum Dynamical Semiroups and Applications*, Lecture Notes in Physics **286** (Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag)

[BP] Breuer H P and Ptruccione F 2002 *The theory of open quantum systems* (Oxford: Oxford University Press)

[Da1] Davies E B 1973 Exact dynamics of an infinite-atom Dicke maser model *Commun. Math. Phys.* **33** 187-205

[Da2] Davies E B 1976 *Quantum theory of open systems* (London: Academic Press)

[D] Dicke R H 1954 Coherence in spontaneous radiation processes *Phys. Rev.* **93** 99-110

[GCZ] Giorgi G L, Cabot A and Zambrini R 2019 Transient synchronization in open quantum systems *in Advances in Open Systems and Fundamental Tests of Quantum Mechanics Proceedings of the 684. WE-Heraeus-Seminar, Bad Honnef, Germany, 2018* 73-89

[GKS] Gorini V, Kossakowski A and Sudarshan E C G 1976 Completely positive dynamical semigroups of N-level systems *J. Math. Phys.* **17** 821-825

[HL] Hepp K and Lieb E 1973 On the superradiant phase transition for molecules in a quantized radiation field; the Dicke Maser model *Ann. Phys. (N. Y.)* **76** 360-404

[KMT] Kyokawa R, Moriya H, Tamura H 2020 On the open Dicke-type model generated by an infinite-component vector spin, *Open Systems and Information Dynamics* **27**(3), 2050012 (2020) (DOI/10.1142/S1230161220500122, arXiv:2003.02262)

[L] Lindblad G 1976 On the generator of quantum dynamical semigroups *Commun. Math. Phys.* **48** 119-130