# Descriptive complexity results related to uniform distribution theory

Hajime Kaneko
Institute of Mathematics, University of Tsukuba
Research Core for Mathematical Sciences, University of Tsukuba

**概 要**

本稿では, Bill Mance 氏との共同研究の内容について報告を行う. Borel 可測集合の複雑さを測るための手段として Borel 階層の決定がある. ($b$ 進展開や, 正則連分数展開に関する) 正規数全体の集合に関する Borel 階層が先行研究によって決定されていた. それに対して, 等比数列の小数部分という観点から見た一般化正規数に対しては, Borel 階層の決定問題は未解決である. 本稿では, 等比数列および一般の線形回帰数列の観点から正規数を一般化したものに対して, Borel 階層を考察する.

## 1 序論

数論の研究対象として現れるユークリッド空間の部分集合の多くは Borel 可測集合である (以下, 単に Borel 集合と呼ぶ). Borel 階層とは, Borel 集合の複雑さを表すものである. まずは Borel 階層の大まかなイメージを述べる. 最も単純な Borel 集合は, 開集合及び閉集合である. 次に単純な Borel 集合は開集合の加算共通集合として表せる集合 ($G_\delta$ 集合) および閉集合の加算和集合として表せる集合 ($F_\sigma$ 集合) である. このようにして, 加算共通集合や加算和集合を繰り返すことで, 複雑な Borel 集合を得ることができる. Borel 階層では, Borel 集合に対して, この操作を何回繰り返す必要があるかに応じて複雑さを測る. 本研究の目標は一様分布論の研究対象として現れる特定の集合の Borel 階層を決定することである. 以下, Borel 階層の定義を行う.

$X$ は $\mathbb{R}^n$ や $\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^m$ のようなユークリッド空間や, 長さが 0 ではない区間 (例えば $[0,1]$) にユークリッド位相を導入したものとする. Borel 階層において, $X$ としてポーランド空間と呼ばれる一般の位相空間を扱うことができるが, 本稿では上記の空間のみを扱う.

さて, Borel 階層の定義のために, 以下を初期設定とする:

$$\Sigma_1^0(X) := \{U \subset X \mid U \text{ は } X \text{ の開集合.}\},$$
$$\Pi_1^0(X) := \{X \backslash U \mid U \in \Sigma_1^0(X)\} = \{A \subset X \mid A \text{ は } X \text{ の閉集合.}\}.$$

次に, 正整数 $n$ に対して, 以下のように帰納的に定義をする.

$$\begin{aligned}\Sigma^0_{n+1}(X) &:= \{\cup_{k=1,2,\ldots}U_k \mid \text{任意の } k \geq 1 \text{ に対して } U_k \in \Pi^0_n(X).\},\\ \Pi^0_{n+1}(X) &:= \{X\backslash U \mid U \in \Sigma^0_{n+1}(X).\}\\ &\qquad = \{\cap_{k=1,2,\ldots}A_k \mid \text{任意の } k \geq 1 \text{ に対して } A_k \in \Sigma^0_n(X).\}.\end{aligned}$$

$n$ が増えるにつれて複雑な集合が認められる. さらに, 正整数を順序数とみなすことにより, 最小の非可算集合 $\omega_1$ より小さい任意の順序数 $\xi$ まで $\Sigma^0_\xi(X)$ および $\Pi^0_\xi(X)$ が定義されるが, 本稿では割愛する. ここでは, $X$ の Borel 集合全体の集合系 $\mathcal{B}(X)$ が,

$$\mathcal{B}(X) = \bigcup_{\xi<\omega_1} \Sigma^0_\xi(X) = \bigcup_{\xi<\omega_1} \Pi^0_\xi(X)$$

と表されることのみを紹介する. 次節以降に紹介する結果は正整数 $n$ に対する集合系 $\Sigma^0_n(X)$ および $\Pi^0_n(X)$ に関するものである. また, 本稿では各研究対象ごとに $X$ を固定するので, 正整数 $n$ に対して $\Sigma^0_n(X)$, $\Pi^0_n(X)$ をそれぞれ $\Sigma^0_n$, $\Pi^0_n$ と省略する.

定義によると, $\Sigma^0_2$ の元は $X$ の $F_\sigma$ 集合であり, $\Pi^0_2$ の元は $X$ の $G_\delta$ 集合である. 例えば, $X = \mathbb{R}$ のとき, $[0,1) \in \Sigma^0_2 \cap \Pi^0_2$ である. 実際,

$$[0,1) = \bigcup_{k\geq 1}\left[0, 1-\frac{1}{k+1}\right] = \bigcap_{k\geq 1}\left(-\frac{1}{k+1}, 1\right)$$

と表せるためである. また, $\Sigma^0_3$ の元は, $X$ の $G_\delta$ 集合の加算和として表せる集合 ($G_{\delta\sigma}$ 集合) である. つまり, $\cup_{k=1,2,\ldots}\cap_{\ell=1,2,\ldots}U_{k,\ell}$(ただし, 各 $k,\ell$ に対して $U_{k,\ell}$ は開集合) と表せる. 同様に, $\Pi^0_3$ の元は, $X$ の $F_\sigma$ 集合の加算共通集合として表せる集合 ($F_{\sigma\delta}$ 集合) である. つまり, $\cap_{k=1,2,\ldots}\cup_{\ell=1,2,\ldots}A_{k,\ell}$(ただし, 各 $k,\ell$ に対して $A_{k,\ell}$ は閉集合) と表せる.

さて, 任意の正整数 $n$ に対して, $\Sigma^0_n \subset \Pi^0_{n+1}$ および $\Pi^0_n \subset \Sigma^0_{n+1}$ が成立する. 実は, $\Sigma^0_n \subset \Sigma^0_{n+1}$ および $\Pi^0_n \subset \Pi^0_{n+1}$ も成立する. したがって, $\Delta^0_n := \Sigma^0_n \cap \Pi^0_n$ とおくと, $\Pi^0_n \subset \Delta^0_{n+1}$ および $\Sigma^0_n \subset \Delta^0_{n+1}$ が成立する. 包含関係を図示すると, 以下のようになる (左の集合は右に含まれる):

$$\begin{array}{ccccccccc} & \Sigma^0_1 & & \Sigma^0_2 & & \Sigma^0_3 & & \Sigma^0_4 & \\ \Delta^0_1 & & \Delta^0_2 & & \Delta^0_3 & & \Delta^0_4 & & \cdots. \\ & \Pi^0_1 & & \Pi^0_2 & & \Pi^0_3 & & \Pi^0_4 & \end{array}$$

Borel 階層における主な研究テーマの一つは, 与えられた Borel 集合が上記の図のどの位置に属するかを解明することである. この研究テーマをより明確化するために, hard, complete という概念を導入する. Borel 集合 $A$ が $\Sigma^0_n$-hard とは, $A \notin \Pi^0_n$ となることである. また, $A$ が $\Pi^0_n$-hard とは, $A \notin \Sigma^0_n$ となることである. さらに, $A$ が $\Sigma^0_n$-complete とは, $A \in \Sigma^0_n\backslash\Pi^0_n$ となることである. つまり, $A$ を"開集合, 閉集合を用いてもっとも単純に表そう"とすると, 加算和, 加算共通を取るという操作をちょうど $n-1$ 回繰り返す必要があり, 最後の操作が必然的に加算和を取るという操作になることである. 例えば, $X = \mathbb{R}$ のとき, $\mathbb{Q}$ が

$\Sigma_2^0$-complete であることが知られている. $A$ が $\Pi_n^0$-complete とは, $A \in \Pi_n^0 \backslash \Sigma_n^0$ となることである. $A$ が $\Pi_n^0$-complete となる必要十分条件は, $X \backslash A$ が $\Sigma_n^0$-complete となることである. したがって $X = \mathbb{R}$ のとき, $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ は $\Pi_2^0$-complete である. さて, 次の節では正規数に関連した集合の Borel 階層に関する先行研究を紹介する.

# 2 Borel 階層に関する先行研究

$b$ を 2 以上の整数とする. $\xi$ を実数とし, その $b$ 進展開を

$$\xi = \lfloor \xi \rfloor + \sum_{n=1}^{\infty} s_n b^{-n}$$

とする. ここで, $\lfloor \xi \rfloor$ は $\xi$ の整数部分であり, $n \geq 1$ に対して $s_n \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ とする. ただし, $b$ 進展開の一意性を保証するために, 無限に多くの正整数 $n$ に対して $s_n \leq b-2$ とする. また, $s_n (n = 1, 2, \ldots)$ を $\xi$ の $b$ 進展開における digit と呼ぶ. より一般に, 数系において実数を整数の列で表現するとき, 個々の整数を digit と呼ぶ. 次の節では正則連分数展開の digit も扱う. $\xi$ が $b$ 進正規数であるとは, $\xi$ の $b$ 進展開において任意の長さのブロックが均一の割合で現れることである. この場合, 長さ $k$ のブロックは $b^k$ 個のため, $k$ を任意の正整数とし, $v_1, \ldots, v_k \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ も任意に選ぶと

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \mathrm{Card} \{1 \leq n \leq N \mid s_n = v_1, \ldots, s_{n+k-1} = v_k\} = \frac{1}{b^k}$$

が成立する. $b$ 進正規数とは, $b$ 進展開における digit が統計的に一様に現れる実数ということもできる. ほとんどすべての実数が $b$ 進正規数であることが知られている. しかし, 具体的な数学定数 (例えば $\sqrt{2}$ や $e, \pi$ など) が $b$ 進正規数かどうかは未解決である. $b$ 進正規数全体の集合を $\mathcal{N}(b)$ とおく. $\mathcal{N}(b)$ の Borel 階層を決定すること, つまり $\mathcal{N}(b)$ がどれくらい複雑な集合であるかを決定することは, 自然な問題である. $\mathcal{N}(b) \in \Pi_3^0$ であることは, 比較的容易にわかる. 証明のアイディアを述べる. $b$ 進正規数は極限で定義されているが, 極限は"十分大きい任意の $N$"に対して成立する性質である. これを $(\exists N_0)\ A_{N_0}$(ただし, $A_{N_0}$ は閉集合) の形で表す. さらに, これが任意の正整数 $k$ および $v_1, \ldots, v_k \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ に対して要求される (つまり加算共通集合) ので, $\mathcal{N}(b) \in \Pi_3^0$ である. 難しい点は, $\mathcal{N}(b)$ が $\Pi_3^0$-complete であるかどうか (つまり $\Pi_3^0$-hard) かどうかを判定することである.

Ki と Linton[6] は, 実際に $\mathcal{N}(b)$ が $\Pi_3^0$-complete であることを証明した. その後, Becher, Heiber と Slaman[3] は $\cap_{b \geq 2} \mathcal{N}(b)$(任意の $b \geq 2$ に対して $b$ 進正規数である実数は単に正規数と呼ばれる) が $\Pi_3^0$-complete であることを証明した. さらに, Becher と Slaman[4] は $\cup_{b \geq 2} \mathcal{N}(b)$ が $\Sigma_4^0$-complete であることを証明した.

$$\mathbb{R} \backslash \bigcup_{b \geq 2} \mathcal{N}(b)$$

を考えると, 「任意の $b \geq 2$ に対して ($b$-進正規数ではない)」実数 (absolutely abnormal number) 全体の集合が $\Pi_4^0$-complete であることがわかる.

$b$ 進展開の digit の一様性に関しては, 数系および一様分布論の観点から 2 通りの一般化をすることができる. 次の節では数系の観点による正規数の一般化を紹介し, Borel 階層を考察する. 最後の節で主結果として, 線形回帰数列の小数部分という観点から一般化された正規数全体の集合の Borel 階層決定に関する新しい定理を報告する.

## 3 数系の観点による正規数の一般化

$b$ 進展開以外の数系として実数の正則連分数展開を考察する. 簡単のために, 無理数 $\xi \in [0,1)$ のみを考え, その正則連分数展開を

$$\xi = 0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}} = [0; a_1, a_2, \ldots] \tag{3.1}$$

のように書く. 正則連分数展開の digit は (最初の 0 を除けば) 正整数である. ところが, $b$ 進展開とは違い, 正則連分数展開の digit の出現頻度には"統計的な偏り"がある. 例えば, ランダムな無理数 $\xi \in [0,1)$ に対して, digit 1 が最も出現頻度が高いことが知られている. この"統計的な偏り"を加味した上で, 正規数を定義する. ここで, digit の"統計的な偏り"を測るために Birkhoff の個別エルゴード定理を用いる. ただし, 証明は割愛する. Birkhoff の個別エルゴード定理を解説するために, 測度保存力学系およびエルゴード性という概念を導入する必要がある.

本節では, 簡単のために $X = [0,1]$ とし, $X$ の上で定義される数系を考える. なお, 1 の展開は, 本稿では考えないこととする. それでもなお $X = [0,1]$ と定義した理由は, $[0,1]$ がコンパクト集合であり, 扱いやすいためである. $\mathcal{B}$ を $[0,1]$ 上の Borel 集合全体の集合系とする. $\mu$ を $([0,1], \mathcal{B})$ 上の確率測度とする. さらに, $T$ を $X$ から $X$ への写像 ($X$ 上の変換) とする. さて, $([0,1], \mathcal{B}, \mu, T)$ が測度保存力学系とは, $\mu$ が $T$-不変, つまり任意のボレル可測集合 $A \in \mathcal{B}$ に対して, $\mu(T^{-1}A) = \mu(A)$ が成立することである. さらに, 以下が成立するとき, $\mu$ は $T$ に対してエルゴード的と定義する: ボレル可測集合 $A \in \mathcal{B}$ が $T^{-1}A = A$ を満たすならば, $\mu(A) = 0$ または $\mu(A) = 1$ となる. さて, エルゴード定理を述べる.

**定理 3.1** (Birkhoff の個別エルゴード定理)**.** *$([0,1], \mathcal{B}, \mu, T)$ を測度保存力学系とし, $\mu$ は $T$ に対してエルゴード的とする. また, $f$ は $[0,1]$ 上可積分関数とする.*
*このとき, 測度 $\mu$ に関してほとんどすべての $x \in [0,1]$ に対して,*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(T^j x) = \int_0^1 f d\mu$$

*が成立する.*

(ルベーグ測度の意味で) ほとんどすべての実数が正規数であるという事実が, エルゴード定理からも得られることを紹介する. 実数 $x$ の小数部分を $\{x\}$ で表すことにし, $[0,1]$ 上の変換 $T_b$ を $T_b(\{x\}) = \{bx\}$ により定義する. このとき, $[0,1]$ 上のルベーグ測度 $\mu_L$ が $T_b$ の不変測度であることを確認できる. さらに, $\mu_L$ が $T_b$ に対してエルゴード的であることが知られている.

実数 $\xi \in [0,1)$ の $b$ 進展開を再び $\xi = \sum_{m=1}^{\infty} s_m b^{-m}$ で表す. すると,

$$b\xi = \sum_{m=1}^{\infty} s_m b^{-(m-1)} = \sum_{m=0}^{\infty} s_{m+1} b^{-m}$$

より, $T_b(\xi) = \sum_{m=1}^{\infty} s_{m+1} b^{-m}$ であることがわかる. さて, $T_b^0(\xi) := \xi$ および正整数 $n$ に対して $T_b^n(\xi) = T_b^{n-1}(\xi)$ と帰納的に定義する. つまり, $T_b^n$ は $T_b$ の $n$ 回反復合成である. すると, 一般の非負整数 $n$ に対して

$$T_b^n(\xi) = \sum_{m=1}^{\infty} s_{m+n} b^{-m}$$

であることがわかる. さて, $v_1, \ldots, v_k \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ を固定する. また, $j$ を非負整数とする. $\xi$ の $b$ 進展開において $j+1$ 番目の digit から始まるブロック $s_{j+1} \ldots s_{j+k}$ が $v = v_1 \ldots v_k$ と一致するかどうかを, 指示関数を用いて表現する. まず, $[0,1]$ 上の可測集合 $A$ に対して,

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A, \\ 0 & x \in [0,1] \backslash A \end{cases}$$

とおく. $\phi(v) = \sum_{\ell=1}^{k} v_\ell b^{-\ell}$, $\psi(v) = \phi(v) + b^{-k}$ とおき, $I(v) = [\phi(v), \psi(v))$ とおく. $\xi$ の $j+1$ 番目の digit から始まるブロックが $v_1 \ldots v_k$ と一致する必要十分条件は, $T_b^j(\xi)$ の 1 番目の digit から始まるブロックが $v_1 \ldots v_k$ と一致すること, つまり, $1_{I(v)}(T_b^j(\xi)) = 1$ となることである. したがって, $f = 1_{I(v)}$ のときエルゴード定理の左辺 $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} 1_{I(v)}(T_b^j \xi)$ は, $\xi$ の $b$ 進展開におけるブロック $v$ の出現頻度を表す. 一方, $f = 1_{I(v)}$ のときエルゴード定理の右辺を計算すると,

$$\int_0^1 1_{I(v)}(x) d\mu_L = \int_{I(v)} 1 d\mu_L = \mu_L(I(v)) = \frac{1}{d^k}$$

となる. したがって, ほとんどすべての実数は $b$ 進正規数である. また, エルゴード定理をもとに正規性を一般化することが自然であることもわかる.

同様の計算を, 正則連分数展開に対しても行う. $[0,1]$ 上の変換 $T_G$ を $T_G(x) = \{1/x\}$ により定義する. $[0,1]$ 上の Gauss 測度 $\mu_G$ を

$$\mu_G(A) = \frac{1}{\log 2} \int_A \frac{1}{1+x} d\mu_L(x)$$

により定義する. このとき, ガウス測度 $\mu_G$ が $T_G$ の不変測度であることを確認できる. さらに, $\mu_G$ が $T_G$ に対してエルゴード的であることが知られている. 無理数 $\xi \in [0,1)$ の正則

連分数展開を再び (3.1) のように表す．ただし, エルゴード理論では不変測度について測度 0 の集合のこと無視するため, 有理数の連分数展開はここでは考えないことを再び強調する．$T_G(\xi)$ を定義に従って計算することにより, $T_G(\xi) = [0; a_2, a_3, \ldots]$ であることがわかる．さらに一般の非負整数 $n$ にたいして,

$$T_G^n(\xi) = [0; a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots]$$

であることもわかる．さて, 正整数からなる長さ $k$ のブロック $v = v_1 \ldots v_k$ を固定する．すると, 実数 $\xi$ について, 正則連分数展開の 1 番目の digit から始まるブロック $a_1 \ldots a_k$ が $v$ に一致する必要十分条件は, $\xi$ がとある区間 $J(v)$($J(v)$ は $v$ のみに依存) に属することである．例えば, 長さ 1 のブロック $v = c$ に対しては, $J(c) = [1/c, 1/(1+c))$ である．

以上の準備の下, 以下が成立する: $j$ を非負整数とする．$\xi$ の正則連分数展開において $j+1$ 番目の digit から始まるブロック $a_{j+1} \ldots a_{j+k}$ が $v$ と一致する必要十分条件は, $T_G^j(\xi)$ の 1 番目の digit から始まるブロックが $v$ と一致すること, つまり, $1_{J(v)}(T_G^j(\xi)) = 1$ となることである．したがって, $f = 1_{J(v)}$ のときエルゴード定理の左辺 $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(T_G^j \xi)$ はほとんどすべての実数 $\xi$ に対するブロック $v$ の出現頻度を表す．また, $f = 1_{J(v)}$ のときエルゴード定理の右辺は

$$\frac{1}{\log 2} \int_{J(v)} \frac{1}{1+x} d\mu_L(x) \tag{3.2}$$

となる．例えば $k = 1$, $v = c$ のとき, (3.2) の値は

$$\frac{1}{\log 2} (\log(1 + c^{-1}) - \log(1 + (1+c)^{-1}))$$

である．特に, 長さ 1 のブロックの中で digit 1 の出現頻度が最も高いことが分かる．

さて, 無理数 $\xi$ の正則連分数展開 (3.1) に対して, 任意のブロック $v$ の出現頻度が (3.2) であるとき, $\xi$ は正則連分数展開に関する正規数と呼ぶ．Airey, Jackson, Kwietniak および Mance[1] は正則連分数展開に関する正規数全体の集合が $\Pi_3^0$-complete であることを証明した．彼らの結果は, より一般に測度保存力学系に関連にある数系に関する正規数全体の集合にも適用できる．ただし, digit の無限列の specification と呼ばれる性質に関する情報をあらかじめ研究する必要がある．$\beta$-展開という数系も specification と呼ばれる性質が知られているため, 彼らの結果を適用ができる．ここで, $\beta$-展開は $b$ 進展開の $b$ を実数 $\beta > 1$ に一般化した展開 $\xi = \sum_{j \geq 1} s_n \beta^{-j}$ である．なお digit $s_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ は $\beta$-変換 $T_\beta$(ただし, $T_\beta(x) = \{\beta x\}$) を用いて定義される．ところが, $\beta$-展開の多次元版の数系に関しては, specification について知られていないため, [1] の結果を適用することはできない．そのため正規数全体のボレル階層の決定は未解決である．

次の節では, 測度保存力学系という範疇で考えることが一般には難しい対象を扱う．具体的には線形回帰数列の小数部分の一様性を扱う．

# 4　主結果

$\boldsymbol{x} = (x_n)_{n\geq 0}$ を実数列とする．$\boldsymbol{x}$ が 1 を法として一様分布する (または小数部分が一様分布する) とは, 以下が成立することである: 任意の実数 $0 \leq a < b \leq 1$ に対して,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\mathrm{Card}\{0 \leq n \leq N-1 \mid a \leq \{x_n\} < b\} = b - a.$$

つまり, 任意の区間 $[a, b)$ を与えたときに, 小数部分 $\{x_n\}$ がその区間に適切な頻度で属するということである．具体例として等差数列を考える．等差数列が 1 を法として一様分布する必要十分条件は, 公差が無理数となることであると知られている．

次に, 公比を固定した等比数列の小数部分の一様性を考える．

$$\{\xi \in \mathbb{R} \mid (\xi\alpha^n)_{n\geq 0}\text{は 1 を法として一様分布する．}\} \tag{4.1}$$

とおく．まずは $\alpha$ が 2 以上の整数 $b$ の場合を考える．すると, $\{b^n\xi\} = T_b^n(\xi)$ であることを, $n$ に関する数学的帰納法により証明することができる．ただし, 一般の実数 $\xi$ に対しても $T_b(\xi) = \{b\xi\}$ とおく．よって, $\{b^n\xi\}(n = 0, 1, \ldots)$ の分布は $\xi$ の $b$ 進展開の digit から解析することができる．特に, (4.1) の集合は, $b$ 進正規数全体の集合に一致する (Wall[7])．よって, $\alpha > 1$ が一般の実数の場合, (4.1) の集合は正規数を一般化した概念といえる．

ところが, 実数 $\xi$ に対して, $\{\alpha^n\xi\}$ と $T_\alpha^n(\xi)$ が一致するとは限らない．よって, (4.1) の集合は $\beta$-展開における正規数全体の集合とは限らない．さらに, 一般に $\{\alpha^n\xi\} \neq \{\alpha^n(1+\xi)\}$ であり, $[0, 1]$ 上の $\xi$ に制限して考察することはできない．そのため, $\{\alpha^n\xi\}$ の研究に前節の測度保存力学系を応用することは難しい．特に, (4.1) の集合の Borel 階層の決定問題は, 前節の結果を用いることはできないため, 一般に未解決である．

[2] では, 代数的数に関連のある線形回帰数列の小数部分に関する新しい公式が記載されている．本稿では, 実数列 $(x_n)_{n\geq 0}$ が線形回帰数列とは, ある $\ell \geq 0$ と $A_\ell, \ldots, A_0 \in \mathbb{Z}(A_0 \neq 0)$ が存在して, 任意の $n \geq 0$ に対して

$$x_{n+\ell+1} + A_\ell x_{n+\ell} + \cdots + A_0 x_n = 0$$

を満たすことである．上記の公式を応用することにより, 公比が Pisot 数 (後に定義を述べる) と呼ばれる代数的整数の場合に, (4.1) の集合の Borel 階層を決定することに成功した．さらに, Borel 階層の決定に関しても, ある条件を満たす線形回帰数列に対して一般化することに成功した．ここでは Borel 階層の決定に成功した典型的な結果例を述べることにする．

さて, $\alpha$ は 1 よりも大きい代数的整数とする．$\alpha$ が Pisot 数であるとは, 以下が成立することである: $\alpha$ の ($\alpha$ 自身を除く) 共役 $\alpha_2, \ldots, \alpha_d$ の絶対値はすべて 1 より小さい．ここで, 2 以上の正整数も Pisot 数であることに注意をする．また, 黄金比 $(1+\sqrt{5})/2$ も Pisot 数である．まずは Pisot 数に関連のある線形回帰数列に関する結果を述べる．

**定理 4.1.** $\alpha$ を *Pisot* 数とする．このとき, 以下が成立する．
*1)* 以下の集合は $\Pi_3^0$-*complete* である*:*

$$\{\xi \in \mathbb{R} \mid (\xi\alpha^n)_{n\geq 0}\text{は 1 を法として一様分布する．}\}$$

*2)* $k$ を *0* 以上の整数とする．すると，以下の集合は $\Pi^0_3$-*complete* である*:*

$$\{(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_k) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid ((\xi_0 + \xi_1 n + \cdots + \xi_k n^k) \cdot \alpha^n)_{n\geq 0} \text{は \textit{1} を法として一様分布する．}\}$$

例えば, $\alpha = 2$, $k = 1$ のとき, 数列 $(x_n)_{n\geq 0} = ((\xi_0+\xi_1 n)\cdot 2^n)_{n\geq 0}$ は $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0$ $(n \geq 0)$ という関係式を満たす線形回帰数列であることに注意する．また, 次の結果も成立する:

**定理 4.2.** $\alpha$ を代数的整数とし, $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ を $\alpha$ の共役とする．ここで, $1 \leq p \leq d$ が存在して, 以下を満たすとする*:*
$1 \leq j \leq p$ に対して $|\alpha_j| > 1$ であり, $p + 1 \leq j \leq d$ に対して $|\alpha_j| < 1$．特に, 任意の $1 \leq j \leq d$ に対して, $|\alpha_j| \neq 1$ であることに注意する．すると, 以下が成立する．
*1)* 任意の $1 \leq j \leq p$ に対して, $\alpha_j$ は実数とする．すると, 次の集合は $\Pi^0_3$-*complete* である*:*

$$\{(\xi_1, \ldots, \xi_p) \in \mathbb{R}^p \mid (\xi_1\alpha_1^n + \cdots + \xi_p\alpha_p^n)_{n\geq 0} \text{は \textit{1} を法として一様分布する．}\}$$

*2)* より一般の場合, 必要に応じて $\alpha_j$ の添え字を変更することで, $0 \leq q \leq p$ が存在して, 以下が成立するとしても一般性を失わない*:*
$1 \leq j \leq q$ に対して $\alpha_j \in \mathbb{R}$ であり, $q + 1 \leq j \leq p$ に対して $\alpha_j \notin \mathbb{R}$ である．
さらに, $p - q$ は偶数 $2r$ であり, $1 \leq j \leq r$ に対して, $\overline{\alpha_{q+r+j}} = \alpha_{q+j}$ である．ただし, 複素数 $z$ に対して, $\overline{z}$ はその複素共役を表す．
すると, 次の集合は $\Pi^0_3$-*complete* である*:*

$$\{(\xi_1, \ldots, \xi_q, \xi_{q+1}, \ldots, \xi_{q+r}) \in \mathbb{R}^q\times\mathbb{C}^r \mid (\xi_1\alpha_1^n+\cdots+\xi_p\alpha_p^n)_{n\geq 0} \text{は \textit{1} を法として一様分布する．}\}$$

ただし, $1 \leq j \leq r$ に対して, $\overline{\xi_{q+r+j}} = \xi_{q+j}$ と解釈するものとする．したがって, 特に任意の $n \geq 0$ に対して $\xi_1\alpha_1^n + \cdots + \xi_p\alpha_p^n$ は実数であることに注意する．

例えば, 以下の集合はともに $\Pi^0_3$-complete である:

$$\{(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (\xi_1(4+\sqrt{2})^n + \xi_2(4-\sqrt{2})^n)_{n\geq 0} \text{は 1 を法として一様分布する．}\}$$
$$\{\xi \in \mathbb{C} \mid (\xi(4+\sqrt{-2})^n + \overline{\xi}(4-\sqrt{-2})^n)_{n\geq 0} \text{は 1 を法として一様分布する．}\}$$

前者の場合は $p = q = 2$ であり, 後者の場合は $p = 2, q = 0, r = 1$ であることに注意をする．また, 例えば前者の数列 $(x_n)_{n\geq 0} = (\xi_1(4+\sqrt{2})^n+\xi_2(4-\sqrt{2})^n)_{n\geq 0}$ は $x_{n+2}-8x_{n+1}+14x_n = 0$ $(n \geq 0)$ という関係式を満たす線形回帰数列である．

# 謝辞

本研究は JSPS 科研費 (24K06641) の助成を受けたものである．

# 参考文献


[1] D. Airey, S. Jackson, D. Kwietniak and B. Mance, Borel complexity of sets of normal numbers via generic points in subshifts with specification, Trans. Amer. Math. Soc. **373** (2020), 4561–4584.

[2] S. Akiyama, T. Kamae, and H. Kaneko, Exponential Diophantine approximation and symbolic dynamics, arXiv:2204.10510.

[3] V. Becher, P. A. Heiber, and T. A. Slaman, Normal numbers and the Borel hierarchy, Fund. Math. **226** (2014), 63–78.

[4] V. Becher and T. A. Slaman, On the normality of numbers to different bases, J. Lond. Math. Soc. **90** (2014), 472–494.

[5] A. S. Kechris, Classical Descriptive Set Theory. Graduate Texts in Mathematics, vol. 156, Springer-Verlag, New York, 1995.

[6] H. Ki and T. Linton, Normal numbers and subsets of N with given densities, Fund. Math. **144** (1994), 163–179.

[7] D. D. Wall, Normal numbers, Ph. D. thesis (1949), University of California, Berkeley.