A q-analogue of Maesaka–Seki–Watanabe's formula and its application

東北大学・理学研究科数学専攻　鶴田有斗
Yuto Tsuruta*
Mathematical Institute, Tohoku University

1　序文

多重ゼータ値 (MZV) がもつ "級数" と "積分" の二つの表示に着目した Maesaka–Seki–Watanabe ([4]) の研究は, MZV の離散化と呼ばれ MZV の研究における新展開を与えた. MZV の離散化とは一般に, MZV がもつ二つの表示に由来する有限和の間の関係性を記述する議論を指し, それにより得られる等式 (MSW 公式) を用いた MZV の間の関係式の研究が行われている. 今回, MZV の離散化を q-類似に拡張することに成功し, q-MZV における双対関係式の新証明を得ることができたので報告する.

2　MZV の離散化

2.1　Maesaka–Seki–Watanabe の結果

MZV は, インデックスと呼ばれる r 個の正整数の組 $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ $(r > 0)$ が admissible (i.e. $k_r > 1$) のときに

$$\zeta(\boldsymbol{k}) = \lim_{N\to\infty} \zeta_{<N}(\boldsymbol{k}) = \lim_{N\to\infty} \sum_{0<m_1<\cdots<m_r<N} \frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}}$$

で定義される正の実数である. MZV は様々な線形 (代数的) 関係式をみたすことが広く知られているが, 豊富な関係式を持つ背景にある MZV の重要な性質の一つに以下の Theorem 2.1 が挙げられる:

Theorem 2.1 (Drinfel'd, Kontsevich, Le–Murakami, Lappo-Danilevsky etc.)**.** admissible インデックス $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ に対して, $\zeta(\boldsymbol{k})$ は以下の表示をもつ:

$$\int \cdots \int_{0<t_{1,1}<\cdots<t_{1,k_1}<\cdots<t_{r,1}<\cdots<t_{r,k_r}<1} \frac{dt_{1,1}}{1-t_{1,1}} \frac{dt_{1,2}}{t_{1,2}} \cdots \frac{dt_{1,k_1}}{t_{1,k_1}} \cdots \frac{dt_{r,1}}{1-t_{r,1}} \frac{dt_{r,2}}{t_{r,2}} \cdots \frac{dt_{r,k_r}}{t_{r,k_r}}.$$

*tsuruta.yuuto.q7@dc.tohoku.ac.jp

Theorem 2.1 より, MZV は 級数 = 積分 という等式をみたす対象であることがわかる. この等式が有限和のレベルで成立するかは全く非自明であるが, “適切なリーマン和” を構成することによって Maesaka–Seki–Watanabe ([4]) はこの問に以下の回答を与えた:

Theorem 2.2 (MSW formula, [4, Theorem 1.3])**.** 任意のインデックス $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ と $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して, $\zeta^\flat_{<N}(\boldsymbol{k})$ を以下で定義する:

$$\zeta^\flat_{<N}(\boldsymbol{k}) = \sum_{\substack{0<n_{j,1}\le\cdots\le n_{j,k_j}<N \ (1\le j\le r) \\ n_{j,k_j}<n_{(j+1),1} \ (1\le j<r)}} \prod_{j=1}^{r} \frac{1}{(N-n_{j,1})n_{j,2}\cdots n_{j,k_j}}.$$

このとき, 以下の等式が成り立つ:

$$\zeta_{<N}(\boldsymbol{k}) = \zeta^\flat_{<N}(\boldsymbol{k}), \quad {}^\forall N \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

例えば, $\boldsymbol{k} = (1,2,3)$ のとき

$$\zeta^\flat_{<N}(\boldsymbol{k}) = \sum_{0<n_1<n_2\le n_3<n_4\le n_5\le n_6<N} \frac{1}{(N-n_1)(N-n_2)n_3(N-n_4)n_5n_6}$$

のように定義される.

Theorem 2.2 の応用は現在いくつか知られているが, [4] で主に述べられているのは, 以下に示す二つの双対関係式 (Theorem 2.3, Theorem 2.4) の新証明である.

Theorem 2.3 (MZV の双対関係式)**.** 正整数 $a_j, b_j, s \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して以下の等式が成り立つ:

$$\zeta(\underbrace{1,\ldots,1}_{a_1-1}, b_1+1, \ldots, \underbrace{1,\ldots,1}_{a_s-1}, b_s+1) = \zeta(\underbrace{1,\ldots,1}_{b_s-1}, a_s+1, \ldots, \underbrace{1,\ldots,1}_{b_1-1}, a_1+1).$$

Theorem 2.3 の右辺のインデックスは, 左辺のインデックスを $\boldsymbol{k}$ と表記するとき $\boldsymbol{k}^\dagger$ と書いて双対インデックスと呼ぶ. Theorem 2.3 は, 双対インデックスに対して MZV が不変であることを主張する非常に興味深い関係式である. Theorem 2.3 は元来, Theorem 2.1 の変数変換 $t \mapsto 1-t$ による証明が知られていたが, 2019 年には Seki–Yamamoto ([7]) によって級数変形による証明も与えられた. Maesaka–Seki–Watanabe ([4]) による Theorem 2.3 の証明は, $\zeta^\flat_{<N}(\boldsymbol{k}) - \zeta^\flat_{<N}(\boldsymbol{k}^\dagger) \to 0$ $(N \to \infty)$ を示すことによるものだが, この証明がこれまで知られていた証明と異なる点は, 本質的に “有限和の変形” のみで証明を与えているという点である.

次に, 有限多重ゼータ値の双対関係式の Theorem 2.2 の視点からの証明について言及する. ここで, 有限多重ゼータ値 (FMZV) とは, 環

$$\mathcal{A} = \prod_{p:\text{prime}} (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \Big/ \bigoplus_{p:\text{prime}} (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

での上で定義される MZV の類似物であり, 以下で定まる:

$$\zeta_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{k}) = (\zeta_{<p}(\boldsymbol{k}) \mod p)_p \in \mathcal{A}.$$

Theorem 2.4 (FMZV の双対関係式, Hoffman)**.** 任意のインデックス $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ に対して, 以下の等式が成り立つ:

$$\zeta_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{k}) = (-1)^r \sum_{\boldsymbol{k} \preceq \boldsymbol{l}} \zeta_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{l}).$$

ただし, $\preceq$ とは $\boldsymbol{k}$ のプラス "+" をカンマ "," に変えることによって入るインデックスの順序を指す (e.g. $(1,2) = (1,1+1) \preceq (1,1,1)$).

Theorem 2.4 の Theorem 2.2 を用いた証明で重要なのは

$$\frac{1}{p-n} \equiv -\frac{1}{n} \pmod p$$

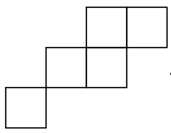
である. $\zeta^{\flat}_{<p}(\boldsymbol{k})$ に対して上の合同式を適切な回数適用することによって, Theorem 2.4 の右辺が現れる, 非常に簡潔な証明である.

Remark 2.5. Seki ([6]) によって, extended double shuffle relation の Theorem 2.2 を用いた新証明も与えられている. これは, 発散するインデックスに対する MZV の漸近的なふるまいを $\zeta^{\flat}_{<N}(\boldsymbol{k})$ を用いて計算することによって証明されるが, Theorem 2.1 を本質的に用いない証明は, これが初めてである.

2.2 Yamamoto の結果

Yamamoto ([9]) は, Theorem 2.2 を Schur 型へ拡張した. この節ではまず Schur MZV を定義することから始める.

正整数の分割 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_a)$ と $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_b)$ $(a \geq b)$ が, $\lambda \supset \mu$ (i.e. $\lambda_j \geq \mu_j$, ${}^{\forall} j$) をみたすとき, skew Young diagram $D = \lambda/\mu$ を $D = \{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 \mid 1 \leq i \leq a,\ \mu_i < j \leq \lambda_i\}$ で定義する. $i > b$ のときには $\mu_i = 0$ としている. また, μ が空分割 $\varnothing$ のときには $D = \lambda/\varnothing = \lambda = \{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 \mid 1 \leq i \leq a,\ 1 \leq j \leq \lambda_i\}$ を Young diagram という. skew Young diagram は Young diagram を含んでいる. 本稿で考える Young diagram は常に "skew" の場合であるので, 以下, Young diagram (resp. tableau) と言ったら常に "skew" も含めて考えることとする. 例えば, $\lambda = (4,3,1)$, $\mu = (2,1)$ のとき D は以下の図形と対応する:

$\lambda/\mu \leftrightarrow$  .

Young diagram の各箱に $\mathbb{C}$ の元をいれた図形を Young tableau という. $\mathrm{YT}(D, \mathbb{C})$ と書いたら, shape D の Young tableaux 全体の集合とする. この議論においては, 常に $\mathrm{YT}(D, \mathbb{Z}_{>0})$ を考える. また

$$\mathrm{SSYT}_{<N}(D) = \left\{ (m_{i,j}) \in \mathrm{YT}(D, \mathbb{Z}_{>0}) \;\middle|\; m_{i,j} \leq m_{i,(j+1)},\ m_{i,j} < m_{(i+1),j},\ {}^{\forall} m_{i,j} < N \right\}$$

を定義する.

Definition 2.6 (Schur MZV, cf. [5, Section 2.2]). $\boldsymbol{k}=(k_{i,j})\in \mathrm{YT}(D,\mathbb{Z}_{>0})$ が $(i,j)\in D$, $(i+1,j),(i,j+1)\notin D$ をみたす (i,j) に対して $k_{i,j}\in\mathbb{Z}_{>1}$ をみたすとき, Schur MZV を以下で定義する:

$$\zeta(\boldsymbol{k})=\lim_{N\to\infty}\zeta_{<N}(\boldsymbol{k})=\lim_{N\to\infty}\sum_{(m_{i,j})\in \mathrm{SSYT}_{<N}(D)}\prod_{(i,j)\in D}\frac{1}{m_{i,j}^{k_{i,j}}}.$$

Hirose–Murahara–Onozuka ([3]) は, MZV の積分表示を“diagonally constant”なインデックスに対する Schur MZV に拡張し, その表示を明示的に与えた. ここで, $\boldsymbol{k}=(k_{i,j})$ が diagonally constant であるとは $k_{i,j}$ が $i-j$ のみに依存することを指す. 以下の Theorem 2.7 の正確な主張に関しては [3] を参照されたい.

Theorem 2.7 (Schur MZV の積分表示, [3, Theorem 1.3]). Schur MZV の収束条件をみたす diagonally constant インデックス $\boldsymbol{k}=(k_{i,j})$ に対して, $\zeta(\boldsymbol{k})$ は明示的な積分表示をもつ.

Theorem 2.7 に基づいて Yamamoto ([9]) は Theorem 2.2 を次のように拡張した. 次の Theorem 2.8 で用いる記号の詳しい説明は次節で行うこととする.

Theorem 2.8 (Schur MSW formula, [9, Theorem 3.6]). 任意の diagonally constant index $\boldsymbol{k}$ に対して Schur 型の $\zeta^{\flat}_{<N}(\boldsymbol{k})$ を

$$\zeta^{\flat}_{<N}(\boldsymbol{k})=\sum_{\substack{\boldsymbol{n}_p^{(l)}\in[1,N-1]^{J_p}\\ \boldsymbol{n}_p^{(l)}\trianglelefteq\boldsymbol{n}_p^{(l+1)}\ (1\le l<k_p)\\ \boldsymbol{n}_p^{(k_p)}\triangleleft\boldsymbol{n}_{p+1}^{(1)}\ (p_0\le p<p_1)}}\frac{1}{\prod(\boldsymbol{N}-\boldsymbol{n}_p^{(1)})\prod(\boldsymbol{n}_p^{(2)})\cdots\prod(\boldsymbol{n}_p^{(k_p)})}$$

で定義する. このとき, 以下の等式が成り立つ:

$$\zeta_{<N}(\boldsymbol{k})=\zeta^{\flat}_{<N}(\boldsymbol{k}),\quad {}^{\forall}N\in\mathbb{Z}_{>0}.$$

Yamamoto ([9]) は Theorem 2.8 の応用として次の二つの定理を導いた:

Theorem 2.9 ([9, Proposition 4.2]). 任意のインデックス $\boldsymbol{k}=(k_1,\ldots,k_r)$ に対して $H_{<N}(\boldsymbol{k})$ を以下で定義する:

$$H_{<N}(\boldsymbol{k})=\sum_{0<m_1\le\cdots\le m_r<N}\frac{(-1)^{m_r-1}}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}}\binom{N-1}{m_r}.$$

$H_{<N}(\boldsymbol{k})$ の $\flat$-類似を

$$H^{\flat}_{<N}(\boldsymbol{k})=\sum_{\substack{0<n_{j,1}\le\cdots\le n_{j,k_j}<N\ (1\le j\le r)\\ n_{(j-1),1}\le n_{j,k_j}\ (1<j\le r)}}\frac{1}{n_{r,1}\cdots n_{r,k_r}}\prod_{j=1}^{r-1}\frac{1}{(N-n_{j,1})n_{j,2}\cdots n_{j,k_j}}$$

で定めるとき, 以下の等式が成り立つ:

$$H_{<N}(\boldsymbol{k})=H^{\flat}_{<N}(\boldsymbol{k}),\quad {}^{\forall}N\in\mathbb{Z}_{>0}.$$

Theorem 2.10 ([9, Proposition 5.3])**.** $z \in \mathbb{C}$ は $\Re(z) > -1$ をみたすものとし, 任意のインデックス $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ に対し関数 $G_{\boldsymbol{k}}(z)$ を

$$G_{\boldsymbol{k}}(z) = \sum_{\substack{0<n_{r,1}\le\cdots\le n_{r,k_r} \\ \vdots \\ <n_{1,1}\le\cdots\le n_{1,k_1}}} \prod_{j=2}^{r} \frac{1}{(n_{j,1}+z)\cdots(n_{j,k_j-1}+z)n_{j,k_j}} \times \frac{1}{(n_{1,1}+z)\cdots(n_{1,k_1-1}+z)} \left(\frac{1}{n_{1,k_1}} - \frac{1}{n_{1,k_1}+z}\right)$$

で定義する. このとき, 以下の等式が成り立つ:

$$G_{\boldsymbol{k}}(N-1) = \zeta^{\flat}_{<N}\left(\boxed{k_1}\boxed{\cdots}\boxed{k_r}\right), \quad {}^{\forall}N \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

Remark 2.11. Theorem 2.9 は Hoffman's duality identity (cf. [9, Theorem 4.1]) と呼ばれる等式のある種の類似を与えるものである. Theorem 2.10 左辺の $G_{\boldsymbol{k}}(z)$ は Kawashima の G-関数と呼称されるものであり, G-関数が持つ性質 $G_{\boldsymbol{k}}(N-1) = \zeta_{<N}\left(\boxed{k_1}\boxed{\cdots}\boxed{k_r}\right)$ と Theorem 2.8 からしたがう.

3 q-MSW formula と応用

本節では, Theorem 2.2, Theorem 2.8 の q-類似である Main Theorem の主張について正確な定義を述べることから始める. その後, Main Theorem に関して現在得られている応用例について紹介し, 最後に Main Theorem に関する open problem を紹介する. Main Theorem の正確な主張を述べるため, まずは記号の導入を行う.

Definition 3.1 (cf. [9, Section 3])**.** Young 図形とその上の diagonally constant index $\boldsymbol{k}$ について,

$$\begin{aligned}
&D_p = \{(i,j) \in D \mid i-j=p\},\\
&J_p = \{j \in \mathbb{Z} \mid (j+p,j) \in D_p\},\\
&p_0 = \min\{p \mid D_p \neq \emptyset\}, \quad p_1 = \max\{p \mid D_p \neq \emptyset\},\\
&k_p = k_{ij} \text{ for } p_0 \le p \le p_1 \text{ and } (i,j) \in D,\\
&[a,b] = \{x \in \mathbb{Z} \mid a \le x \le b\},\ {}^{\forall}a,b \in \mathbb{Z}\\
&\prod(\boldsymbol{m}) = \prod_{i\in J} m_j,\ {}^{\forall}\boldsymbol{m} = (m_j)_{j\in J}.
\end{aligned}$$

を定める.

Definition 3.2 (cf. [9, Section 3])**.** $\mathbb{Z}$ の区間の組 (J, J') が consecutive であるとは, $J = [j_0, j_1]$ のとき J' が

$$J, \quad J \setminus \{j_1\}, \quad J \cup \{j_0 - 1\}, \quad (J \cup \{j_0 - 1\}) \setminus \{j_1\}$$

のいずれかと一致することと定める.

Definition 3.3 (cf. [9, Section 3]). consecutive な組 (J, J') と, それらで添え字付けられた tuple $\boldsymbol{m} = (m_j)_{j\in J}$. $\boldsymbol{n} = (n_j)_{j\in J'}$ に対してそれらの大小 $\lhd$, $\unlhd$ を

$$\boldsymbol{m} \lhd \boldsymbol{n} \overset{\text{def}}{\iff} \begin{cases} m_j < n_j & \text{if } j \in J \text{ and } j \in J', \\ n_{j-1} \le m_j & \text{if } j \in J \text{ and } j-1 \in J', \end{cases}$$

$$\boldsymbol{m} \unlhd \boldsymbol{n} \overset{\text{def}}{\iff} \begin{cases} m_j \le n_j & \text{if } j \in J \text{ and } j \in J', \\ n_{j-1} < m_j & \text{if } j \in J \text{ and } j-1 \in J' \end{cases}$$

で定める.

$n \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ に対して q-整数は $[n] = (1-q^n)/(1-q) \in \mathbb{Q}[q]$ と定義される. MZV の q-類似は様々なモデルが知られているが, この議論で用いるのは Bradley–Zhao 型 (BZ 型) の Schur q-MZV

$$\zeta^{BZ}(\boldsymbol{k}) = \lim_{N\to\infty} \zeta^{BZ}_{<N}(\boldsymbol{k}) = \lim_{N\to\infty} \sum_{(m_{i,j})\in \mathrm{SSYT}_{<N}(D)} \prod_{(i,j)\in D} \frac{q^{(k_{i,j}-1)m_{i,j}}}{[m_{i,j}]^{k_{i,j}}} \in \mathbb{Q}[\![q]\!]$$

である. $\zeta^{BZ}(\boldsymbol{k})$ の収束条件は Definition 2.6 と同様である. また, $q \uparrow 1$ で $[n] \to n$ であり, $\zeta^{BZ}(\boldsymbol{k}) \to \zeta(\boldsymbol{k})$ である.

Main Theorem (Schur q-MSW formula, [8, Theorem 1.5]). 任意の diagonally constant index $\boldsymbol{k}$ に対して

$$\zeta^{q\flat}_{<N}(\boldsymbol{k}) = \sum_{\substack{\boldsymbol{n}_p^{(l)} \in [1,N-1]^{J_p} \\ \boldsymbol{n}_p^{(l)} \unlhd \boldsymbol{n}_p^{(l+1)} (1\le l<k_p) \\ \boldsymbol{n}_p^{(k_p)} \lhd \boldsymbol{n}_{p+1}^{(1)} (p_0 \le p < p_1)}} \prod_{p=p_0}^{p_1} \frac{\prod'(q^{\boldsymbol{n}_p^{(1)}}) \cdots \prod'(q^{\boldsymbol{n}_p^{(k_p)}})}{\prod([\boldsymbol{N} - \boldsymbol{n}_p^{(1)}]) \prod([\boldsymbol{n}_p^{(2)}]) \cdots \prod([\boldsymbol{n}_p^{(k_p)}])} \in \mathbb{Q}[\![q]\!]$$

を定義する. ただし, $\prod'(\boldsymbol{m}) = \prod'((m_j)_{j\in[j_0,j_1]}) = \prod_{j=j_0+1}^{j_1} m_j$ である. このとき以下の等式が成り立つ:

$$\zeta^{BZ}_{<N}(\boldsymbol{k}) = \zeta^{q\flat}_{<N}(\boldsymbol{k}), \quad {}^{\forall} N \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

Remark 3.4. Main Theorem も同様に $q \uparrow 1$ で Theorem 2.8 が復元できる. Main Theorem の証明は Seki–Yamamoto ([7]) の連結和法によるが, 詳細については Tsuruta ([8]) を適宜参照されたい.

Example 3.5 (Main Theorem の具体例). Theorem 2.8 に出てくるさまざまな記号 (Definition 3.1, Definition 3.2, Definition 3.3) は, すべて Theorem 2.7 の条件を適切にリーマン和の言葉に書き換えたものである. 例えば, $\boldsymbol{k} = \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 1 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline\end{array}$ のとき Schur MZV

$$\zeta\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 1 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline\end{array}\right) = \sum_{\substack{0<m_{11}\le m_{12} \\ \wedge \quad\ \wedge \\ m_{21}\le m_{22}}} \frac{1}{m_{11}^2 m_{12}^1 m_{21}^1 m_{22}^2}$$

は Theorem 2.7 によって

$$\int\cdots\int_{\substack{t_1<t_2<t_3\\ \vee\quad\vee\quad\vee\\ t_4<t_5<t_6\\ 0<{}^\forall t_j<1}} \frac{dt_1}{1-t_1}\frac{dt_2}{1-t_2}\frac{dt_3}{t_3}\frac{dt_4}{1-t_4}\frac{dt_5}{t_5}\frac{dt_6}{1-t_6} \tag{1}$$

という表示を持つ. (1) の変数の大小は, Definition 3.1, Definition 3.2, Definition 3.3 によって適切に書き換えられ, このときリーマン和 $\zeta^{\flat}_{<N}(\boldsymbol{k})$ は

$$\zeta^{\flat}_{<N}(\boldsymbol{k}) = \sum_{\substack{n_1<n_2<n_3\\ \vee\quad\vee\quad\vee|\\ n_4<n_5<n_6\\ 0<{}^\forall n_j<N}} \frac{1}{(N-n_1)(N-n_2)n_3(N-n_4)n_5(N-n_6)}$$

となる. Main Theorem においても和の取り方などはすべて Theorem 2.8 と同様であるが, $\mathbb{Q}[\![q]\!]$ の元として収束するように $\zeta^{q\flat}_{<N}(\boldsymbol{k})$ の分子の q べきを適切に定めている. それが $\prod'(q^{\boldsymbol{n}_p^{(j)}})$ に現れている. 例えば上の例だと

$$\zeta^{q\flat}_{<N}(\boldsymbol{k}) = \sum_{\substack{n_1<n_2<n_3\\ \vee\quad\vee\quad\vee|\\ n_4<n_5<n_6\\ 0<{}^\forall n_j<N}} \frac{q^{n_3+n_5}}{[N-n_1][N-n_2][n_3][N-n_4][n_5][N-n_6]}$$

となる.

Main Theorem を用いることによって, 次の関係式 (Theorem 3.6) の新証明を与えることができる. ただし, ここで用いるのは $\boldsymbol{k} = \begin{array}{|c|}\hline k_1\\ \hline \vdots\\ \hline k_r\\ \hline\end{array}$ の場合の Main Theorem

$$\sum_{0<m_1<\dots<m_r<N} \frac{q^{(k_1-1)m_1+\cdots(k_r-1)m_r}}{[m_1]^{k_1}\cdots[m_r]^{k_r}} = \sum_{\substack{0<n_{j,1}\le\cdots\le n_{j,k_j}<N(1\le j\le r)\\ n_{j,k_j}<n_{(j+1),1}(1\le j<r)}} \prod_{j=1}^{r} \frac{q^{n_{j,2}+\cdots+n_{j,k_j}}}{[N-n_{j,1}][n_{j,2}]\cdots[n_{j,k_j}]}$$

である.

Theorem 3.6 (K. Hessami Pilehrood–T. Hessami Pilehrood–Tauraso, [2, Theorem 3.1])**.** 正整数 N に対して, η_N を 1 の原始 N 乗根とする. このとき, 任意のインデックス $\boldsymbol{k} = (k_1,\dots,k_r)$ に対して以下の等式が成り立つ:

$$\zeta^{BZ}_{<N}(\boldsymbol{k};\eta_N) = (-1)^r \sum_{\substack{0<n_{j,1}\le\cdots\le n_{j,k_j}<N(1\le j\le r)\\ n_{j,k_j}<n_{(j+1),1}(1\le j<r)}} \prod_{j=1}^{r} \frac{\eta_N^{n_{j,1}+\cdots+n_{j,k_j}}}{[n_{j,1}]\cdots[n_{j,k_j}]}.$$

ここで, $\zeta^{BZ}_{<N}(\boldsymbol{k};\eta_N)$ は $q=\eta_N$ の場合の $\zeta^{BZ}_{<N}(\boldsymbol{k})$ を表すものとする. したがって, 右辺の q-整数の定義も η_N で考えるものとする.

Theorem 3.6 は, 右辺が Schlesinger–Zudilin 型 (SZ 型) の q-MZV

$$\zeta^{SZ}_{<N}(\boldsymbol{k}) = \sum_{0<m_1<\dots<m_r<N} \frac{q^{k_1m_1+\cdots k_rm_r}}{[m_1]^{k_1}\cdots[m_r]^{k_r}}$$

を用いて

$$(-1)^r \sum_{\boldsymbol{k}\preceq\boldsymbol{l}} \zeta^{SZ}_{<N}(\boldsymbol{l};\eta_{_N})$$

と表せることより $q = \eta_{_N}$ の場合の BZ 型から SZ 型への書き換えを明示的に表すものとみることができる. また, [2] で与えられた証明とは異なり, Main Theorem を用いると $\zeta^{q\flat}_{<N}(\boldsymbol{k})$ に等式

$$\frac{1}{[N-n]} = -\frac{\eta_{_N}^n}{[n]}$$

を適切な回数適用して整理することで Theorem 3.6 を直ちに導くことができる. さらに, Theorem 3.6 は Bachmann–Takeyama–Tasaka ([1]) の議論を踏まえると Theorem 2.4 に復元されるため, Theorem 3.6 は Theorem 2.4 の q-類似とみなすことができる.

Remark 3.7 (Main Theorem はなぜ BZ 型なのか)**.** Main Theorem は, Yamamoto ([9]) の手法を自然に q-類似に拡張することによって証明されるが, その過程で定義される連結和と連結子の性質から $\zeta^{BZ}_{<N}(\boldsymbol{k})$ の分子と $\zeta^{q\flat}_{<N}(\boldsymbol{k})$ の分子が輸送関係式によって自然に移り変わる. したがって, 例えば別の q-類似のモデル (e.g. Schlesinger–Zudilin 型)

$$\zeta^{SZ}(\boldsymbol{k}) = \lim_{N\to\infty} \sum_{(m_{i,j})\in\mathrm{SSYT}_{<N}(D)} \prod_{(i,j)\in D} \frac{q^{k_{i,j}m_{i,j}}}{[m_{i,j}]^{k_{i,j}}} \in \mathbb{Q}[\![q]\!]$$

(ただし $\zeta^{BZ}_{<N}(\boldsymbol{k})$ と収束条件は異なる) は Tsuruta ([8]) の方法で Main Theorem のような等式を作ることはできない. よって, 本質的に Main Theorem が BZ 型である重要性はさほど高く無いと言える. 以上から, より一般の q-series に対して Main Theorem のような等式を作れるかという問いは非常に興味深い open problem であると言える.

謝辞

2024 年度 RIMS 共同研究 (公開型)「解析的整数論とその周辺」において講演の機会をくださいました中筋麻貴先生 (上智大学/東北大学), 谷口隆先生 (神戸大学) に深く感謝を申し上げます. また, 本研究集会に参加するにあたり, 旅費等のご支援をいただきました東北大学人工知能エレクトロニクス卓越大学院プログラム様にも, そのご厚意に深く御礼申し上げます.

参考文献

[1] H. Bachmann, Y. Takeyama, K. Tasaka, *Cyclotomic analogues of finite multiple zeta values*, Compos. Math., **154** (2018), no. 12, 2701–2721.

[2] K. Hessami Pilehrood, T. Hessami Pilehrood, and R. Tauraso, *On 3-2-1 values of finite multiple harmonic q-series at roots of unity*, J. Math. Soc. Japan, **74** (2022), no. 3, 753–758.

[3] M. Hirose, H. Murahara, and T. Onozuka, *Integral expressions for Schur multiple zeta values*, Indag. Math. **35** (2024), 1197–1211.

[4] T. Maesaka, S. Seki, T. Watanabe, *Deriving two dualities simultaneously from a family of identities for multiple harmonic sums*, preprint, arXiv:2402.05730.

[5] M. Nakasuji, O. Phuksuwan, and Y. Yamasaki, *On Schur multiple zeta functions: A combinatoric generalization of multiple zeta functions*, Ser. Adv. Math. Appl. Sci. **333** (2018), 570–619.

[6] S. Seki, *A proof of the extended double shuffle relation without using integrals*, Kyushu J. Math. **79** (2025), 191–198.

[7] S. Seki and S. Yamamoto, *A new proof of the duality of multiple zeta values and its generalizations*, Int. J. Number Theory, **15** (2019), no. 06, 1261–1265.

[8] Y. Tsuruta, *Maesaka-Seki-Watanabe's formula for multiple harmonic q-sums*, J. Number Theory. (to appear), (2025), arXiv:2406.07930.

[9] S. Yamamoto, *Some remarks on Maesaka-Seki-Watanabe's formula for the multiple harmonic sums*, preprint, arXiv:2403.03498.