Hurwitz-Lerch 型中央二項級数

東北大学理学研究科　角野裕太 *
Yuta Kadono
Mathematical Institute, Tohoku University

Abstract

中央二項級数とは、summand に中央二項係数を備えた一種の Dirichlet 級数であり、特に 1978 年の Apéry による $\zeta(2)$ と $\zeta(3)$ の無理数性の証明に用いられたことで有名である。また、その整数点での特殊値は、多重ゼータ値や log-sine 積分など種々の対象との関連が研究されている。中でも Lehmer は、中央二項級数の polylog 版を導入し、Arcsine を用いた表示を与えた。また、その表示を用いて非正整数点での特殊値を詳細に研究した。この特殊値から得られる多項式には、Bényi と Matsusaka によって二変数 Eulerian 多項式や poly-Bernoulli 数を用いた解釈が与えられた。今回、この中央二項級数に実パラメータを付け加えた『Hurwitz 型中央二項級数』を導入した。また、これの polylog 版（Hurwitz-Lerch 版中央二項級数）と超幾何級数表示を考えることにより、Lehmer の結果の一般化を得た。この結果を用いると、非正整数点における Hurwitz 型中央二項級数の振る舞いを調べることができる。特にその特殊値は、中央二項級数と同様に多項式を用いて表すことができ、その新たな多項式に関して Bényi と Matsusaka の結果の類似の結果を得た。本研究は九州大学大学院マス・フォア・イノベーション連係学府の池田香凜氏との共同研究内容に基づく。

1　中央二項級数と先行研究

Lehmer [1] では、（よく）知られた定数に収束し、第 m 項が明示的かつ簡素な m の閉じた表示を持つ級数（“**Interesting series**” と呼んでいる）について研究をしている。その中でも特に、**中央二項級数**：

$$\zeta_{CB}(s) \coloneqq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s \binom{2m}{m}}, \quad (s \in \mathbb{C})$$

の整数点 $s = k \in \mathbb{Z}$ における特殊値に焦点を当てている。ただし、中央二項級数のように Riemann のゼータ関数：

$$\zeta(s) \coloneqq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}$$

* *E-mail address*: `hebigami.math@gmail.com`

の summand の分母に**中央二項係数**

$$\binom{2m}{m} := \frac{(2m)!}{m!m!} = \frac{\Gamma(2m+1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+1)}$$

を付け加えた級数自体は Lehmer 以前より考えられている。例えば、Apéry による $\zeta(3)$ の無理数性の証明には

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m^3\binom{2m}{m}}$$

が用いられた。また、Euler は Basel 問題に関する論文 ([2]) 中で次の等式を用いている：

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2z)^{2m}}{m\binom{2m}{m}} = \frac{2z}{\sqrt{1-z^2}} \arcsin(z), \quad (|z| < 1). \tag{1}$$

定義から明らかなように、式 (1) の左辺の級数は $z = 1/2$ の時は、中央二項級数 $\zeta_{CB}(1)$ である。一方、$z = 1/2$ における右辺の値は簡単に求めることはでき、 $\pi\sqrt{3}/9$ となる。つまり、以下の等式が成り立つ：

$$\zeta_{CB}(1) = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}.$$

また、式 (1) の辺々に z に関する Euler 作用素を作用させた後に $z = 1/2$ とすることにより以下の等式が従う：

$$\zeta_{CB}(0) = \frac{2\pi\sqrt{3}+9}{27}.$$

このように、式 (1) の辺々に z に関する Euler 作用素を複数回作用させることにより、 1 以下の整数での中央二項級数の特殊値に関する以下の等式が従う：

定理 1 (Lehmer [1], 1985)**.** 任意の正の整数 $k \geq 0$ に対して、次式が成り立つ。

$$\zeta_{CB}(1-k) = \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{2}\,p_{k-1}\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\,q_{k-1}\left(\frac{1}{4}\right)\right).$$

ただし、定理に現れる $p_n(x)$, $q_n(x)$ $(n \in \mathbb{Z}_{\geq -1})$ は、以下の漸化式を用いてそれぞれ定義される整数係数の多項式である：

$$p_{-1}(x) = 0, \quad p_{n+1}(x) = 2(nx+1)p_n(x) + 2x(1-x)p'_n(x) + q_n(x),$$
$$q_{-1}(x) = 1, \quad q_{n+1}(x) = 2(n+1)x\,q_n(x) + 2x(1-x)q'_n(x) + q_n(x).$$

最初のいくつかの例を表に挙げる：

n	$p_n(x)$	$q_n(x)$
-1	0	1
0	1	1
1	3	$2x+1$
2	$8x+7$	$4x^2+10x+1$
3	$20x^2+70x+15$	$8x^3+60x^2+36x+1$

Table 1: First small examples of $p_n(x)$ and $q_n(x)$.

この多項式 $p_n(x)$, $q_n(x)$ に関して以下の結果が知られている：

定理 2 (Bényi-Matsusaka [3], 2023)**.** 任意の非負整数 $n \geq 0$ に対して、

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n p_n\left(\frac{1}{4}\right) = \sum_{k=0}^{n} B_{n-k}^{(-k)}.$$

が成り立つ。ただし、$B_n^{(k)}$ $(k \in \mathbb{Z})$ は n 番目の **poly-Bernoulli 数**である：

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(k)} \frac{t^n}{n!} := \frac{\mathrm{Li}_k(1-e^{-t})}{1-e^{-t}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1-e^{-t})^{m-1}}{m^k}.$$

定理 3 (Bényi-Matsusaka [3], 2023)**.** 任意の非負整数 $n \geq 0$ に対して、

$$\begin{aligned} p_n(x) &= 2^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} E_{n-k}\left(x, \frac{1}{2}\right) E_k\left(x, \frac{1}{2}\right), \\ q_{n-1}(x) &= 2^n E_n\left(x, \frac{1}{2}\right), \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで $E_n(x, y)$ は**二変数の Eulerian 多項式**であり、次のような母関数を用いて定義される：

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n(x, y) \frac{t^n}{n!} = \left(\frac{1-x}{e^{t(x-1)} - x}\right)^y.$$

Bényi と Matsusaka によるこれらの結果は、「中央二項級数」と組合せ論的な対象である「poly-Bernoulli 数」や「二変数の Eulerian 多項式」との関連を謳った結果であることに留意する。

2 Hurwitz 型への拡張

我々は、実パラメータ $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$ を付け加えた **Hurwitz 型中央二項級数**：

$$\zeta_{HCB}(s, a) := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m+a)^s \binom{2(m+a)}{m+a}}, \quad (s \in \mathbb{C})$$

を新たに導入し、その整数点での振る舞いを調べた。ただし、$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して、

$$\binom{\alpha}{\beta} := \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-\beta+1)\Gamma(\beta+1)}$$

とおいた。ここで、定義から $\zeta_{HCB}(s, 1/2) = \zeta_{CB}(s)$ であることに注意する。Lehmer が用いた手法を拡張するために、Hurwitz 型中央二項級数の 1 変関数化である **Hurwitz-Lerch 型中央二項級数**も導入する：

$$\Phi_{HCB}(s, a, z) := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2z)^{2(m+a)}}{(m+a)^s \binom{2(m+a)}{m+a}}, \quad (s \in \mathbb{C}, |z| < 1).$$

中央二項級数の時と同様に、次の微分関係式が成り立つ：

$$\frac{1}{2}z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\Phi_{HCB}(k,a,z)=\Phi_{HCB}(k-1,a,z) \tag{2}$$

また、中央二項級数での式 (1) に対応する等式は次の定理で与える：

定理 4 (Ikeda-Kadono [4], 2024+)**.** 任意の $|z|<1$ と $a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}_{\leq 0}$ に対して、以下の等式が成り立つ：

$$\Phi_{HCB}(1,a,z)=\frac{4^a}{a\binom{2a}{a}}\frac{z^{2a}}{\sqrt{1-z^2}}\,{}_2F_1\left(\left.\begin{matrix}\frac{1}{2},a-\frac{1}{2}\\ a+\frac{1}{2}\end{matrix}\,\right|\,z^2\right).$$

定理 4 は式 (1) の一般化であることがわかる。実際、以下の等式が成り立つ：

$$z^{2a-1}\ {}_2F_1\left(\left.\begin{matrix}\frac{1}{2},a-\frac{1}{2}\\ a+\frac{1}{2}\end{matrix}\,\right|\,z^2\right)\Bigg|_{a=1}=z\,{}_2F_1\left(\left.\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\ \frac{3}{2}\end{matrix}\,\right|\,z^2\right)=\arcsin(z).$$

式 (2) と定理 4 を用いると、以下の結果を得る。

定理 5 (Ikeda-Kadono [4], 2024+)**.** 任意の $k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ と $|z|<1,\ a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}_{\leq 0}$ に対して次が成り立つ：

$$\begin{aligned}\Phi_{HCB}(1-k,a,z)&=\frac{4^a z}{2^k a\binom{2a}{a}(1-z^2)^{k+\frac{1}{2}}}\\&\quad\times\left((2a-1)z^{2a-1}\sqrt{1-z^2}\ p_{k-1}(a,z^2)+z^{2a-1}\,{}_2F_1\left(\left.\begin{matrix}\frac{1}{2},a-\frac{1}{2}\\ a+\frac{1}{2}\end{matrix}\,\right|\,z^2\right)q_{k-1}(z^2)\right).\end{aligned}$$

ただし、 $p_n(a,x)$ $(n\in\mathbb{Z}_{\geq -1})$ は、以下の漸化式を用いて定義される整数係数の二変数多項式である：

$$p_{-1}(a,x)=0,\quad p_{n+1}(a,x)=2((n+1-a)x+a)p_n(x)+2x(1-x)p_n'(x)+q_n(x).$$

中央二項級数に現れた多項式 $p_n(x)$ と $q_n(x)$ と共に最初のいくつかの例を表に挙げる：

n	$p_n(x)$	$p_n(a,x)$	$q_n(x)$
-1	0	0	1
0	1	1	1
1	3	$2(1-a)x+2a+1$	$2x+1$
2	$8x+7$	$4(1-a)^2x^2-2(4a^2-3a-5)x$ $+4a^2+2a+1$	$4x^2+10x+1$

Table 2: First small examples of $p_n(x)$, $p_n(a,x)$ and $q_n(x)$.

多項式 $p_n(a,x)$ の定義漸化式から以下の関係式が成り立つことがわかる：

$$p_n(0,x)=q_n(x)\qquad\qquad (n\geq 0),$$

$$p_n(1,x) = p(x) \qquad\qquad (n \geq 1).$$

これは、$p_n(a,x)$ が $p_n(x)$ と $q_n(x)$ の補間多項式になっていることを示している。この事実は、中央二項級数に実パラメータを付け加えた段階では予想していなかった、全く新しい現象である。さらに、$p_n(a,x)$ の母関数を考えることにより、次の結果を得る：

定理 6 (Ikeda-Kadono [4], 2025+)**.** 任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と $a \in \mathbb{R} \setminus \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\leq 1}$ に対して、以下が従う：

$$p_n(a,x) = 2^n \sum_{j=0}^{n} \sum_{l=0}^{j} \binom{n+1}{j+1} \binom{j}{l} (a-1)^{j-l} (1-x)^{j-l} E_{n-j}\left(x, \frac{1}{2}\right) E_l\left(x, \frac{1}{2}\right).$$

定理 5 で示したように、Huwrwitz 型の中央二項級数の特殊値もまた、整数係数の多項式や arcsin 関数（の一般化）などを用いた表示を持つことがわかる。さらに、定理 6 の結果にある通り、特殊値に現れる多項式は再び二変数 Eulerian 多項式表示が与えられた。

謝辞

2024 年度 RIMS 共同研究（公開型）「解析的整数論とその周辺」での講演機会をくださいました研究代表者の中筋 麻貴 先生 (上智大学／東北大学)、研究副代表者の谷口 隆 先生（神戸大学）に心より感謝申し上げます。また、講演後に Euler の仕事に関するコメントをいただいた渋川 元樹 先生（神戸大学）に感謝申し上げます。

References

[1] D. H. Lehmer, *Interesting Series Involving the Central Binomial Coefficient*, The American Mathematical Monthly, 92 (1985), pp. 449–457

[2] L. Euler, *Démonstration de la somme de cette suite 1+ 1/4+ 1/9+ 1/16+...*, Journal litteraire d'Allemagne, de Suisse et du Nord, (1743), pp. 115–127

[3] B. Bényi and T. Matsusaka,*Remarkable relations between the central binomial series, Eulerian polynomials, and poly-Bernoulli numbers, leading to Stephan's observation*, Kyushu J. Math., 77 (2023), pp.149–158

[4] K. Ikeda and Y. Kadono, *Hurwitz-Lerch type central binomial series*, arXiv e-print, arXiv:2409.16026, (2024)