A multivariate analogue of the Zwegers' μ-function

神戸大学 理学研究科　土見 怜史 *
Satoshi Tsuchimi†
Kobe University

本稿は 2024 年度 RIMS 共同研究「解析的整数論とその周辺」にて行われた講演「A multivariate analogue of the Zwegers' μ-function」の報告記事である. *1

1 Introduction

本稿では $\tau \in \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Im}(z) > 0\}, q := e^{2\pi i\tau}, \zeta_N := e^{\frac{2\pi i}{N}}, \delta_{jk} := \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases}$ とする. また q-factorial を

$$(a;q)_\infty := \prod_{k=0}^{\infty}(1 - aq^k), \quad (a;q)_\nu := \frac{(a;q)_\infty}{(aq^\nu;q)_\infty} \quad (\nu \in \mathbb{C})$$

とし, Jacobi のテータ函数を

$$\theta_q(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} x^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} = (q;q)_\infty(-x;q)_\infty(-q/x;q)_\infty$$

$$\vartheta(u) = \vartheta(u;\tau) := \sum_{n\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} e^{2\pi i n\left(u+\frac{1}{2}\right)} q^{\frac{n^2}{2}} = ie^{-\pi i u} q^{\frac{1}{8}} \prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k)(1-e^{2\pi i u}q^{k-1})(1-e^{-2\pi i u}q^k)$$

とする.

Zwegers はモックテータ函数の研究を背景に, 次のような二変数函数 $\mu(u,v)$ を導入した.

Definition 1.1 (Zwegers, 2002, [Z1]). *$u, v \notin \Lambda_\tau := \{m\tau + n;\ m, n \in \mathbb{Z}\}$, に対して, Zwegers の μ 函数を*

$$\mu(u,v) = \mu(u,v;\tau) := \frac{e^{\pi i u}}{\vartheta(v)} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{e^{2\pi i n v} q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{1 - e^{2\pi i u} q^n}$$

で定める.

μ 函数は次の関係式を持つ [Z1]:

(a) $\mu(u+1,v) = -\mu(u,v)$,

(b) $\mu(u+\tau,v) + e^{2\pi i(u-v)} q^{\frac{1}{2}} \mu(u,v) = -ie^{\pi i(u-v)} q^{\frac{3}{8}}$,

(c) $\mu(u+z,v+z) - \mu(u,v) = \dfrac{i\eta(\tau)^3 \vartheta(u+v+z)\vartheta(z)}{\vartheta(u+z)\vartheta(v+z)\vartheta(u)\vartheta(v)}$,

(d) $\mu(-u,-v) = \mu(u+\tau,v+\tau) = \mu(v,u) = \mu(u,v)$,

---

* tsuchimi@math.kobe-u.ac.jp
† 本研究は科研費 (課題番号: 21K13808) の助成を受けたものである.
*1 Joint work with Genki Shibukawa

ただし $\eta(\tau) := q^{\frac{1}{24}}(q;q)_\infty$ とする．また τ に関して以下のようなモジュラー変換則を満たす:

$$
\begin{aligned}
&\text{(A) } e^{\frac{\pi i}{4}}\mu(u,v;\tau+1) = \mu(u,v;\tau),\\
&\text{(B) } \frac{e^{\frac{\pi i(u-v)^2}{\tau}}}{\sqrt{-i\tau}}\mu\left(\frac{u}{\tau},\frac{v}{\tau};-\frac{1}{\tau}\right) + \mu(u,v;\tau) = \frac{1}{2i}h(u-v;\tau),\\
&\text{(C) } e^{\frac{\pi i}{4}}\widetilde{\mu}(u,v;\tau+1) = \widetilde{\mu}(u,v;\tau),\\
&\text{(D) } \frac{e^{\frac{\pi i(u-v)^2}{\tau}}}{\sqrt{-i\tau}}\widetilde{\mu}\left(\frac{u}{\tau},\frac{v}{\tau};-\frac{1}{\tau}\right) + \widetilde{\mu}(u,v;\tau) = 0.
\end{aligned}
$$

ただし $\mathrm{Im}(\tau) = t, \mathrm{Im}(z) = y$ に対して

$$
\begin{aligned}
h(z;\tau) &:= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pi i\tau x^2 - 2\pi zx}}{\cosh(\pi x)}dx, \qquad E(z) := 2\int_0^z e^{-\pi x^2}dx,\\
R(z;\tau) &:= \sum_{n\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} \left\{\mathrm{sgn}(n) - E\left(\left(n+\frac{y}{t}\right)\sqrt{2t}\right)\right\}(-1)^{n-\frac{1}{2}}e^{-2\pi inz}q^{-\frac{n^2}{2}},\\
\widetilde{\mu}(u,v;\tau) &:= \mu(u,v;\tau) + \frac{i}{2}R(u-v;\tau),
\end{aligned}
$$

とする．

Zwegers のこれらの研究を嚆矢として, K. Bringmann, K. Ono, D. Zagier らにより, モックテータ函数, より一般にモックモジュラー形式の研究が大きく進展した．しかしながら, μ 函数そのものに関しての (特に特殊函数論的観点からの) 研究はほとんどされてこなかった．そんな中, 近年 Garoufaridis-Wheeler [GW] と Shibukawa-Tsuchimi [ST1] らにより, μ 函数は q 差分方程式 (q-Hermite-Weber 方程式 (3) の特殊化)

$$
[T_x^2 - (1-xq)T_x - x]f(x) = [T_x - 1][T_x + x]f(x) = 0, \quad T_x f(x) := f(xq) \tag{1}
$$

の $x = 0$ 周りでの形式解

$$
g_0(x) := \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n q^{-\frac{n(n+1)}{2}}
$$

の q-Borel 総和法により得られることが発見された．

q-Borel 総和法 [RSZ] は q 差分方程式の発散級数解から収束級数解を構成する手法の一つである．すなわち, 形式的冪級数 $g(x) = \sum A_n x^n$ に対して, q-Borel 変換 $\mathcal{B}_q$ と q-Laplace 変換 $\mathcal{L}_q$ をそれぞれ

$$
\mathcal{B}_q(g)(\xi) := \sum A_n \xi^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}, \quad \mathcal{L}_q(g)(x,\lambda) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{g(\lambda q^n)}{\theta_q(\lambda q^n/x)}, \tag{2}
$$

により定める．q-Laplace 変換は以下の Jackson 積分表示を持つ:

$$
\mathcal{L}_q(g)(x,\lambda) = \frac{1}{1-q}\int_0^{\lambda\infty} \frac{g(t)}{\theta_q(t/x)}\,d_qt, \quad \int_0^{\lambda\infty} f(t)\,d_qt := (1-q)\sum_{n\in\mathbb{Z}}^{\infty} f(\lambda q^n).
$$

ここで, q-Laplace 変換の extra パラメーター λ は Jackson 積分の “積分路” の偏角パラメーターとして捉えられる．

簡単な計算より $n \in \mathbb{Z}$ に対して $\varphi_n(x) := x^n$ とすると,

$$
\mathcal{L}_q \circ \mathcal{B}_q(\varphi_n) = x^n
$$

であり, extra パラメーター λ が右辺に現れないことに注意する．よって q 差分方程式の収束級数解の q-Borel 変換と q-Laplace 変換の合成 $\mathcal{L}_q \circ \mathcal{B}_q$ の像は, 元の収束級数解であることがわかる．

q 差分方程式 (作用素) $D \in \mathbb{C}[x][T_x]$ の発散級数解 $g(x)$ に関しても, q 差分作用素の演算子法

$$\mathcal{B}_q(x^m T_x^n[g])(\xi) = q^{\frac{m(m-1)}{2}} \xi^m T_\xi^{m+n} \mathcal{B}_q([g])(\xi),$$
$$\mathcal{L}_q(\xi^m T_\xi^n[g])(x,\lambda) = q^{-\frac{m(m-1)}{2}} x^m T_x^{n-m} \mathcal{L}_q([g])(x,\lambda),$$
$$\mathcal{L}_q \circ \mathcal{B}_q(x^m T_x^n[g])(x,\lambda) = x^m T_x^n[\mathcal{L}_q \circ \mathcal{B}_q(g)(x,\lambda)],$$

より, $\mathcal{L}_q \circ \mathcal{B}_q(g)$ が同じ q 差分方程式 $\mathcal{L}_q \circ \mathcal{B}_q(D) = D$ の解になることがわかる. よって, $\mathcal{L}_q \circ \mathcal{B}_q(g)$ が収束していれば, これが元の q 差分方程式の収束解を与える. 特にこの収束解 $\mathcal{L}_q \circ \mathcal{B}_q(g)(x,\lambda)$ は, 元の q 差分方程式にはない q-Laplace 変換 $\mathcal{L}_q$ の extra パラメーター λ によって変形された解である.

以上が q-Borel 総和法のあらましであるが, q 差分方程式 (1) を例にすると, その発散級数解 $g_0(x)$ の q-Borel 変換の像は

$$\mathcal{B}_q(g_0)(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{\xi}{q}\right)^n = \frac{1}{1+\xi/q},$$

次いで $\mathcal{B}_q(g_0)$ の q-Laplace 変換の像を計算すると,

$$\mathcal{L}_q \circ \mathcal{B}_q(g_0) = \mathcal{L}_q\left(\frac{1}{1+\xi/q}\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+\lambda q^{n-1}} \frac{1}{\theta_q(\lambda q^n/x)} = \frac{1}{\theta_q(x/\lambda)} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(\lambda/x)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{1+\lambda q^n}.$$

[GW] と [ST1] の発見は,

「この $\mathcal{L}_q \circ \mathcal{B}_q(g_0)$ が本質的に Zwegers の μ 函数に他ならない」

すなわち

$$\mu(u,v;\tau) = -ie^{\pi i(u-v)} q^{-\frac{1}{8}} \mathcal{L}_q \circ \mathcal{B}_q(g_0)(e^{2\pi i(u-v)}, -e^{2\pi i u})$$

ということである.

さらに [ST1] では, この Zwegers μ 函数に関する q-Borel 総和法による描像を, q 差分方程式 (1) の 1 パラメーター変形である q-Hermite-Weber 方程式

$$[T_x^2 - (1-xq)\sqrt{a}T_x - xq]f(x) = 0 \tag{3}$$

とその発散級数解

$$g_0(a,x) := x^{\frac{\alpha}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a;q)_n}{(q;q)_n} q^{-\frac{n(n+1)}{2}} (-x)^n$$

にまで拡張し, Zwegers μ 函数の 1 パラメーター変形である一般化 μ 函数を導入した

$$\mu(u,v;\alpha;\tau) := \frac{e^{\pi i\alpha(u-v)}}{\vartheta(v)} \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n e^{2\pi i(n+\frac{1}{2})v} q^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{(e^{2\pi i u}q^{n+1};q)_\infty}{(e^{2\pi i u}q^{n-\alpha+1};q)_\infty}, \quad (u-\alpha\tau, v \notin \Lambda_\tau).$$

特に $\mu(u,v;0;\tau) = -iq^{-\frac{1}{8}}$, $\mu(u,v;1;\tau) = \mu(u,v;\tau)$ である.

この q-Borel 総和法による μ 函数の描像には, いくつかのアドバンテージがある. まず, 上述した公式 (a)–(d) が, q-差分方程式 (1), (3) の解析的観点 (q-超幾何とその変換公式及び接続公式等) から自然に導出, 解釈ができる点である. これにより, 特に Zwegers μ 函数の多くの諸公式が一般化 μ 函数に拡張される. また q-Laplace 変換の extra パラメーター λ を用いることで, 元は一変数であった q 差分方程式 (1), (3) の発散級数解 g_0 が自然に二変数化され, μ 函数が得られる.

他方, Zwegers はスーパーアフィン Lie 環の指標公式と関連して, 以下のような μ 函数の多変数類似 (以下「多変数 μ 函数」と呼称) を導入した.

Definition 1.2 (Zwegers, 2019, [Z2]). $u_0, \ldots, u_N \notin \Lambda_\tau, N \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して

$$\mu_N = \mu_N(u_0, \ldots, u_N; \tau) := \sum_{n \in \mathbb{Z}^N} \frac{e^{\pi i u_0}}{1 - e^{2\pi i u_0} q^{|n|}} \prod_{j=1}^{N} \frac{(-1)^{n_j} e^{-2\pi i n_j u_j} q^{\frac{n_j(n_j+1)}{2}}}{\vartheta(u_j; \tau)}.$$

ただし $n := (n_1, \ldots, n_N), |n| := n_1 + \cdots + n_N$ とする.

Zwegers は多変数 μ 函数のモジュラー性については示しているが, オリジナルの μ 函数の公式 (a)–(d) に相当する性質に関しては言及していない.

本稿では, q-Borel 総和法の反復合成を用いて複数の extra パラメーターを導入することにより, 以下のような一般化 μ 函数の多変数類似 (以下「多変数一般化 μ 函数」と呼称する) を構成する.

Definition 1.3. $u_0, \ldots, u_N \notin \Lambda_\tau, u := u_0 + \cdots + u_N$ に対して

$$\begin{aligned} &\hat{\mu}_N = \hat{\mu}_N(u_0, \ldots, u_N; \alpha; \tau) \\ &:= e^{\pi i(\alpha-1)u} \sum_{n \in \mathbb{Z}^N} \frac{(e^{2\pi i(u_0+\alpha\tau)} q^{|n|})_\infty}{e^{-\pi i u_0}(e^{2\pi i u_0} q^{|n|})_\infty} \prod_{j=1}^{N} \frac{(-1)^{n_j} e^{-2\pi i n_j u_j} q^{\frac{n_j(n_j+1)}{2}}}{\vartheta(u_j)}. \end{aligned}$$

この多変数一般化 μ 函数 $\hat{\mu}_N$ は, 一般化 μ 函数 $\mu(u, v; \alpha; \tau)$ の多変数類似であり, 多変数 μ 函数 μ_N の一般化 (1 パラメーター変形) である:

$$\begin{gathered} \hat{\mu}_N(u_0, \ldots, u_N; 1; \tau) = \mu_N(u_0, \ldots, u_N; \tau), \\ \hat{\mu}_1(u - \alpha\tau + \tau, -v; \alpha; \tau) = -e^{-\pi i \alpha(\alpha-1)\tau} \mu(u, v; \alpha; \tau). \end{gathered}$$

Section 2 では, 多変数一般化 μ 函数の N 次 q-Borel q-Laplace 変換による構成 (Theorem 2.1) と, 変数に関する対称性 (対称函数であること) 等の, 公式 (a)–(d) に類する結果 (Theorem 2.2) を紹介する. また Section 3 では, ベクトル値多変数 μ 函数を導入し, モジュラー変換等の公式 (A)–(D) に類する結果 (Theorem 3.1–Theorem 3.3) も述べる. 詳細に関しては, [ST2] を参照.

2 A construction of the generalized multivariable μ-function

まず多変数一般化 μ 函数を構成するために, N 次 q-Borel, q-Laplace 変換を導入する. 形式的冪級数 $g(x)$ に対して N 次 q-Borel 変換 $\mathcal{B}_q^N$, N 次 q-Laplace 変換 $\mathcal{L}_q^N$ を以下で定義する.

$$\begin{gathered} \mathcal{B}_q^N(g)(\xi) := \sum A_n x^n q^{\frac{Nn(n-1)}{2}} = \mathcal{B}_{q^N}(g)(\xi), \\ \mathcal{L}_q^N(g)(\lambda_0, \ldots, \lambda_N) := \sum_{n \in \mathbb{Z}^N} g(\lambda_0 q^{|n|}) \prod_{j=1}^{N} \frac{(\lambda_{j-1}/\lambda_j)^{n_j} q^{\frac{n_j(n_j-1)}{2}}}{\theta_q(\lambda_{j-1}/\lambda_j)}. \end{gathered}$$

N 次 q-Borel, q-Laplace 変換はそれぞれ, 従来の q-Borel, q-Laplace 変換を N 回作用させたものである:

$$\mathcal{B}_q^N(g) = \mathcal{B}_q \circ \cdots \circ \mathcal{B}_q(g), \quad \mathcal{L}_q^N(g)(\lambda_0, \ldots, \lambda_N) = \mathcal{L}_q(\lambda_N, \lambda_{N-1}) \circ \mathcal{L}_q(x, \lambda_{N-2}) \circ \cdots \circ \mathcal{L}_q(x, \lambda_0)(g).$$

q 差分方程式 ($N = 1$ の時は本質的に q-Hermite-Weber 方程式 (3))

$$[T_x^{N+1} - T_x^N + axT_x - x]f(x) = 0 \tag{4}$$

は $x = 0$ 周りで形式解

$$\tilde{g}_0(a, x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(q)_n} q^{-\frac{Nn(n+1)}{2}} (-x)^n \tag{5}$$

をもち, $\lambda_N = x$ に対して $\mathcal{L}_q^N \circ \mathcal{B}_q^N(\tilde{g}_0)(\lambda_0, \ldots, \lambda_N)$ は q 差分方程式 (4) の解であることが演算子法よりわかる.

そこで

$$f_N = f_N(x_0, \ldots, x_N; a; q) := \sum_{n \in \mathbb{Z}^N} \frac{(-ax_0 q^{|n|})_\infty}{(-x_0 q^{|n|})_\infty} \prod_{j=1}^{N} \frac{x_j^{-n_j} q^{\frac{n_j(n_j+1)}{2}}}{\theta_q(x_j)}.$$

とすると,

$$\mathcal{L}_q^N \circ \mathcal{B}_q^N(\tilde{g}_0)(\lambda_0, \ldots, \lambda_N) = f_N(\lambda_0, \lambda_1/\lambda_0, \ldots, \lambda_N/\lambda_{N-1}; a; q). \tag{6}$$

また f_N と $\hat{\mu}_N$ は次の関係式を満たす.

$$\hat{\mu}(u_0, \ldots, u_N; \alpha; \tau) = i^N e^{\pi i \alpha u} q^{-\frac{N}{8}} f_N(-e^{2\pi i u_0}, \ldots, -e^{2\pi i u_N}; q^\alpha; q)$$

よって次の定理が成り立つ.

Theorem 2.1.

$$\hat{\mu}(u_0, \ldots, u_N; \alpha; \tau) = i^N e^{\pi i \alpha u} q^{-\frac{N}{8}} \mathcal{L}_q^N \circ \mathcal{B}_q^N(\tilde{g}_0)(-e^{2\pi i u_0}, e^{2\pi i(u_0+u_1)}, -e^{2\pi i(u_0+u_1+u_2)}, \ldots, (-1)^{N+1} e^{2\pi i u}).$$

他方, f_N に関して次が成り立つ.

Lemma 2.1.

(1) $T_{x_r} f_N = T_{x_s} f_N$,

(2) $[(1-a)T_a + aT_{x_0} - 1] f_N = 0$,

(3) $[T_{x_0}^{N+1} - T_{x_0}^N + aXT_{x_0} - X] f_N = 0$,

(4) $$\begin{aligned} & f_N(x_0, \ldots, x_N; a; q) - f_N(x_0 y^{-1}, x_1 y, x_2, \ldots, x_N; a; q) \\ & = \frac{\theta_q(-a)\theta_q(-y)\theta_q(-x_1 y/x_0)}{\theta_q(y/x_0)\theta_q(x_1 y)\theta_q(x_0)\theta_q(x_1)} \sum_{n \in \mathbb{Z}^{N-1}} q^{\frac{{}^t n S n}{2}} \left[\prod_{j=1}^{N-1} \frac{(-x_0 x_1/x_{j+1})^{n_j}}{\theta_q(x_{j+1})} \right] \\ & \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(q^{m+1})_\infty}{(q^{m+1}/a)_\infty} (-ax_0 x_1)^m q^{\frac{m(m-1)}{2} + m|n|}, \end{aligned}$$

(5) $f_N(\ldots, x_r, \ldots, x_s, \ldots; a; q) = f_N(\ldots, x_s, \ldots, x_r, \ldots; a; q)$,

(6) $f_N(x_0, \ldots, x_N; a; q) = \dfrac{\theta_q(ax_0) \cdots \theta_q(ax_N)}{\theta_q(x_0) \cdots \theta_q(x_N)} f_N(q/ax_0, \ldots, q/ax_N; a; q)$,

ただし $S := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 \\ & & & \cdots & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{bmatrix} = [1 + \delta_{jk}]_{j,k=1}^{N-1}, (r, s) \in \{0, 1, \ldots, N\}^2, X := x_0 \cdots x_N$ とする.

Theorem 2.1 を用いて Lemma 2.1 を読み替えると, 多変数一般化 μ 函数に関する次の定理を得る.

Theorem 2.2.

(1) $\hat{\mu}_N(\ldots, u_r + \tau, \ldots; \alpha; \tau) = \hat{\mu}_N(\ldots, u_s + \tau, \ldots; \alpha; \tau)$,

(2) $[(a-1)T_a - \sqrt{aX} T_{x_0} + \sqrt{X}] \hat{\mu}_N = 0$,

(3) $\left[T_{x_0}^{N+1} - \sqrt{a}T_{x_0}^{N} + \sqrt{a^{N+2}}XT_{x_0} - \sqrt{a^{N+1}}\right]\hat{\mu}_N = 0,$

(4) $\hat{\mu}_N(u_0,\dots,u_N;\alpha;\tau) - \hat{\mu}_N(u_0-z,u_1+z,u_2,\dots,u_N;\alpha\tau)$

$$= \frac{e^{\pi i(\alpha-1)u+\pi i\alpha\tau}\vartheta(\alpha\tau)\vartheta(z)\vartheta(z-u_0+u_1)}{\vartheta(z-u_0)\vartheta(z+u_1)\vartheta(u_0)\cdots\vartheta(u_N)} \sum_{n\in\mathbb{Z}^{N-1}} \prod_{j=1}^{N-1} e^{2\pi i n_j(u_0+u_1-u_{j+1})}$$

$$\times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(q^{m+1})_\infty}{(q^{m+1-\alpha})_\infty}(-1)^m q^{\frac{m(m-1)}{2}+\frac{{}^t nSn}{2}+m|n|} e^{2\pi i m(u_0+u_1+\alpha\tau)},$$

(5) $\hat{\mu}_N(\dots,u_r,\dots,u_s,\dots;\alpha;\tau) = \hat{\mu}_N(\dots,u_s,\dots,u_r,\dots;\alpha;\tau),$

(6) $\hat{\mu}_N(-\alpha\tau-u_0,\dots,-\alpha\tau-u_N;\alpha+1;\tau)$

$$= (-1)^{N+1}\frac{e^{-2\pi i\alpha u-\pi i\alpha^2(N+1)\tau}\vartheta(u_0)\cdots\vartheta(u_N)}{\vartheta(u_0+\alpha\tau)\cdots\vartheta(u_N+\alpha\tau)}\hat{\mu}_N(u_0,\dots,u_N;\alpha+1;q).$$

特に $\alpha=1$ のとき, 多変数一般化 μ 函数は多変数 μ 函数であることから, 多変数 μ 函数に関する次の系が成り立つ.

Corollary 2.1.

(1) $\mu_N(u_0+1,u_1,\dots,u_N;\tau) = -\mu_N,$

(2) $\mu_N(u_0+N\tau,u_1,\dots,u_N;\tau) = (-1)^N e^{2\pi iu}q^{\frac{N}{2}}\mu_N + i^N e^{\pi iu}q^{\frac{3N}{8}},$

(3) $\mu_N(u_0-z,u_1+z,u_2,\dots,u_N;\tau) - \mu_N,$

$$= \frac{i\eta(\tau)^3\vartheta(z)\vartheta(z-u_0+u_1)}{\vartheta(z-u_0)\vartheta(z+u_1)\vartheta(u_0)\cdots\vartheta(u_N)} \sum_{n\in\mathbb{Z}^{N-1}} \exp(\pi i {}^t nSn\tau + 2\pi i(n,v)),$$

(4) $\mu_N(\dots,u_r+\tau,\dots;\tau) = \mu_N(\dots,u_s+\tau,\dots;\tau),$

(5) $\mu_N(-u_0,\dots,-u_N;\tau) = (-1)^{N+1}\mu_N,$

(6) $\mu_N(\dots,u_r,\dots,u_s,\dots;\tau) = \mu_N(\dots,u_s,\dots,u_r,\dots;\tau),$

ただし $v := {}^t[u_0+u_1-u_{j+1}]_{j=1}^{N-1}$ とする.

Zwegers [Z2] は Corollary 2.1 の諸公式には言及していない. Corollary 2.1 (1), (2), (3) はそれぞれオリジナルの μ 函数の (a), (b), (c) の類似である. Corollary 2.1 (4) は (d) の $\mu(u+\tau,v+\tau)=\mu(u,v)$, (5) は $\mu(-u,-v)=\mu(u,v)$, (6) は $\mu(v,u)=\mu(u,v)$ にそれぞれ対応する. 特に多変数 (一般化) μ 函数は (一般化) μ 函数の多変数化であるだけでなく, より強く対称函数になっていることに注意する.

3 Some remarks of modular transformations of the multivariable μ-function

ベクトル値テータ函数を

$$\nu_{N,k}(u_0,\dots,u_N;\tau) := \sum_{n\in\mathbb{Z}^{N-1}+e_k} e^{\pi i {}^t nSn\tau+2\pi i(v,n)} \quad e_k := \begin{bmatrix} k/N \\ k/N \\ \vdots \\ k/N \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{N-1},$$

$$\Phi_N = \Phi_N(u_0,\dots,u_N;z;\tau) := \frac{i\eta(\tau)^3\vartheta(z)\vartheta(z-u_0+u_1)[\nu_{N,k}(u_0,\dots,u_N;\tau)]_{k=0}^{N-1}}{\vartheta(z-u_0)\vartheta(z+u_1)\vartheta(u_0)\cdots\vartheta(u_N)}$$

で定めると, 次の補題が成り立つ.

Lemma 3.1. Φ_N は次の擬周期性とモジュラー変換則を満たす.

(1) $\Phi_N(u_0+1,u_1,\dots,u_N;z;\tau) = -\left[\delta_{jk}\zeta_N^{-k}\right]_{j,k=0}^{N-1}\Phi_N,$

$$(2)\ \Phi_N(u_0+\tau,u_1,\ldots,u_N;z;\tau) = -e^{\frac{2\pi i u}{N}} q^{\frac{1}{2N}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ & & \ldots & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \Phi_N,$$

$$(3)\ \Phi_N(u_0,\ldots,u_N;z;\tau+1) = e^{-\frac{\pi i N}{4}} \left[\delta_{jk}(-1)^k \zeta_{2n}^{-k^2}\right]_{j,k=0}^{N-1} \Phi_N,$$

$$(4)\ \Phi_N\left(\frac{u_0}{\tau},\ldots,\frac{u_N}{\tau};\frac{z}{\tau};-\frac{1}{\tau}\right) = \frac{\sqrt{-i\tau}}{(-i)^{N+1}N^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{\pi i u^2}{N\tau}} [\zeta_N^{jk}]_{j,k=0}^{N-1}\Phi_N.$$

またベクトル値 μ 函数を

$$M_N = M_N(u_0,\ldots,u_N;\tau) := \left[(-1)^k e^{-\frac{2\pi i k u}{N} - \frac{\pi i k^2 \tau}{N}} \mu_N(u_0+k\tau,u_1,\ldots,u_N;\tau)\right]_{k=0}^{N-1}.$$

とする. これはベクトル値テータ函数 Φ_N の μ 函数版 (モック版) とみなせる. この M_N に関して, オリジナルの μ 函数の公式 (a)–(d) に相当する結果として, 次が成り立つ.

Theorem 3.1.

$$(1)\ M_N = -\left[\delta_{jk}\zeta_N^k\right]_{j,k=0}^{N-1} M_N(u_0+1,u_1,\ldots,u_N;\tau),$$

$$(2)\ M_N = -e^{-\frac{2\pi i u}{N}} q^{-\frac{1}{2N}} \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ & \ddots & & & \\ 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} M_N(u_0+\tau,u_1,\ldots,u_N;\tau)$$
$$-(-i)^N e^{-\pi i u} q^{-\frac{N}{8}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$(3)\ M_N(u_0-z,u_1+z,u_2,\ldots,u_N;\tau) - M_N = \Phi_N(u_0,\ldots,u_N;z;\tau),$$

$$(4)\ M_N(\ldots,u_r,\ldots,u_s,\ldots;\tau) = M_N(\ldots,u_s,\ldots,u_r,\ldots;\tau),$$

$$(5)\ M_N(\ldots,u_r+\tau,\ldots;\tau) = M_N(\ldots,u_s+\tau,\ldots;\tau).$$

また公式 (A)–(B) に相当するのは以下の定理である.

Theorem 3.2.

$$(1)\ e^{\frac{\pi i N}{4}} \left[\delta_{jk}(-1)^k\zeta_{2N}^{k^2}\right]_{j,k=0}^{N-1} M_N(u_0,\ldots,u_N;\tau+1) = M_N,$$

$$(2)\ \frac{(-i)^{N+1}e^{\frac{\pi i u^2}{N\tau}}}{N^{\frac{1}{2}}\sqrt{-i\tau}} \left[\zeta_N^{-jk}\right]_{j,k=0}^{N-1} M_N\left(\frac{u_0}{\tau},\ldots,\frac{u_N}{\tau};-\frac{1}{\tau}\right) = M_N + \frac{(-1)^N i}{2} H_N,$$

ただし

$$H_N = H_N(u;\tau) := \left[(-1)^k e^{-\frac{2\pi i k u}{N}} q^{-\frac{k^2}{2N}} h\left(u+k\tau-\frac{N-1}{2};N\tau\right)\right]_{k=0}^{N-1}$$

とする.

Theorem 3.2 で述べたベクトル値 μ 函数 M_N のモジュラー補完なしの変換公式については Zwegers は言及していない. 他方で, 公式 (C)–(D) に相当する次の Theorem 3.3 (モジュラー補完した形の変換公式) に関しては, [Z2] で本質的に与えられている (ただし, ベクトル値での記述は行なっていない).

Theorem 3.3 ([Z2])**.** ベクトル値のモジュラー補完を

$$R_N(u;\tau) := \left[(-1)^k e^{-\frac{2\pi iku}{N}} q^{-\frac{k^2}{2N}} R\left(u + k\tau + \frac{N+1}{2}; N\tau\right)\right]_{k=0}^{N-1},$$

$$\widetilde{M}_N(u_0, \ldots, u_N; \tau) := M_N(u_0, \ldots, u_N; \tau) + \frac{i}{2} R_N(u;\tau)$$

とする. このとき $\widetilde{M}_N(u_0, \ldots, u_N; \tau)$ は次のモジュラー変換則を満たす:

$$(1)\ e^{\frac{\pi i N}{4}} \left[\delta_{jk}(-1)^k \zeta_{2N}^{k^2}\right]_{j,k=0}^{N-1} \widetilde{M}_N(u_0, \ldots, u_N; \tau+1) = \widetilde{M}_N(u_0, \ldots, u_N; \tau),$$

$$(2)\ \frac{(-i)^{N+1} e^{\frac{\pi i u^2}{N\tau}}}{N^{\frac{1}{2}}\sqrt{-i\tau}} \left[\zeta_N^{-jk}\right]_{j,k=0}^{N-1} \widetilde{M}_N\left(\frac{u_0}{\tau}, \ldots, \frac{u_N}{\tau}; -\frac{1}{\tau}\right) = \widetilde{M}_N(u_0, \ldots, u_N; \tau).$$

Zwegers は, オリジナルの μ 函数の場合のように, Theorem 3.2 をモジュラー補完して Theorem 3.3 を導出したのではなく, 直接 Theorem 3.3 を証明している.

参考文献

[BFOR] K. Bringmann, A. Folsom, K. Ono and L. Rolen, *Harmonic Maass Forms and Mock Modular Forms: Theory and Applications*, American Mathematical Soc. **64** (2017).

[GW] S. Garoufalidis and C. Wheeler, *Modular q-holonomic modules*, arXiv:2203.17029v1, (2022)

[RSZ] J. P. Ramis, J. Sauloy and C. Zhang, *Local Analytic Classification of q-difference Equations*, Astérisque **355**, (2013).

[ST1] G. Shibukawa and S. Tsuchimi, *A generalization of Zwegers' μ-function according to the q-Hermite-Weber difference equation*, SIGMA **19** (2023), 014, 23 pages.

[ST2] G. Shibukawa and S. Tsuchimi, *A generalization of Zwegers' multivariable μ-function*, arXiv:2503.11955, (2025).

[Z1] S. P. Zwegers, *Mock theta functions*, Thesis, Universiteit Utrecht (2002).

[Z2] S. P. Zwegers, *Multivariable Appell functions and nonholomorphic Jacobi forms*, Res. Math. Sci. **6** (2019), no. 1, Paper No. 16.