On M-functions and screw functions originating from Goldbach's problem [1]

東京科学大学・理学院 数学系　鈴木正俊 (Suzuki, Masatoshi)
Department of Mathematics, Institute of Science Tokyo

1. 序文

本論は松本耕二氏との共同研究 [7] に関する解説である. しかし, それと同じ流れで話を進めても読者に得るところがないと思われるので, 筆者が数理研講究録の記事でよくやるように, 実際の研究の流れにそった解説をしようと思う. 多くの場合にそうであるように, それは論文 [7] での話の流れとは異なるものになっている.

まず, 表題にある M 関数 (M-functions) は, Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ の値分布論における概念である. M 関数という名称は伊原康隆氏により [4] で与えられたものだが, その原型は 1930 年代の H. Bohr の研究まで遡ることができる. 一つ例を挙げると, $\sigma > 1/2$ であるとき, 任意の局所 Riemann 可積分なテスト関数 $\Phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ に対して, 等式

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \Phi\left(\log\zeta(\sigma+it)\right)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} M(z)\Phi(z)\, dz.$$

が成り立つような $M = M_{\log\zeta,\sigma} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_{>0}$ を $\log\zeta(s)$ の ($\Re(s) = \sigma$ 上の) M 関数という. テスト関数 Φ として, 辺が実軸と虚軸に平行な長方形の特性関数を選ぶと, 古典的な Bohr–Jessen の公式が復元される. 現在までに, この $\log\zeta(s)$ を対数微分 $\zeta'(s)/\zeta(s)$ におきかえたり, $\zeta(s)$ を他のゼータ関数や L 関数に置き換えるといった様々な一般化が成されている. 2019 年までの進展については [5] を見て頂きたい. M 関数について, その後も重要な進展が得られているが, ここでは省略する.

伊原氏が松本氏との共同研究で M 関数についての理論を構築していた頃, 筆者は松本研のポスドクをしていたので, M 関数について耳にすることが多かった. その縁で, 自分も M 関数に興味を持ち, 何かやれたら良いなという想いを持っていた. それが一因となって [8] を書いた訳だが, この方向でさらに研究を推し進める意欲はわかず, 別の方向から M 関数について何かできないかと折に触れて考える日々が続いた.

一方, 表題にある screw 関数は, 解析学における正定値関数を一般化した概念である. 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が正定値関数とは, 任意の $x \in \mathbb{R}$ について $f(-x) = \overline{f(x)}$ が成り立ち, 任意の $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ と, 任意の点列 $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ について, n 次エルミート行列 $(f(x_i - x_j))_{i,j}$ が正定値であること, つまり, 任意の複素数 $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{C}$ に対して,

$$\sum_{i,j=1}^{n} f(x_i - x_j)\, \xi_i \overline{\xi_j} \geqslant 0$$

が成り立つことを言う. (実は $f(-x) = \overline{f(x)}$ という条件は不要 (Riesz, 1955).)

Kreĭn は正定値関数たちを含むようなクラスとして, screw 関数のクラスを導入した. 関数 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が screw 関数とは, 任意の $x \in \mathbb{R}$ について $g(-x) = \overline{g(x)}$ が成り立ち, 任意の $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ と, 任意の点列 $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ について,

$$g(x_i - x_j) - g(x_i) - \overline{g(x_j)} + g(0)$$

[1] この研究は基盤研究 (C)（研究代表者：松本耕二, 研究課題番号：22K03276）, および基盤研究 (C)（研究代表者：鈴木正俊, 研究課題番号：23K03050）の助成を受けています.

を (i,j) 成分とする n 次エルミート行列が正定値であることを言う.

このscrew関数という概念がゼータ関数の研究に利用できそうなことを, その定義から想像することは難しいと思われる. しかし, 標準形

$$g(t)=g(0)+i\lambda t+\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{i\gamma t}-1-\frac{i\gamma t}{1+\gamma^2}\right)\frac{d\tau(\gamma)}{\gamma^2}$$

($\lambda\in\mathbb{R}$, τ は適当な条件を満たす測度) を見ると, 例えば $\zeta(s)$ の非自明零点の虚部 γ を重複度を込めて渡る和

$$\sum_{\gamma}\frac{e^{i\gamma t}}{\gamma^2} \tag{1.1}$$

がscrew関数と関係しそうに思える. その推測が正しいことを述べたのが [9] である. (そもそも, 何故 $\zeta(s)$ を screw 関数と関連付けて考えようと思ったのか, という疑問を持たれた方は, その経緯なども少々述べた [10] を参照して頂きたい.)

さて, こういった screw 関数との関連で筆者は指数和 (1.1) に興味を持ったのだが, この指数和は $\zeta(s)$ の研究で従来扱われていた, 非自明零点 ρ を渡る指数和

$$\sum_{\rho}\frac{X^\rho}{\rho(\rho+1)} \tag{1.2}$$

とよく似ている. ここで思い浮かんだのが, この指数和と Goldbach の問題を結びつけた Fujii [1, 2, 3] の研究である. この一連の研究では指数和 (1.2) がとり得る値についても研究されていたので, 筆者はこの指数和の M 関数を計算してみようかと思い立った. M 関数について少しは知っていたので, 関連がありそうだと予想されたからである. そうして計算の仕方を思い出そうと M 関数関連の論文を漁っていると, ほどなくして Matsumoto [6] に行き当たり, 指数和 (1.2) の M 関数はすでに松本氏により計算されていたことを知る.

とはいえ, [6] の方法は指数和 (1.1) にも適用できることは明らかだったので, もし M 関数とscrew関数を結びつける成果が得られれば, それはそれで面白いのではないかと筆者には思われた. 筆者は [9] 以降, screw関数がゼータ関数関連の研究に応用できる例を, いろいろ増やしたいと考えていたし, 先に述べたように, M 関数について独自の視点で何かできなかと常々考えていたからである.

こういった動機で指数和 (1.1) についてまず考えたことは, それ自身をGoldbach問題に関連付けられないかということだが, その試みは成功しなかった. しかし, (1.2) に似た和

$$\sum_{\rho}\frac{X^\rho}{\rho(1-\rho)} \tag{1.3}$$

ならば, Goldbach問題, M 関数, および screw関数のすべてに関連付けられることが分かった. しかも, 指数和 (1.2) は指数和 (1.3) と partial summation により結びついており, Goldbach問題に関する寄与は同等であることも簡単に分かる. ここに至って何かできそうだという感触を得た筆者は, 松本氏に共同研究を持ちかけ, さらなる考察と思考錯誤を試みることとした.

さて, こうしてはじまった松本氏との共同研究だが, 「いろいろなものと関連が付く」というだけでは論文にするには結果として弱い. なので, 何か目玉になるような結果が欲しくなる. そういった動機で議論を重ねる中で, M 関数の公式がRiemann予想の必要十分条件となっているという結果が得られた ([7, Theorem 1.2]). これで何とか論文

にはなるかもしれないが, もう一押し何か欲しいなあと考えていたところ, M 関数と, screw 関数に対する Lévy–Khintchine の公式に現れる Lévy 測度を関連付ける等式を得た ([7, Theorem 1.4]). これはなかなか訳がわからない等式だったので, もう少しハッキリとした意味が分からないかと色々調べたり知人の専門家に質問したりしてみたが, 結局よくわからない. 埒が明かないので, 一先ずここまでで論文にまとめることとした.

論文をまとめる過程で, (1.3) に似た形の指数和は数論ではしばしば現れるので, いっそ

$$\sum_{\omega\in\Omega} a(\omega)\, X^{i\omega}, \quad \Omega\subset\mathbb{R}\setminus\{0\} \text{ or } \mathbb{C}\setminus\{0\} \tag{1.4}$$

といった一般的な状況での結果を書き下しておくのが良いのではないかと考え, そうするための公理的な設定を整備することとした. こうしてできたのが共著論文 [7] である. こうした理由から, 論文では序文で Goldbach 問題と関連させて, 指数和 (1.3) に特殊化した形で成果を述べ, 本文では一般的な状況での結果を述べる形にしている.

以下では講演時と同様に, 指数和 (1.3) に特殊化した形で結果を述べ, 若干のコメントを付すに留める. (1.4) のような一般的な形の和については, [7] を見て頂きたい.

2. Goldbach 問題に関連した主結果

Goldbach が Euler への手紙で述べた「2 より大きな偶数はみな二つの素数の和で表せるだろう」という予想に対して, Hardy と Littlewood は von Mangoldt 関数 $\Lambda(n)$ により表される数論的関数

$$G_2(n) := \sum_{m+k=n} \Lambda(m)\Lambda(k)$$

を考察した. Goldbach の予想が正しければ, 2 より大きな偶数 n について $G_2(n) > 0$ が成り立つ. 逆に, ある定数 $C > 0$ が存在して $G_2(n) > C\sqrt{n}$ が成り立つことが示されれば, Goldbach の予想が成り立つ.

その後, Fujii [1, 2, 3] は $G_2(n)$ の平均値を, $\zeta(s)$ の非自明零点の実部がすべて 1/2 であると予想する Riemann 予想の下で研究し, 漸近式

$$\sum_{n\leqslant X} G_2(n) = \frac{1}{2}X^2 - 2X^{3/2}H(X) + O((X\log X)^{4/3})$$

を示した. ここで $H(X)$ は,

$$H(X) := \sum_{\rho} \frac{X^{\rho-1/2}}{\rho(\rho+1)}, \quad X\geqslant 1 \tag{2.1}$$

により定められる和であり, ρ は Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ の非自明零点を重複度を込めて渡るものとする. 級数 $H(X)$ は, このように Goldbach の問題おいて自然に現れる対象ではあるが, screw 関数との関係はよくわからない. そこで, (2.1) を少し変形した

$$H_1(X) := \sum_{\rho} \frac{X^{\rho-1/2}}{\rho(1-\rho)}, \quad X\geqslant 1 \tag{2.2}$$

という和を考えてみる. Riemann 予想の下で partial summation を用いると, 漸近式

$$\sum_{n\leqslant X} G_2(n) = \frac{1}{2}X^2 - 2X^{3/2}\, H(X) + R(x)$$

が適当な誤差項 $R(x)$ について成り立つことと, 漸近式

$$\sum_{n\leqslant X}\frac{G_2(n)}{n^2}=\log X+c_2+\frac{2}{\sqrt{X}}\,H_1(X)+E(x)$$

が適当な誤差項 $E(x)$ について成り立つことは同値であることが分かる. この意味で, 和 (2.1) と (2.2) の Goldbach の問題に対する寄与は同等である. また, M 関数による値分布の記述という観点からは, これら二つの和は全く同様の手法で扱われ, 次の結果が得られる.

定理 1. ([7, Corollary 2.1] の特別な場合)

Riemann 予想が正しいと仮定し, しかも, $\zeta(s)$ の非自明零点の虚部が成す多重集合が $\mathbb{Q}$ 上一次独立であると仮定する. このとき, コンパクト台を持つ $\mathbb{R}$ 上の非負値関数 M_{H_1} であって, 任意の Riemann 可積分なテスト関数 $\Phi:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ について, 等式

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\Phi(H_1(e^t))\,dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}M_{H_1}(u)\Phi(u)\,du \tag{2.3}$$

が成り立ち,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}M_{H_1}(u)\,du=1$$

と正規化されているものが明示的に構成される.

この $M_{H_1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ が $H_1(X)$ の M 関数と呼ばれるものである. その明示的な表示は Fourier 変換

$$\widetilde{M_{H_1}}(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}M_{H_1}(u)e^{izu}\,du\quad(z\in\mathbb{C}),$$

に対して,

$$\widetilde{M_{H_1}}(z)=\prod_{\gamma>0}J_0\left(\frac{2m_\gamma z}{1/4+\gamma^2}\right) \tag{2.4}$$

で与えられる. ここで γ は $\zeta(s)$ の非自明零点の虚部で正であるものを渡り, $J_0(z)$ は次数 0 の第一種ベッセル関数である. ここまでは M 関数の一般論の範疇である.

定理 1 では Riemann 予想が仮定されているが, 逆に, コンパクト台の $\mathbb{R}$ 上の関数 M_{H_1} が存在して, 等式 (2.3) が十分多くのテスト関数 Φ について成り立つことが示されれば, それから RH が従う ([7, Theorem 1.2]). この意味で, (2.3) が十分多くのテスト関数について成り立つことは, Riemann 予想の十分条件の一つになっている. とはいえ, 既存の手法による定理 1 の証明を見る限り, (2.3) を Riemann 予想や虚部の一次独立性を仮定することなく証明することは あまり現実的ではないと思われる. しかし, M 関数と Riemann 予想を結びつける結果はこれまで無かったので, M 関数の新たな側面を明らかにしたものとは言えるだろう.

いっぽう, 和の定義を (2.1) から (2.2) へ若干変更したことにより, $H_1(X)$ は screw 関数と関連付けられるという付加的な性質を持つことが分かる.

定理 2. ([7, Theorem 1.3])

和 (2.2) を用いて $\mathbb{R}$ 上の関数 g_{H_1} を

$$g_{H_1}(t) := H_1(e^t) - H_1(1) = \sum_{\rho} \frac{e^{t(\rho-1/2)}-1}{\rho(1-\rho)}$$

により定める．このとき，g_{H_1} が $\mathbb{R}$ 上の screw 関数であるためには，Riemann 予想が成り立つことが必要かつ十分である．

筆者にはこの結果自身が興味深いものと思われるが，$H_1(X)$ の優位性を客観的に主張するためには，少なくとも一つは応用を示したい．そういった動機の下での思考錯誤の結果，以下のような screw 関数と M 関数の関連を見つけることができた．それを述べるため，少し用語を定義する．

$\mathbb{R}$ 上の確率測度 μ が無限分解可能 (infinitely divisible) であるとは，任意の正整数 n に対して $\mathbb{R}$ 上の確率測度 μ_n が存在して，μ が μ_n の n 重合成積 $\mu = \mu_n * \cdots * \mu_n$ として表せることを言う．Screw 関数 $g(t)$ が与えれたとき，$\exp(g(t))$ はある無限分解可能分布 μ の特性関数になっている．即ち，

$$\exp(g(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\mu(x).$$

という等式が成り立つ．これを Lévy–Khintchine の公式という．これによれば，Riemann 予想を仮定すれば，screw 関数 $g_{H_1}(t) = H_1(e^t) - H_1(1)$ に対応する無限分解可能分布が存在する．また，ある screw 関数の正の定数倍も screw 関数であることにも注意すれば，各 $y > 0$ に対して，$yg_{H_1}(t)$ に対応する無限分解可能分布が存在する．

定理 3. ([7, Theorem 1.4])

定理 1 と同じ仮定の下で，M_{H_1} を $H_1(X)$ の M 関数とする．また，$y > 0$ に対し，μ_y を $\exp(yg_{H_1}(t))$ を特性関数とする無限分解可能分布とする．このとき，μ_y による一点 $\{0\}$ の測度と M 関数 M_{H_1} の間に次の等式が成り立つ

$$\mu_y(\{0\}) = e^{-yH_1(1)} \widetilde{M_{H_1}}(-iy).$$

この結果は無限分解可能分布 μ_y の原点での値が M 関数の Fourier 変換で与えられると見ることも，M 関数の Fourier 変換の値が無限分解可能分布 μ_y で与えられると見ることもできるが，M 関数の Fourier 変換が (2.4) のように具体的に与えられることを考えると，前者のような見方の方が非自明なのかもしれない．

いずれにせよ，定理 3 によって M_{H_1} や μ_y 対して，新たな確率論的な解釈が得られるとか，$H_1(X)$ に付随する M 関数や screw 関数，無限分解可能分布の新たな応用が見つかるといったことは，今のところない．先に述べたように，そういうことが出来たら良いと考えて調べたりしたが，成果は得られなかった．何か気付いた方がおられたら，筆者や松本氏にお知らせ頂ければ有難い．

さて，ここで定理 1 とその逆，および定理 2 をふりかえると，$H_1(X)$ を $\zeta(s)$ の非自明零点を用いずに表示したくなる．それは可能で，部分分数分解により

$$H_1(X) = \frac{1}{\sqrt{X}} \sum_{\rho} \frac{X^{\rho}}{\rho} - \sqrt{X} \sum_{\rho} \frac{X^{\rho-1}}{\rho-1},$$

と表示しておいて, 右辺のそれぞれの和に古典的な明示公式を適用すればよい. これは $H(X)$ についても同様である.

命題. ([7, Proposition 6.1])

$X \geqslant 1$ に対して,

$$H(X) = \frac{1}{2}\sqrt{X} - \frac{1}{\sqrt{X}}\sum_{n\leqslant X}\Lambda(n)\left(1-\frac{n}{X}\right) - \frac{1}{X\sqrt{X}}\,12\zeta'(-1)$$
$$- \frac{1}{\sqrt{X}}\log 2\pi - \frac{1}{2\sqrt{X}}\left[\log(1-X^{-2}) + \frac{1}{X}\log\frac{X-1}{X-1}\right],$$

$$H_1(X) = \sum_{n\leqslant X}\frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}}\left(\sqrt{\frac{X}{n}} - \sqrt{\frac{n}{X}}\right) - \sqrt{X}\,(\log X - C_0 - 1)$$
$$- \frac{1}{\sqrt{X}}\log 2\pi - \frac{1}{\sqrt{X}}\left[\frac{1}{2}\log(1-X^{-2}) + \frac{X}{2}\log\frac{X+1}{X-1} - 1\right]$$

が成り立つ. ここで C_0 は Euler-Mascheroni 定数である.

この $H(X)$ の表示は本質的には [2, p.249] と同等である. この表示によって $H(X)$ や $H_1(X)$ の数値計算を容易に行うことができるが, 残念ながら, 今のところ理論的に役立てることはできていない.

3. 謝辞

講演と執筆の機会を与えてくださいました研究代表者の中筋麻貴氏および副代表者の谷口隆氏にこの場を借りて感謝申し上げます.

References

[1] A. Fujii, An additive problem of prime numbers, *Acta Arith.* **58** (1991), no. 2, 173–179.
[2] A. Fujii, An additive problem of prime numbers. II, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **67** (1991), no. 7, 248–252.
[3] A. Fujii, An additive problem of prime numbers. III, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **67** (1991), no. 8, 278–283.
[4] Y. Ihara, On"M-functions" closely related to the distribution of L'/L-values, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **44** (2008), no. 3, 893–954.
[5] K. Matsumoto, On the theory of M-functions, 数理解析研究所講究録 No. 2120, Profinite monodromy, Galois representations, and Complex functions (2019), 153–165.
[6] K. Matsumoto, An M-function associated with Goldbach's problem, *J. Ramanujan Math. Soc.* **36** (2021), no. 4, 339–352.
[7] K. Matsumoto, M. Suzuki, M-functions and screw functions originating from Goldbach's problem and zeros of the Riemann zeta function, `https://arxiv.org/abs/2409.00888`.
[8] M. Suzuki, Nearest neighbor spacing distributions for the zeros of the real or imaginary part of the Riemann xi-function on vertical lines, *Acta Arith.* **170** (2015), no. 1, 47–65.
[9] M. Suzuki, Aspects of the screw function corresponding to the Riemann zeta-function, *J. Lond. Math. Soc. (2)* **108** (2023), no. 4, 1448–1487.
[10] M. Suzuki, On the screw function of the Riemann zeta function, 数理研講究録 No. 2259, 解析的整数論とその周辺 (2023).