

3次元ユークリッド空間内の 半離散ガウス曲率負一定曲面について

徳島大学大学院創成科学研究科 森北 隼理*

Shinri Morikita

Graduate School of Sciences and Technology for Innovation,
Tokushima University

徳島大学大学院社会産業理工学研究部 安本 真士†

Masashi Yasumoto

Graduate School of Technology, Industrial and Social Sciences,
Tokushima University

概要

本稿では、3次元ユークリッド空間内のガウス曲率負一定曲面の理論を概説し、Wallner [20] による半離散ガウス曲率負一定曲面の理論を紹介する。さらに、半離散ガウス曲率負一定曲面の曲率についてこれまでに得られた結果と、考える問題をいくつか紹介する。

1 紹介

曲面の「離散化」は、離散微分幾何の主要なトピックの一つである。離散化という用語には、主に以下の意味があると考えている：

- 曲線や曲面等の幾何的対象を何らかの意味で近似し、対象に近い形状を構成する。
- 曲線や曲面等の対象が持つ性質を持った、離散幾何的対象の理論を新たに構築する。

離散化とは前者のことを意味すると思われるかもしれないが、離散微分幾何の研究で真に探求したいのは后者であり、数学研究としての新たな方向性を開拓することを目的に様々な研究がなされている。離散微分幾何は、近年ようやく確立された、以下の指導原理に基づいて研究が進められている ([2])：

Discretize the whole theory, not just the equation.

連続的な（以後「なめらかな」と表記）場合、3次元空間内の曲面は実に多様な側面を持っており、多様なアプローチを用いて研究がなされてきた。たとえば、3次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 内の

*E-mail: c612437007@tokushima-u.ac.jp

†E-mail: yasumoto.masashi@tokushima-u.ac.jp

極小曲面は石炭膜の数値モデルであり、微分幾何、変分問題、複素関数論、可積分系と深く関わりを持ち、実に多角的に研究がなされている。

本稿では、ガウス曲率負一定曲面（ K 曲面）の可積分な半離散化を紹介する。 K 曲面の可積分条件は sine-Gordon 方程式であり、sine-Gordon 方程式の既知の解から新たな解を生成するベックルンド変換が、 K 曲面間の変換を用いて発見されるなど、 K 曲面は微分幾何と可積分系の双方から興味を持たれる研究対象である。Bobenko, Pinkall [1] は K 曲面の可積分な離散化を提唱し、その類似物として、Wallner [20] は半離散 K 曲面の基礎理論を構築した。離散 K 曲面の理論は様々な文献で概要が紹介されているが、半離散曲面の理論について紹介されている文献はあまり多くない。そこで本稿では、Wallner による半離散 K 曲面を概説し、筆者 [12] が取り組んでいる問題をいくつか紹介する。

2 3次元ユークリッド空間内の K 曲面

本章ではなめらかな K 曲面の理論を概説する。まず、 $\mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) を標準的なユークリッド内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ をもつ n 次元ユークリッド空間とし、 $\|X\| := \sqrt{\langle X, X \rangle}$ ($X \in \mathbb{R}^n$) と表す。ここでは C^∞ 級写像

$$\begin{array}{ccc} p: D \subset \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \Psi & & \Psi \\ (u, v) & \mapsto & p(u, v) \end{array}$$

を考える。特に、 $p(u, v)$ は正則曲面とし、 $p(u, v)$ の単位法ベクトル場 $\nu(u, v)$ を

$$\nu(u, v) := \frac{\frac{\partial p}{\partial u} \times \frac{\partial p}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial p}{\partial u} \times \frac{\partial p}{\partial v} \right\|} \in \mathbb{S}^2 := \{X \in \mathbb{R}^3 \mid \|X\| = 1\}$$

と定める。ここで、 $\times$ は通常のベクトル積である。さらに、第一基本形式 I_p 、第二基本形式 Π_p を

$$I_p = \langle dp, dp \rangle = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \quad \Pi_p = -\langle dp, d\nu \rangle = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

と定め、 $K := \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$ を $p(u, v)$ のガウス曲率とおく。 $K < 0$ のとき、以下の性質が成り立つ。詳細は [19] を参照。

定理 2.1. 曲面 $p(u, v)$ のガウス曲率 K が $K < 0$ をみたすとき、

$$L = -\langle p_u, \nu_u \rangle = \langle p_{uu}, \nu \rangle = 0, \quad N = -\langle p_v, \nu_v \rangle = \langle p_{vv}, \nu \rangle = 0$$

をみたす (u, v) が存在する。これを漸近線座標といい、漸近線座標でパラメータ表示された曲面 $p(u, v)$ を A 曲面という。

A 曲面はガウス曲率負一定曲面（ K 曲面）を含む曲面のクラスである。そこで、ここからは A 曲面に着目する。 $p(u, v)$ を A 曲面とし、条件

$$(p_{uu})_v = (p_{uv})_u, \quad (p_{uv})_v = (p_{vv})_u \tag{1}$$

を考える． Γ_{ij}^k ($i, j, k = 1, 2$) とおくと，方程式 (1) より次の三式が得られる：

$$K = -\frac{1}{E} \{(\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{12}^1 + (\Gamma_{12}^2)^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2\} \quad (2)$$

$$M_u = -M(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1), \quad M_v = M(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) \quad (3)$$

方程式 (2) を Gauss 方程式，方程式 (3) を Codazzi 方程式という．ここで，

$$K = -\frac{1}{\rho^2} < 0 \quad (\rho > 0), \quad a = a(u, v) = \frac{\sqrt{E}}{\rho}, \quad b = b(u, v) = \frac{\sqrt{G}}{\rho}$$

とおくと，第一基本形式，第二基本形式はそれぞれ

$$I_p = \rho^2 a^2 du^2 + 2\rho^2 ab \cos \omega dudv + \rho^2 b^2 dv^2, \quad \Pi_p = 2\rho ab \sin \omega dudv \quad \left(\omega := \cos^{-1} \frac{\langle p_u, p_v \rangle}{\|p_u\| \|p_v\|} \right)$$

と表せる．さらに，Gauss 方程式，Codazzi 方程式は次のように書き換えられる．

$$\begin{aligned} \omega_{uv} + \frac{1}{2} \left(\frac{\rho_u b}{\rho a} \sin \omega \right)_u + \frac{1}{2} \left(\frac{\rho_v a}{\rho b} \sin \omega \right)_v - ab \sin \omega &= 0 \\ a_v + \frac{\rho_v}{2\rho} a - \frac{\rho_u}{2\rho} b \cos \omega &= 0, \quad b_u + \frac{\rho_u}{2\rho} b - \frac{\rho_v}{2\rho} a \cos \omega = 0 \end{aligned}$$

ここで， K を定数，つまり ρ を定数と仮定すると，

$$\omega_{uv} - ab \sin \omega = 0 \quad (4)$$

$$a_v = b_u = 0 \quad (5)$$

方程式 (5) より， $a(u, v) = a(u)$ ， $b(u, v) = b(v)$ となることが分かる．方程式 (5) を満たす漸近線座標 (u, v) を漸近 Chebyshev 網といい，また方程式 (4) を sine-Gordon 方程式という．

ここまでは K 曲面があれば，そこから定まる角度関数 $\omega(u, v)$ が sine-Gordon 方程式の解となることを確認した．逆に，sine-Gordon 方程式の解が与えられれば，それに対応する K 曲面が与えられることを確認する．曲面論の基本定理より，sine-Gordon 方程式の解 $\omega(u, v)$ があれば，

$$I_p = \rho^2 a(u)^2 du^2 + 2\rho^2 a(u)b(v) \cos \omega dudv + \rho^2 b(v)^2 dv^2, \quad \Pi_p = 2\rho a(u)b(v) \sin \omega dudv$$

をそれぞれ第一基本形式，第二基本形式にもつ，ガウス曲率 $K = -\rho^{-2}$ の K 曲面 $p(u, v)$ が，回転と平行移動を除いて一意に定まる．

注意． 三点注意．

- 方程式 (5) より， A 曲面が K 曲面であるための必要十分条件は， $\|p_u\|_v = \|p_v\|_u = 0$ が成り立つことである．これは，半離散 K 曲面の定式化において重要な役割を果たす．
- 方程式 (5) より，パラメータ (u, v) を $\frac{du'}{du} = \rho a$ ， $\frac{dv'}{dv} = \rho b$ を満たす (u', v') に取り換えることにより，方程式 (4) を

$$\omega_{u'v'}(u', v') - \frac{1}{\rho^2} \sin \omega(u', v') = 0$$

と表すこともできる.

- λ を正の定数とする. すると $(a, b) \mapsto (\lambda a, \lambda^{-1}b)$ ($\lambda > 0$) と置き換えても, 方程式 (4), (5) は変わらない. この変換により, 与えられた K 曲面 $p(u, v)$ の 1 パラメータ族 $p^\lambda(u, v)$ が存在する. つまり,

$$I_p^\lambda = \rho^2 \lambda^2 a^2 du^2 + 2\rho^2 ab \cos \omega dudv + \rho^2 \lambda^{-2} b^2 dv^2, \quad \Pi_p^\lambda = 2\rho ab \sin \omega dudv$$

をそれぞれ第一基本形式, 第二基本形式にもつ, ガウス曲率 $K = -\rho^{-2}$ の K 曲面 $p^\lambda(u, v)$ が存在することが分かる.

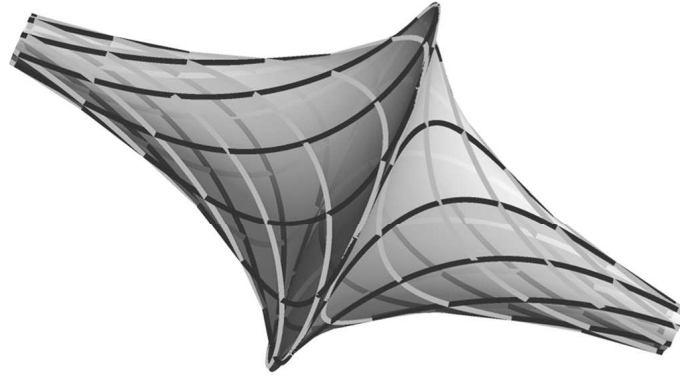


図 1: 擬球面とそのパラメータ曲線. 擬球面のパラメータ曲線は振率一定の空間曲線となる.

次章に移る前に, K 曲面の性質のうち興味深い性質の一つを紹介する. この性質は, Wallner による半離散 K 曲面の定式化において鍵を握る. 詳細は [17] を参照.

定理 2.2. $p(u, v)$ を漸近 Chebyshev 網でパラメータ表示された K 曲面とする. このとき u 曲線, v 曲線はそれぞれ振率 τ が (0 でない) 一定の空間曲線となり, $p(u, v)$ のガウス曲率 K は $K = -\tau^2$ をみたす. 逆に, 振率 τ が一定の空間曲線 $\gamma(s)$ が与えられたとき, sine-Gordon 方程式による振率一定曲線の振率を保つ等周変形により, K 曲面 $\gamma(s, t)$ を復元できる.

3 半離散 K 曲面

3.1 離散 K 曲面の概要と最近の進展

本題に入る前に, 離散 K 曲面の研究の背景について簡単に述べる. 離散ガウス曲率負一定曲面は, Wunderlich [21] によって幾何的に自然な設定で枠組みのもとで定式化された. この理論が導出された当時は, 可積分系との繋がりには特に考えられていなかった. これとは独立して, 広田 [5] により離散 sine-Gordon 方程式が導出されているが, 離散 K 曲面との繋がりには発見されていなかった. Bobenko, Pinkall [1] は, 離散 K 曲面の可積分条件が, [5] の離散 sine-Gordon 方程式 (正確には, 係数を一般化したもの) となることを示した. この研究を契機として, 可積分性を保つ, 曲線と曲面の微分幾何の離散化が活発に行われている.

離散 K 曲面に関連した最近の研究の進展についても簡単に述べておく．定理 2.2 の離散版，つまり振率一定の離散曲線の離散等周変形が井ノ口, 梶原, 松浦, 太田 [7] によって与えられた．振率を保つ離散等周変形は，離散 mKdV 方程式によって変形させるか，あるいは離散サイン・ゴールドン方程式によって変形させるかを自由を選択することができる．この変形により得られる離散空間曲線の変形列は，離散 K 曲面となることが [7] によって示されている．これは離散的な場合に起こりうる現象で，離散曲線と離散曲面の数学研究が，単になめらかな微分幾何学の離散アナロジーではないことを示唆している．

3.2 半離散 K 曲面の定式化

ここから本題である，Wallner による半離散 K 曲面の理論を概説する．半離散曲面 $x(k, t)$ とは，

$$\begin{array}{ccc} x: \mathbb{Z} \times \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \Psi & & \Psi \\ (k, t) & \mapsto & x(k, t) \end{array}$$

を指す． x の像は $\mathbb{R}^3$ 内の曲線の列となるが，各 $k \in \mathbb{Z}$ に対して，区分的な線織面

$$R_k(s, t) := y(s, t) = (1 - s)x(k, t) + sx(k + 1, t) \quad (s \in [0, 1], t \in \mathbb{R})$$

を描き，半離散曲面を区分的な線織面の貼り合わせとして可視化する（図 2 参照）．

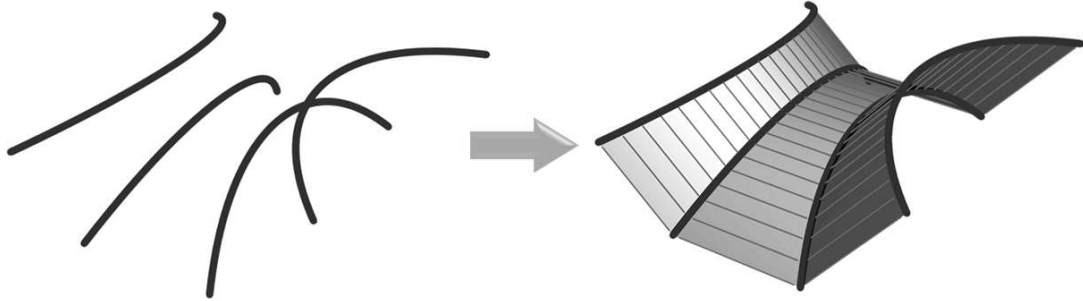


図 2: 半離散曲面の可視化．区分的な線織面 $R_k(s, t)$ の貼り合わせにより，半離散曲面を可視化する．

まずは記号を整理する．本稿では，

$$\begin{aligned} x &= x(k, t), \quad x_1 := x(k + 1, t), \quad x_{\bar{1}} := x(k - 1, t) \\ \partial x &:= \frac{d}{dt} x(k, t), \quad \partial^2 x := \frac{d^2}{dt^2} x(k, t), \quad \Delta x := x_1 - x, \quad \Delta x_{\bar{1}} := x - x_{\bar{1}} \end{aligned}$$

と表す．なめらかな場合， K 曲面は A 曲面であることから，半離散的な場合においても，半離散 K 曲面を半離散 A 曲面の特別な例として取り扱う．連続的な場合を参照し，半離散 A 曲面を以下のように定義する．

定義 3.1. 半離散曲面 $x(k, t)$ が半離散 A 曲面であるとは、任意の $(k, t) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ に対して、 $\partial x, \partial^2 x, \Delta x, \Delta x_{\bar{1}}$ が同一平面上にあることをいう。

この定義は自然なものである。なめらかな場合、 A 曲面 $p(u, v)$ が $L = N = 0$ をみたすので、 p_u, p_v, p_{uu}, p_{vv} が同一平面上に含まれることを意味する。 p_v, p_{vv} をそれぞれ

$$\frac{p(u, v + \delta) - p(u, v)}{\delta} \quad (\text{前進差分})$$

$$\frac{\frac{p(u, v + \delta) - p(u, v)}{\delta} - \frac{p(u, v) - p(u, v - \delta)}{\delta}}{\delta} = \frac{p(u, v + \delta) - 2p(u, v) + p(u, v - \delta)}{\delta^2} \quad (\text{二階微分の中心差分})$$

で置き換え、 $\delta = 1$ を代入する。すると、4つのベクトル

$$p_u, p_{uu}, p(u, v + \delta) - p(u, v), p(u, v + 1) - 2p(u, v) + p(u, v - 1)$$

が同一平面上にある、とみなせる。これが半離散 A 曲面の定義の由来である¹。

次に半離散 K 曲面を定義する²。これは K 曲面が A 曲面かつ漸近 Chebyshev 網でパラメータ表示されるという性質を反映している。詳しくは定理 2.2 前の注意を参照。

定義 3.2. 半離散 A 曲面 $x(k, t)$ が

$$\Delta \|\partial x\| = \partial \|\Delta x\| = 0$$

をみたすとき、 $x(k, t)$ を半離散 K 曲面という。

この定義のもとで、次の性質が成り立つ。これは定理 2.2 にあたる性質であり、この性質の後半部分は、[20] における半離散 K 曲面の定義で与えられた条件と一致する。なお、各 $k \in \mathbb{Z}$ を固定して $x(k, t)$ を $\mathbb{R}^3$ 内の正則曲線として考えるときは、 $x(k, t) = x_k(t)$ と表す。

定理 3.1. $x(k, t)$ を半離散 K 曲面とする。 $k \in \mathbb{Z}$ を固定し、各正則曲線 $x_k(t)$ の振率を τ_k とおくと、 τ_k は k によらず一定となる。さらに、半離散 A 曲面が半離散 K 曲面であるための必要十分条件は、 τ_k が k によらず一定となることである。

注意. k でなく t を固定すると、各 $t \in \mathbb{R}$ に対して、 $x(k, t)$ ($k \in \mathbb{Z}$) は離散曲線となる。この離散曲線の振率が一定となるかどうかは、著者は確認していない。離散曲線の振率の定義については、例えば [7], [9] の定義を採用して計算することを課題として挙げたい。

次に半離散 A 曲面に対するルリユーヴルベクトル場を定義する。

定義 3.3. $x(k, t)$ を $\det(\partial x, \Delta x, \partial x_1 - \partial x) > 0$ をみたす半離散 A 曲面とし、

$$n(k, t) := \frac{\partial x \times \Delta x}{\det(\partial x, \Delta x, \partial x_1 - \partial x)^{\frac{1}{2}}}$$

を $x(k, t)$ のルリユーヴルベクトル場という。

¹ 離散 A 曲面も同様に定義できる。詳細は [1], [2] 参照。

² 本稿では [20] とは異なる形で半離散 K 曲面を定義している。これは離散 K 曲面の定義との統一性を持たせることを目的としている。

定義より、ルリユーヴルベクトル場が以下の関係式を満たすことを直ちに確認できる：

$$\partial x = n \times \partial n, \quad \Delta x = -n \times \Delta n$$

この性質は、なめらかな場合のルリユーヴルベクトル場がみたす性質の半離散版であると解釈できる（なめらかな場合は [17] 参照）．特に、半離散 K 曲面に対しては次が成り立つ．

命題 3.1 (Lemma 3.1.1, Theorem 3.1.2, [20]). 次の二つが成り立つ．

- $x(k, t)$ を半離散 K 曲面とすると, $\|n(k, t)\|$ は一定．
- $x(k, t)$ を半離散 K 曲面とすると, $\Delta\|\partial n\| = \partial\|\Delta n\| = 0$ をみたす．

ここまでのもと、半離散 K 曲面と [15], [16] の半離散 sine-Gordon 方程式との関係を述べる．半離散 K 曲面の定義より、任意の $k \in \mathbb{Z}$ に対し、 $\|\partial x(k, t)\| = 1$ としても一般性を失わない．また定理 3.1 より、 τ_k は定数となり、さらに $\|n(k, t)\| = \ell^2$ ($\ell > 0$ は定数)．命題 3.1 の二つ目の性質より、

$$\partial\|\Delta n\|^2 = \partial(2 - 2\langle n_1, n \rangle) = 0$$

したがって n と n_1 がなす角は t によらない．そこで、 $\alpha(k) := \cos^{-1}(\ell^{-2}\langle n, n_1 \rangle)$ とおく．同様に半離散 K 曲面の定義より、以下の等式で定義される関数 φ を考える：

$$\varphi := \cos^{-1} \frac{\langle \partial x, \Delta x \rangle}{\|\partial x\| \|\Delta x\|} = \cos^{-1} \frac{\langle \partial x_1, \Delta x \rangle}{\|\partial x_1\| \|\Delta x\|}$$

ここで、 $x_k(t)$, $x_{k+1}(t)$ の Frenet 枠をそれぞれ $\{e^1, e^2, e^3\}$, $\{e_1^1, e_1^2, e_1^3\}$ とおくと、 $e^1 = \partial x$, Δx , $e^2 = \frac{\partial^2 x}{\|\partial^2 x\|}$ を含む平面と、 $e_1^1 = \partial x$, Δx , $e_1^2 = \frac{\partial^2 x_1}{\|\partial^2 x_1\|}$ を含む平面の共通部分が Δx を含む直線となることから

$$\frac{\Delta x}{\|\Delta x\|} = \cos \varphi e^1 + \sin \varphi e^2 = \cos \varphi e_1^1 + \sin \varphi e_1^2 \quad (6)$$

と表せる．ここで、 e^3 , e_1^3 のなす角が $\alpha(k)$ となり、ルリユーヴルベクトル場 n は e^3 のスカラー倍、特に $(n, n_1) = \pm \ell(e^3, e_1^3)$ と表せるから、 $\langle e^3, e_1^3 \rangle = \cos \alpha(k)$ となる．ここで、

$$r = -\sin \varphi e^1 + \cos \varphi e^2, \quad r_1 = -\sin \varphi e_1^1 + \cos \varphi e_1^2$$

とおくと、 $\{r, e^3\}$, $\{r_1, e_1^3\}$ はそれぞれ Δx を含む直線に直交する平面の正規直交基底となる．すると

$$-\langle r_1, e^3 \rangle = \langle r, e_1^3 \rangle = \sin \alpha(k)$$

が成り立つ（図 3 参照）．ここで、 $x_k(t)$ の捩率を τ （一定）とおき、方程式 (6) を t で微分すると、空間曲線に対する Frenet-Serret の公式より

$$(\kappa_k(t) + \partial \varphi) r + \tau \sin \varphi e^3 = (\kappa_{k+1}(t) + \partial \varphi) r_1 + \tau \sin \varphi e_1^3$$

が得られる．ここで、 $\kappa_k(t)$ は曲線 $x_k(t)$ の曲率である．両辺と e^3 , e_1^3 との内積をそれぞれとると、次が得られる．

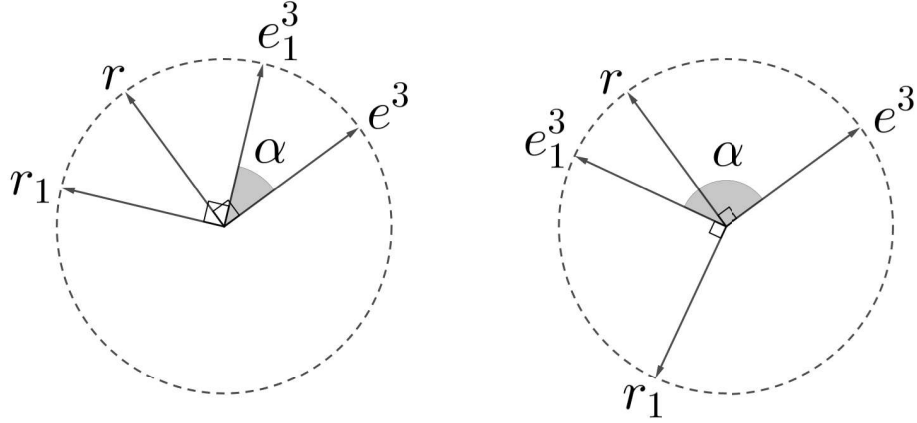


図 3: e^3, e_1^3, r, r_1 の配置. これらのベクトルは, Δx に直交する平面上に含まれる単位ベクトルとなる.

補題 3.1 (Theorem 3.3.1, [20]). $x_k(t)$ の曲率 $\kappa_k(t)$, $\alpha(k)$, $\varphi(k, t)$ は次をみます.

$$\kappa_{k+1}(t) + \kappa_k(t) = -2\partial\varphi(k, t), \quad \kappa_{k+1}(t) - \kappa_k(t) = -2\tau \sin \varphi(k, t) \tan \frac{\alpha(k)}{2} \quad (7)$$

さらに, $\varphi(k, t)$ は次をみます.

$$\partial\varphi(k+1, t) - \partial\varphi(k, t) = \tau \sin \varphi(k+1, t) \tan \frac{\alpha(k+1)}{2} + \tau \sin \varphi(k, t) \tan \frac{\alpha(k)}{2} \quad (8)$$

[20] では方程式 (8) を半離散 sine-Gordon 方程式と呼んでいるが, この形は他の文献ではあまり見られない. そこで, 方程式 (7) を変形し, 他の文献でも現れる半離散 sine-Gordon 方程式を導出する. 関数 $\psi(k, t)$ を

$$-\kappa_k(t) = \partial\psi(k, t), \quad \varphi(k, t) = \frac{1}{2}\{\psi(k+1, t) + \psi(k, t)\}$$

と定めると, $\psi(k, t)$ は方程式 (7) の第一式をみます. さらに第二式を計算することで次の結果が得られる.

定理 3.2 (Theorem 3.4.1, [20]). $x(k, t)$ を半離散 K 曲面とし, $\|\partial x(k, t)\| = 1$ と仮定する. $\kappa_k(t), \tau$ をそれぞれ $x_k(t)$ の曲率と振率, $\varphi(k, t), \alpha(k)$ を $x(k, t)$ とそのルリューヴルベクトル場 $n(k, t)$ から定まる関数とする. このとき

$$-\kappa_k(t) = \partial\psi(k, t), \quad \varphi(k, t) = \frac{1}{2}\{\psi(k+1, t) + \psi(k, t)\}$$

により定める関数 $\psi(k, t)$ が存在し, $\psi(k, t)$ は次の方程式をみます:

$$\partial\psi(k+1, t) - \partial\psi(k, t) = 2\tau \tan \frac{\alpha(k)}{2} \sin \frac{\psi(k+1, t) + \psi(k, t)}{2} \quad (9)$$

方程式 (9) を半離散 sine-Gordon 方程式という. 注目すべき点としては, これは [15], [16] の半離散 sine-Gordon 方程式の係数を一般的なパラメータに拡張したものとなっており, $\alpha(k)$ が k に

よらない定数であれば、従来の半離散 sine-Gordon 方程式と一致する。

本章の終わりに、半離散 sine-Gordon 方程式と最近の研究との関わりについて簡単に紹介する。半離散 sine-Gordon 方程式は、半離散 K 曲面だけでなく、離散曲線の振率を保つ連続的等周変形にも現れる ([8], [9] 参照)。この結果はカライドサイクルの構成に応用されており、工学研究でも大変興味深い研究対象である。さらに、半離散 sine-Gordon 方程式の明示解の研究も行われていることから ([10] 参照)、半離散 sine-Gordon 方程式の解を用いて、半離散 K 曲面を具体的に構成することが今後の課題として挙げられる。

4 終わりに

4.1 半離散 K 曲面のガウス曲率

本稿では K 曲面、半離散 K 曲面の研究について概説した。ここでは、筆者が取り組んでいる問題を紹介する。[20] では、半離散 K 曲面のガウス曲率を、空間曲線 $x_k(t)$ の振率を用いて定義している。この定義とは独立して、半離散曲面の曲率の概念が、Karpenkov, Wallner [11] によって導入され、さらにその一般化として、半離散曲面の型作用素の概念を用いることで、Carl [4] が半離散曲面の曲率を定義している。これは Hoffmann, Sagaman-Furnas, Wardetzky [6] の理論の半離散版であり、Carl は半離散極小曲面、半離散平均曲率一定曲面、およびそれらの随伴族の平均曲率を具体的に計算している。

現時点で最も一般的で、汎用性の高い曲率理論は、Carl によって与えられたものであり、その枠組みの中で半離散 K 曲面の曲率を解析することは、自然な問題である。Wallner [20] によるガウス曲率は各正則曲線 $x_k(t)$ 上で定義され、Carl [4] による曲率は、線分 $[x(k, t), x(k+1, t)]$ 上で定義される。これは Wallner によるガウス曲率が曲線 $x_k(t)$ の振率を用いて定義される一方、Carl による曲率は、線分上で定義される型作用素を用いて定義されることに起因する。したがってこれら 2 つの曲率の間には具体的な関係は存在せず、Wallner の意味でガウス曲率が負で一定だとしても、Carl の意味で負で一定になるとは限らない。我々が得た結果の一つは以下のものである。

定理 4.1 ([12]). $x(k, t)$ を半離散 K 曲面とする。このとき $x(k, t)$ の Carl [4] の意味でのガウス曲率 κ は $\kappa < 0$ をみtas。

注意として、 $x(k, t)$ のガウス曲率 κ は負であるものの、一定であるとは限らない。これは離散 K 曲面の場合にも起こりうることで ([6] 参照)、我々の結果はある意味で自然な結果であると言える。さらにこの結果はもう少し一般化することができる。定理 2.2 の前の注意でも述べた通り、なめらかな場合、 K 曲面が与えられると、 K 曲面の 1 パラメータ族を与えることができる。半離散的な場合も同様に半離散 K 曲面の 1 パラメータ族 x^λ が存在し、そのガウス曲率 κ^λ を計算できる ([12])。ただし、 x^λ のガウス曲率は、 λ の値によって変化することに注意。

4.2 半離散 K 曲面に関する問題

ここからは、半離散 K 曲面について考えうる問題をいくつか記述する。もし本稿を読まれた方で、興味があればご自身で取り組む、あるいは一緒に考えていただけると大変ありがたい。

一つ目の問題は、半離散 sine-Gordon 方程式に対するベックルンド変換である。[20] では、半離散 sine-Gordon 方程式に対するベックルンド変換が紹介されているが、導出の方法も含め、その詳細はほとんど書かれていない。ベックルンド変換により、半離散 sine-Gordon 方程式の既存の解から新たな解を生成できるだけでなく、新たな半離散 K 曲面の例を構成することができると期待される。実際、Wallner [20] は真空解から新たな解を生成することで、半離散擬球面を構成している。その一方、現時点で構成されている半離散 K 曲面は半離散擬球面だけなので、ベックルンド変換を用いることで、図 4 にあるクエン曲面の半離散版を構成するのが目下の課題である。また、半離散 sine-Gordon 方程式のベックルンド変換についても可換性（ビアンキの可換律）が成り立つことが期待される。これが示せれば、より複雑な半離散 K 曲面の構成が可能となる。

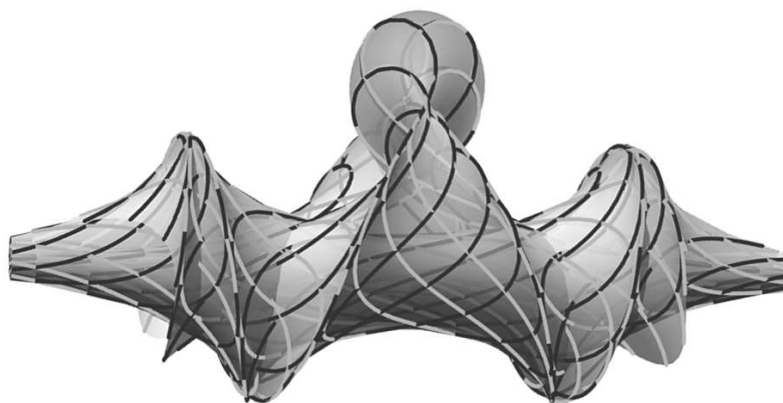


図 4: クエン曲面の概形。クエン曲面は、擬球面にベックルンド変換を施すことによって得られる。

二つ目の問題は、半離散 K 曲面のラックス対を導出することである。本稿では記述していないが、なめらかな場合と離散的な場合、 K 曲面と離散 K 曲面に対する 2 のラックス対が導出されており、ラックス対の可積分条件から sine-Gordon 方程式、離散 sine-Gordon 方程式が得られる。また [4] では、半離散平均曲率一定曲面に対する 2 のラックス対を用いて、半離散 sinh-Gordon 方程式を導出している。これらの研究を研究を踏まえると、半離散 K 曲面についても同様の議論を展開できると期待できる。これは単に半離散 sine-Gordon 方程式を簡単に導出するだけでなく、ラックス対の解から半離散 K 曲面を構成することにも繋がる。具体的には、ラックス対の解を Sym の公式 [18] に当てはめることで、半離散 K 曲面とその 1 パラメータ族を構成できるはずである。関連して、梶原, 重富, 宇田川 [10] による半離散 sine-Gordon 方程式の明示解は、新たな半離散 K 曲面の構成にも応用できると期待される。

半離散曲面の微分幾何の数学研究は約 15 年前に始まったばかりであり、研究すべき内容が多く残されている。半離散 K 曲面からは話題が離れるが、双等温曲面（共形かつ曲率線座標でパラメータ表示される曲面）の半離散化が Müller, Wallner [14] によって定式化され、そのサブクラスである半離散平均曲率一定曲面が [13] において詳しく調べられている。その後、半離散双等温曲面の理論は、曲線のダルブー変換を用いて再定式化され、今では 3 次元リーマン空間型内の半離散双等温曲面を考えることができる。詳しくは [3] を参照されたい。半離散双等温曲面まわりの問題も多くあるのだが、本稿ではこれ以上取り上げないことにする。

謝辞

RIMS 共同研究（公開型）「部分多様体と離散化の幾何学」にて講演の機会を与えてくださった、世話人の直川耕祐先生にこの場をお借りして御礼申し上げます。本研究の一部は、京都大学数理解析研究所国際共同利用・共同研究拠点および大阪公立大学数学研究所（文部科学省共同利用・共同研究拠点「数学・理論物理の協働・共創による新たな国際的研究・教育拠点」JPMXP0723833165）の助成を受けております。

参考文献

- [1] A.I. Bobenko and U. Pinkall, *Discretization of surfaces and integrable systems*, Oxford Lecture Ser. Math. Appl. **16**. Oxford Univ. Press (1998). 3-58.
- [2] A.I. Bobenko and Y. Suris, *Discrete differential geometry, integrable structure*, Graduate Textbooks in Mathematics 98, A.M.S., 2008.
- [3] F. E. Burstall, U. Hertrich-Jeromin, C. Müller and W. Rossman, *Semi-discrete isothermic surfaces*, Geom. Dedicata **183** (2016) 43-58.
- [4] W. Carl, *On semidiscrete constant mean curvature surfaces and their associated families*, Monatsh Math **182** (2017), 537–563.
- [5] R. Hirota, *Nonlinear partial difference equations III discrete sine-Gordon equation*, J. Phys. Soc. Japan **43** (1977), 2079-2086.
- [6] T. Hoffmann, A.O. Sageman-Furnas and M. Wardetzky, *A discrete parametrized surface theory in $\mathbb{R}^3$* , Int. Math. Res. Not. IMRN **2017**, no. 14, 4217-4258.
- [7] J. Inoguchi, K. Kajiwara, N. Matsuura and Y. Ohta, *Discrete mKdV and discrete sine-Gordon flows on discrete space curves*, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **47** (2014), 235202.
- [8] S. Kaji, K. Kajiwara and H. Park, *Linkage mechanisms governed by integrable deformations of discrete space curves*, In: Nonlinear systems and their remarkable mathematical structures. Chapman and Hall/CRC (2019), 356-381.
- [9] S. Kaji, K. Kajiwara and S. Shigetomi, *An explicit construction of Kaleidocycles by elliptic theta functions*, preprint.
- [10] K. Kajiwara, S. Shigetomi and S. Udagawa, *Simple and explicit constructions of semi-discrete surfaces and discrete surfaces*, preprint.
- [11] O. Karpenkov and J. Wallner, *On offsets and curvatures for discrete and semidiscrete surfaces*, Beitr. Algebra Geom. **55** (2014), 207-228.

- [12] S. Morikita and M. Yasumoto, work in progress.
- [13] C. Müller, Semi-discrete constant mean curvature surfaces, *Math. Z.* **279** (2015), 459-478.
- [14] C. Müller and J. Wallner, Semi-discrete isothermic surfaces, *Results Math.* **63** (2013), 3-4, 1395-1407.
- [15] S.J. Orfanidis, *Discrete sine-Gordon equations*, *Phys. Rev. D*, **18** (1978), 3822-3827.
- [16] S.J. Orfanidis, *Sine-Gordon equation and nonlinear σ model on a lattice*, *Phys. Rev. D*, **18** (1978), 3828-3832.
- [17] C. Rogers and W.K. Schief, *Bäcklund and Darboux Transformations: Geometry and Modern Applications in Soliton Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [18] A. Sym, *Soliton surfaces and their applications (soliton geometry from spectral problems)*, In: Martini, R. (eds) *Geometric Aspects of the Einstein Equations and Integrable Systems. Lecture Notes in Physics*, vol 239.(1985), 154-231,
- [19] 梅原雅顕, 山田光太郎, 曲線と曲面 (改訂版) -微分幾何的アプローチ, 裳華房 (2015).
- [20] J. Wallner, *On the semidiscrete differential geometry of A-surfaces and K-surfaces*, *J. Geometry* **103** (2012), 161-176.
- [21] W. Wunderlich, *Zur Differenzengeometrie der Flächen konstanter negativer Krümmung*, *Sitz. Öst. Ak. Wiss.* **160** (1951), 41-77.