

純圧縮トラス構造と離散 S-isothermic 曲面

東洋大学・情報連携学部 軸丸芳揮

Yoshiki Jikumaru

Faculty of Information Networking for Innovation And Design

Toyo University

概要

望ましい力学的特性を実現する、四辺形を基本とする純圧縮トラス構造の生成に、S-isothermic 曲面が有効に用いられることを示し、形状生成手法の例を紹介する。本稿の内容は、横須賀洋平氏 (鹿児島大学), 林和希氏 (京都大学), 早川健太郎氏 (日本大学), 梶原健司氏 (九州大学) との共同研究に基づく。

1 イントロダクション

本稿のテーマのスタート地点は「Michell 構造 [5]」と呼ばれる対象である。元来は汎函数

$$\sum_{\text{部材}} (\text{部材の長さ}) \times (\text{部材にかかる軸力の大きさ}), \quad (1.1)$$

の「最小解」として得られる片持ち梁の構造を指す (図 1)。この構造のもつ顕著な性質は

$$(\text{部材の長さ}) \times (\text{部材にかかる軸力の大きさ}) = (\text{定数}), \quad (1.2)$$

という関係式にある。そこで本稿では、この関係式を満たすトラス構造を **Michell-Prager 型構造**とよぶことにする [7]。Michell-Prager 型構造は、辺に $\pm$ の符号をつけた汎函数の臨界点となる (σ は水平方向に $+$, 鉛直方向に $-$ の符号を割り当てる函数) :

$$\sum_{\text{部材}} \sigma(\text{部材}) \log |\text{部材の長さ}|. \quad (1.3)$$

建築構造の観点からは、汎函数の見た目こそ異なるものの、初期張力が導入可能なケーブルネット構造 (重み付き Dirichlet エネルギーの臨界点) の亜種とみなされる。一般に Michell-Prager 型構造は、離散 isothermic 曲面の“対角線”から構成することができる。ここで四辺形からなる離散曲面が isothermic であるとは、各四辺形が複比方程式を満たすときをいう。離散 isothermic 曲面の対角線からなる構造に対し、性質 (1.2) が満たされるこ

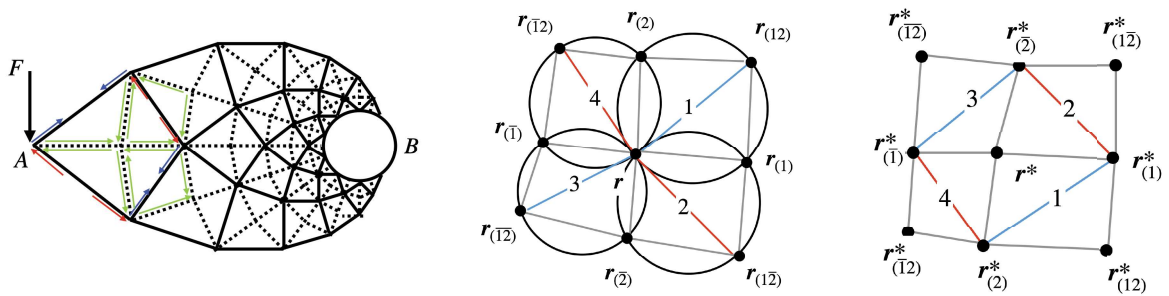


図 1: 左図：Michell-Prager 型構造．点線の四辺形は離散指数函数．中央図：形状図式．右図：釣り合い図式．

とは [2] の系 4.33 で示されている結果から従う．このとき，対応する離散 Christoffel 変換は「部材に作用する力の釣り合い図式」と解釈される (図 1 参照)．特に離散指数函数から生成した構造は「各離散曲線が離散対数螺旋」となり，離散対数螺旋は離散対数型美的曲線 (dLAC) であるという意味である種の“美的性”をもつ [3, 4]．Michell-Prager 型構造を調べる中で，以下のような「問題」が挙げられた：

別の荷重条件下での特性も調べられないか．特に，すべての部材に圧縮力が作用して釣り合う構造 (純圧縮構造) というテーマに関連付けられないか．

例を通じた「実験」を行う中で，以下の実験報告および疑問点が挙げられた：

- ・ 形状は「離散曲率線網 (circular net)」であることが望ましい．
- ・ 部材に作用する軸力の大きさが，外接円の中心を結ぶ線分の長さ (の定数倍) に等しい．
- ・ 力の釣り合い図式は “Koenigs net” の条件を満たすのではないかな？ これは，応力の (過度な) 集中を避けるという観点から重要な条件である．
- ・ 変分原理による統制が期待できないかな？

本稿ではこれらを数学的に整理し，以下の「主定理」を示す：

“主定理”．以上の要請を満足するトラス構造の生成のためには，S-isothermic 曲面を利用すれば実現可能である．

2 釣り合い条件と変分原理：cotan 公式 [6]

まず「部材に作用する軸力の大きさが，外接円の中心を結ぶ線分の長さ (の定数倍) に等しい」という条件を整理する．この条件は，本質的に論文 [6] の 5 節で紹介されている．いま，

J を平面上の 90° 回転とすると、簡単な計算で以下の関係式が確かめられる (図 2 参照) :

$$\mathbf{w}_1 = \frac{1}{2} \cot \beta_i J \mathbf{v}, \quad \mathbf{w}_2 = \frac{1}{2} \cot \alpha_i J \mathbf{v}, \quad \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = \frac{1}{2} (\cot \alpha_i + \cot \beta_i) J \mathbf{v}. \quad (2.1)$$

したがって、各頂点まわりでの力の釣り合い条件は

$$\frac{1}{2} \sum_{q_i \sim p} (\cot \alpha_i + \cot \beta_i) (p - q_i) = 0. \quad (2.2)$$

ここで、和は p に隣接する頂点 q_i すべてにわたってとる。いま、単体的曲面間の写像 f の離散 Dirichlet エネルギー [6] は

$$E(f) = \frac{1}{4} \sum_{pq_i} (\cot \alpha_i + \cot \beta_i) |f(p) - f(q_i)|^2, \quad (2.3)$$

で計算され、 $f = \text{id}$ のとき、エネルギー勾配は

$$\frac{\partial E}{\partial p} = \frac{1}{2} \sum_{q_i \sim p} (\cot \alpha_i + \cot \beta_i) (p - q_i), \quad (2.4)$$

となることから、釣り合い条件式は (cotan weight をもつ) 離散調和函数となる。なお、面積汎函数の臨界点として記述することも可能であり、図 2 からわかるように

$$(\text{部材の長さ}) \times (\text{部材に作用する軸力の大きさ}) = 2 \times (\text{面積}), \quad (2.5)$$

という関係が成り立っている。ここで面積とは、点 p, q_i と外接円の中心からなる四辺形の面積を指す。Michell-Prager 型構造においても左辺は重要な量であった。

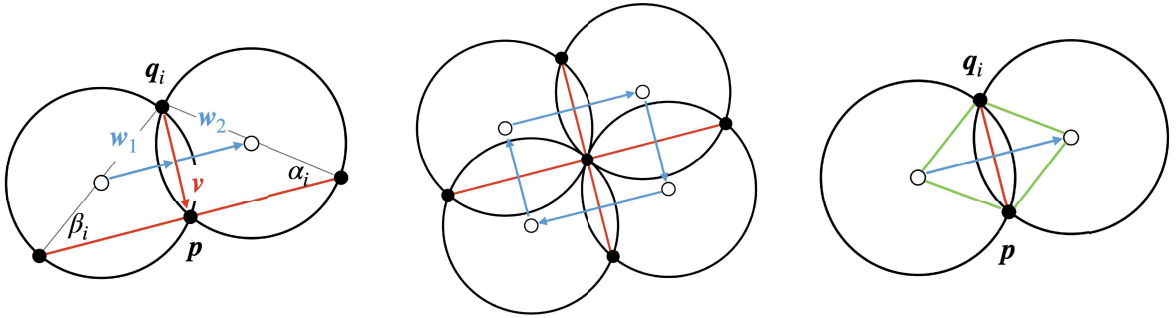


図 2: 各点まわりでの力の釣り合い条件.

3 離散曲率線網, conical 網, 離散 Koenigs 網 [2]

次に離散曲率線網および関連する概念を整理する。平面格子 $\mathbb{Z}^2 = (V(\mathbb{Z}^2), E(\mathbb{Z}^2))$ に対し、その $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ への実現 $\mathbf{r} : V(\mathbb{Z}^2) \rightarrow \mathbb{R}^2$ を考え、シフト記号を以下のように設定する :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(n, m), \quad \mathbf{r}_{(1)} = \mathbf{r}(n+1, m), \quad \mathbf{r}_{(2)} = \mathbf{r}(n, m+1), \quad \mathbf{r}_{(12)} = \mathbf{r}(n+1, m+1). \quad (3.1)$$

定義 3.1. 以下の用語を導入する：

- $\mathbf{r}$ が離散共役網 (discrete conjugate net, Planar Quadrilateral (PQ) mesh) であるとは、各四辺形 $\{\mathbf{r}, \mathbf{r}_{(1)}, \mathbf{r}_{(12)}, \mathbf{r}_{(2)}\}$ が同一平面上にあるときをいう.
- $\mathbf{r}$ が離散曲率線網 (discrete curvature net, circular net) であるとは、各四辺形 $\{\mathbf{r}, \mathbf{r}_{(1)}, \mathbf{r}_{(12)}, \mathbf{r}_{(2)}\}$ が同一円周上にあるときをいう.

離散曲率線網の条件は、数学的には「4 点の複比が負の実数」という観点が重要である一方、建築構造分野においては「頂点における厚み方向を考える上で振る舞いがよい」という意味で重要である. さらに $\mathbf{r} : V(\mathbb{Z}^2) \rightarrow \mathbb{R}^2$ が conical 網であるとは、各頂点まわりの角度 $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ に対して

$$\omega_1 + \omega_3 = \omega_2 + \omega_4 = \pi, \quad (3.2)$$

が成り立つときをいう (図 3 参照). 平面上の離散曲率線網と conical 網には以下の対応関係がある：

補題 3.2. 平面上の離散曲率線網に対し、その外接円の中心を結んでできる離散曲面は conical 網である.

また「応力の (過度な) 集中を避ける」という観点で重要な離散 Koenigs 網と呼ばれる条件は、下記の特徴づけをもつ：

補題 3.3 ([2], p. 52). 離散共役網が離散 Koenigs 網となるためには、各点において

$$\frac{\delta_1}{\beta_1} \cdot \frac{\delta_2}{\beta_2} \cdot \frac{\delta_3}{\beta_3} \cdot \frac{\delta_4}{\beta_4} = 1, \quad (3.3)$$

が成り立つことが必要十分である (図 3 参照).

なお、複比に関する条件に注意する必要があるが、離散曲率線網かつ離散 Koenigs 網であれば離散 isothermic であることが示される.

4 要請を満たすトラス構造の生成：S-isothermic 曲面

本節では、先の要請を満足するトラス構造を実現するためには、S-isothermic 曲面と呼ばれる対象が有効であることを示す. S-isothermic 曲面は以下の簡単な特徴づけをもつ：

命題 4.1 ([1], p.241). 四辺形からなる離散曲面が S-isothermic となるためには、各四辺形に内接円が存在し、その各々が辺上で接することが必要十分である.

なお、S-isothermic 曲面そのものは、一般の多角形からなる曲面に対しても定義できることを注意しておく. 内接円の存在は、以下のように、接点を通る別の円の存在を示す：

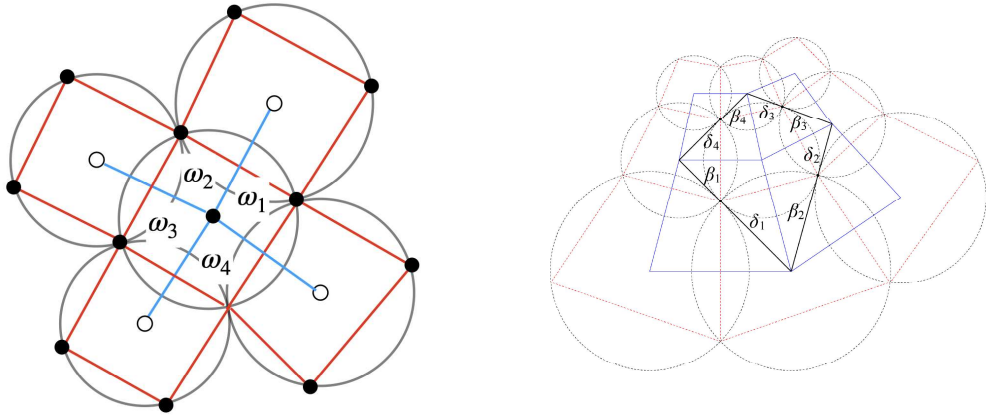


図 3: 左図 : conical 網の条件. 右図 : 離散 Koenigs 網の条件.

補題 4.2 (Touching coins lemma). 4 つの円が反時計周りに番号付けられているとき, 隣接する番号同士の円が接するならば, 4 接点を通る円が存在する.

さらに S-isothermic 曲面の頂点と内接円の中心からなる離散曲面は自然に複比方程式を満たし, 離散 isothermic 曲面であることが確かめられる (図 4 参照).

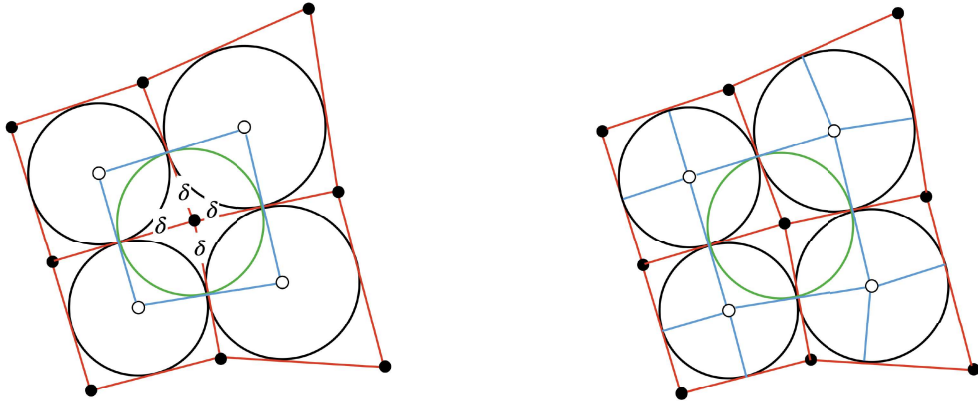


図 4: 左図 : Touching coins lemma. 右図 : 内接円の中心を利用した分割で得られる離散曲面は複比方程式を満たす (したがって isothermic).

図 5 は, S-isothermic 曲面の対角線をとることで, 所望の性質を満たす形状, および釣り合い図式を構成する方法を示している. 構成方法から明らかなように, 形状図式は離散曲率線網である. さらに釣り合い図式は, 外接円の中心を結んでできる conical 網であり, $\delta_i = \beta_{i+1}$, $i = 1, 2, 3, 4$ が成り立つので, 釣り合い図式は離散 Koenigs 網の条件を満たす (ただし $\beta_5 = \beta_1$ とみなす). 以上により, S-isothermic の構成方法を与えることが, 所望の性質を満たす構造の生成につながるということがわかった. 次節では, このような形状生成の事例について紹介する.

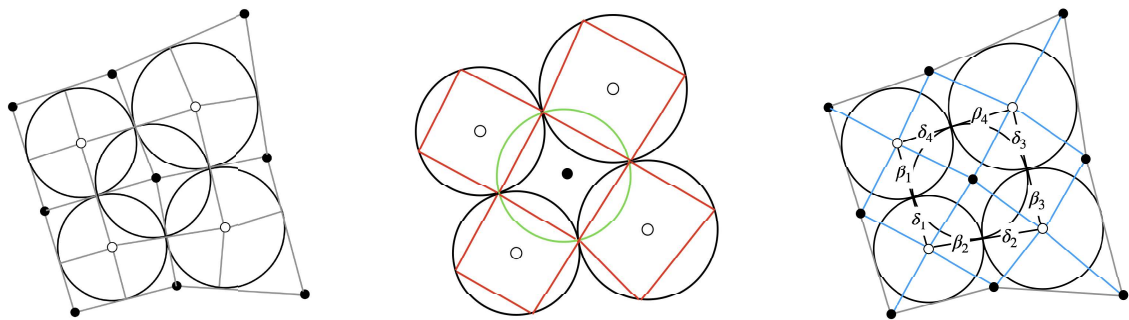


図 5: 対角線をとって得られる構造. 中央図: 形状図式は離散曲率線網 (ただし isothermic とは限らない). 右図: 釣り合い図式は conical 網かつ離散 Koenigs 網である.

5 形状生成手法

まず, 境界曲線が与えられたとき, パラメータを指定して S-isothermic 曲面を生成する素朴な方法を提案する (図 6, 7 参照).

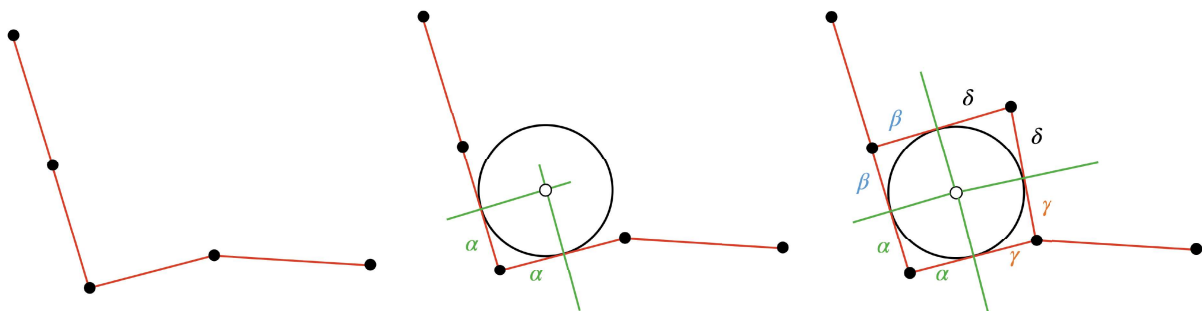


図 6: 内接円同士が接する四辺形を構成する手順 1

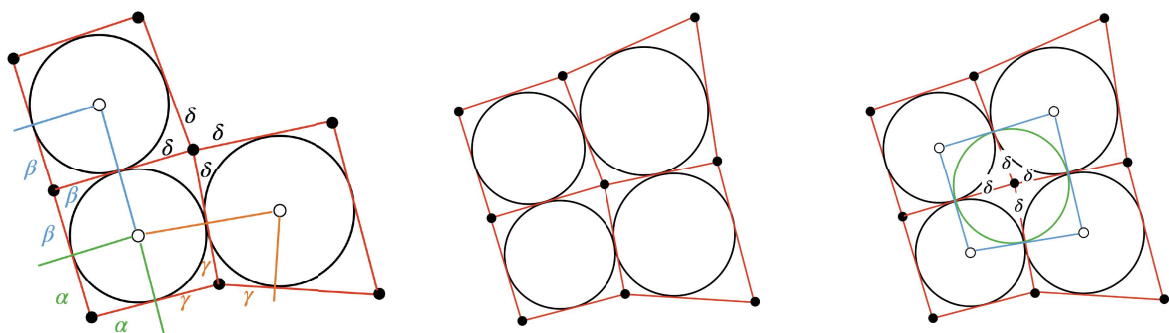


図 7: 内接円同士が接する四辺形を構成する手順 2

- 2 方向に境界曲線を与え, 最初に円が接する場所を決めるパラメータ α を与える.

- 初期点から長さ α の位置に垂線を引き、交点を円の中心として、境界に接するように円を描く。
- いま描いた円を内接円とする四辺形を描き、内接円の中心から各辺に垂線を引く。
- このとき β, γ, δ が定まり、これらは次の円が接する場所を定める。
- 例えば γ は水平方向の次のパラメータを定め、先の α と同様にして境界から垂線を引く。先に内接円の中心から引いた垂線との交点が次の内接円の中心を与える。
- この操作を繰り返すことにより、パラメータ α のみから形状が決定される。

次に実際の生成について例を紹介するが、複比方程式は境界条件に対して非常に敏感であるため、適当に境界形状を設定してしまうと「きれいな」形状が得られない (図 8 の左図参照)。これは境界曲線を定める方程式が、複比方程式と整合する必要があることに由来する。そこで、本稿で紹介する例は、境界曲線を「離散対数型美的曲線 (dLAC)」と呼ばれる対象に限定する [4]。これは、Mihcell-Prager 型構造の文脈でも自然に現れる曲線クラスであり、

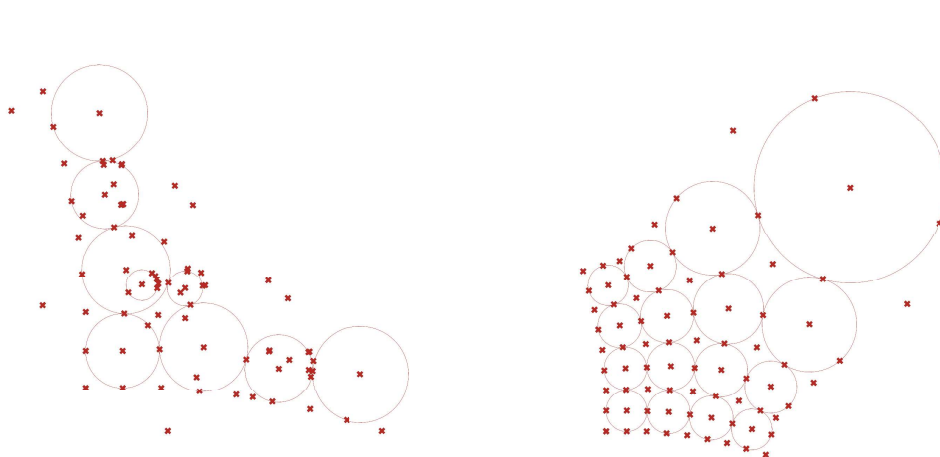


図 8: 境界曲線から内部を決定する例. 左図: 適当なパラメータでは「きれいな」形状は得られない. 右図: 最適化により「きれいな」形状を生成するパラメータが得られる.

曲線を決定するパラメータが少ないことなど、様々な観点から非自明な例として重要であると考えられる。さらに生成されるトラスの「力の釣り合い条件」を背景条件として、dLAC のパラメータの最適化を行うことで「きれいな」形状を得ることができる。ここで「曲線を決定するパラメータが少ない」という特性が「最適化のしやすさ」に繋がることを注意しておく。図 8 の右図で示した例が、境界曲線を dLAC とし、パラメータの最適化を行うことで「きれいな」形状を得た例である。dLAC の形状を定めるパラメータは境界の「開き具合」を与えるものである。なお、初期形状が図 8 の左図のような状態であっても、ほとんどの場合は「きれいな形状」を与えるパラメータが見つかることが確認されている。

6 結論

本稿では、四辺形を基本とする純圧縮トラス構造に課せられる要請を整理し、S-isothermic 曲面が有効に用いられることを示した。このような分野間連携によって、車の両輪のように互いの研究分野を深化させてゆくことも、数学の一つのあり方である。今後の展望として、空間構造への持ち上げや、変換による不変性といった構造設計上の問題もさることながら、同時に「様々な力学特性を満足する構造を記述するための幾何学」という観点から、数学的に（離散）微分幾何学を研究することも大きなテーマである。

参考文献

- [1] A. I. Bobenko, T. Hoffmann, and B. A. Springborn, *Minimal surfaces from circle patterns: Geometry from combinatorics*, Ann. of Math. **164** (2006), no. 1, 231–264.
- [2] A. I. Bobenko and Y. B. Suris, *Discrete differential geometry integrable structure*, Amer. Math. Soc., 2009.
- [3] K. Hayashi, Y. Jikumaru, Y. Yokosuka, K. Hayakawa, and K. Kajiwara, *Parametric generation of optimal structures through discrete exponential functions: unveiling connections between structural optimality and discrete isothermicity*, Struct. Multi-disc. Optim. **67** (2024), no. 41.
- [4] J. Inoguchi, Y. Jikumaru, K. Kajiwara, K. T. Miura, and W. K. Schief, *Log-aesthetic curves: Similarity geometry, integrable discretization and variational principles*, Comput. Aided Geom. Des. **105** (2023).
- [5] A. G. M. Michell, *The limits of economy of material in frame-structures*, The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science **8** (1904), no. 47, 589–597.
- [6] U. Pinkall and K. Polthier, *Computing discrete minimal surfaces and their conjugates*, Experimental Mathematics **2** (1993), no. 1, 15–36.
- [7] W. Prager, *Optimal layout of cantilever trusses*, J. Optim. Theory Appl. **23** (1977), 111–117.

謝辞

本研究は JST CREST JPMJCR1911, JSPS KAKENHI Grant Number JP24K16924 および 2023 年度井上円了記念助成の支援を受けた。

Faculty of Information Networking for Innovation And Design
Toyo University
Akabanedai, Kita-ku, Tokyo, 115-8650
JAPAN
E-mail address: jikumaru@toyo.jp