# 離散外積解析の mimetic 離散化としての実現について

芝浦工業大学デザイン工学部 廣瀬三平
Sampei Hirose
College of Design Engineering,
Shibaura Institute of Technology

## 1　はじめに

離散微分幾何学のひとつとして, 微分形式の離散化を考えるものがある. 例えば, Wilson の研究 [10] や本稿で扱う離散外積解析 [5, 3] などである. これらの研究では, 多様体の分割から定まるコチェインを離散微分形式と考えることは共通であるが, 離散微分形式に対する内積などの演算の入れ方が異なっている. Wilson の研究では, Whitney 写像を用いて離散微分形式を補間することにより, もとの多様体の微分形式に対する演算から離散微分形式に対する演算を構成している. この研究は Whitney[9] や Dodziuk-Patodi[4] をさらに発展させたものであり, 誤差評価などの様々な数学的性質が調べられている. また, このことは有限要素法による数値計算法を導出するための枠組みである有限要素外積解析 [1] と密接に関係している. Bochev-Hyman[2] による mimetic 離散化は, このような補間によって離散微分形式に対する演算を構成する枠組みを一般化したものである.

一方, 離散外積解析では, 分割の双対を用いることにより離散微分形式に対する演算を構成する. 離散外積解析はデジタル幾何処理やコンピュータグラフィックスなどへの応用が進められているが, その数学的性質の考察は発展途上であり, 多くは数値的な考察が行われているのみである. 数学的に扱っているものとして, 離散外積解析で用いられるノルムについて考察した Satoh-Yaguchi[6], および Poisson 方程式に離散外積解析を適用して得られる近似解ともとの方程式の解との誤差評価について考察した Schulz-Tsogtgerel[7] を挙げておく.

本稿では, 離散微分形式の基本的な考え方を説明したのちに mimetic 離散化, および離散外積解析について述べる. ここで, 離散外積解析での演算は mimetic 離散化とは異なる構成方法であるが, mimetic 離散化として捉えられるかを問うのは自然な疑問である. このことについて, 本稿の最後に多様体が 2 次元の場合には離散外積解析における内積が mimetic 離

散化として構成できることについて述べる．

本稿は2024年度に数理解析研究所で開催されたRIMS研究集会「部分多様体と離散化の幾何学」での講演をもとに作成したものである．このような機会を与えてくださった研究代表者である直川耕祐先生 (広島工業大学) に感謝申し上げます．

## 2 離散微分形式と mimetic 離散化

以下では $K$ は $\mathbb{R}^N$ の $n$ 次元単体複体とし, $K$ の幾何的実現 $M=|K|$ には $\mathbb{R}^N$ の標準計量から導かれる計量が定まっており, 向き付けられているとする．

**定義 2.1.** $K$ から定まる $k$ 次コチェインを $k$ 次離散微分形式といい, その全体の集合を $\Omega_d^k(K)$ で表す．また, 余境界作用素を離散外微分作用素といい, $d$ で表す．

以下では $K$ から定まる実係数の $k$ 次元チェイン全体の集合を $C_k(K)$ で表し, $k$ 次離散微分形式 $\hat{\omega}^k \in \Omega_d^k(K)$ と $k$ 次元チェイン $c^k \in C_k(K)$ のペアリングを

$$\langle \hat{\omega}^k, c^k \rangle$$

で表す．$C_k(K)$ の境界作用素を $\partial$ と表すと

$$\langle d\hat{\omega}^{k-1}, c^k \rangle = \langle \hat{\omega}^{k-1}, \partial c^k \rangle$$

が成り立つ．

$M$ 上の微分形式から離散微分形式への対応は de Rham 写像により行われる．

**定義 2.2.** $\Omega^k(M)$ を $M$ 上の $k$ 次微分形式全体の集合とする．*de Rham* 写像 $\mathcal{R} : \Omega^k(M) \to \Omega_d^k(K)$ を

$$\langle \mathcal{R}\omega^k, c^k \rangle = \int_{c^k} \omega^k$$

で定める．ただし, $\omega^k \in \Omega^k(M), c^k \in C_k(K)$ である．

$\omega^k \in \Omega^k(M)$ に対して,

$$\mathcal{R}d\omega^k = d\mathcal{R}\omega^k$$

が成り立つ．実際, Stokes の定理より

$$\langle \mathcal{R}d\omega^k, c^k \rangle = \int_{c^k} d\omega^k = \int_{\partial c^k} \omega^k = \langle \mathcal{R}\omega^k, \partial c^k \rangle = \langle d\mathcal{R}\omega^k, c^k \rangle$$

となる．

de Rham 写像は微分形式から離散微分形式への対応であるが, 離散微分形式から微分形式への対応としては例えば次の Whitney 写像が用いられる．

**定義 2.3.** $K$ の頂点 $v_i$ に対して, $M$ 上の函数 $\psi_i$ を

- $\psi_i(v_j) = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j), \end{cases}$
- $\psi_i$ は $K$ の各単体上で線形函数

を満たすものとし, $\langle v_0\ v_1 \dots v_k \rangle \in K$ に対する *Whitney* 形式 $\mathcal{W}\langle v_0\ v_1 \dots v_k \rangle \in L^2\Omega^k(M)$ を

$$\mathcal{W}\langle v_0\ v_1 \dots v_k \rangle = \begin{cases} \psi_0 & (k = 0) \\ k! \displaystyle\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \psi_i d\psi_0 \wedge d\psi_1 \wedge \cdots \wedge d\psi_{i-1} \wedge d\psi_{i+1} \wedge \cdots \wedge d\psi_k & (k \geq 1) \end{cases}$$

とする. ただし, $\langle v_0\ v_1 \dots v_k \rangle$ は $\mathbb{R}^N$ 内の一般の位置にある $k+1$ 個の点 $v_0, v_1, \dots, v_k$ から定まる向き付けられた $k$ 次元単体である. これを用いて *Whitney* 写像 $\mathcal{W} : \Omega_d^k(K) \to L^2\Omega^k(M)$ を

$$\mathcal{W}\hat{\omega}^k = \sum_{\sigma^k \in K} \langle \hat{\omega}^k, \sigma^k \rangle \mathcal{W}\sigma^k$$

で定める. ただし, $L^2\Omega^k(M)$ は $\Omega^k(M)$ を内積

$$(\omega_1^k, \omega_2^k) = \int_M \omega_1^k \wedge \star\omega_2^k$$

が定めるノルムで完備化した空間とする. ここで $\star$ は $M$ 上の計量より定まる *Hodge star* 作用素である.

**例 2.1.** $v_0 = 0, v_1 = 1, v_2 = 2 \in \mathbb{R}$ とする. 単体複体

$$K = \{\langle v_0 \rangle, \langle v_1 \rangle, \langle v_2 \rangle, \langle v_0\ v_1 \rangle, \langle v_1\ v_2 \rangle\}$$

の単体に対する *Whitney* 形式は

$$\mathcal{W}\langle v_0 \rangle = \begin{cases} 1 - x & (\langle v_0\ v_1 \rangle \text{ 上}) \\ 0 & (\langle v_1\ v_2 \rangle \text{ 上}), \end{cases} \quad \mathcal{W}\langle v_1 \rangle = \begin{cases} x & (\langle v_0\ v_1 \rangle \text{ 上}) \\ 2 - x & (\langle v_1\ v_2 \rangle \text{ 上}), \end{cases}$$

$$\mathcal{W}\langle v_2 \rangle = \begin{cases} 0 & (\langle v_0\ v_1 \rangle \text{ 上}) \\ x - 1 & (\langle v_1\ v_2 \rangle \text{ 上}), \end{cases}$$

$$\mathcal{W}\langle v_0\ v_1 \rangle = \begin{cases} dx & (\langle v_0\ v_1 \rangle \text{ 上}) \\ 0 & (\langle v_1\ v_2 \rangle \text{ 上}), \end{cases} \quad \mathcal{W}\langle v_1\ v_2 \rangle = \begin{cases} 0 & (\langle v_0\ v_1 \rangle \text{ 上}) \\ dx & (\langle v_1\ v_2 \rangle \text{ 上}) \end{cases}$$

である.

**例 2.2.** $v_0=(0,0), v_1=(2,0), v_2=(1,2)\in\mathbb{R}^2$ とする．単体複体

$$K=\{\langle v_0\rangle,\langle v_1\rangle,\langle v_2\rangle,\langle v_0\ v_1\rangle,\langle v_1\ v_2\rangle,\langle v_2\ v_0\rangle,\langle v_0\ v_1\ v_2\rangle\}$$

の単体に対する *Whitney* 形式は

$$\mathcal{W}\langle v_0\rangle=\frac{4-2x_1-x_2}{4},\quad \mathcal{W}\langle v_1\rangle=\frac{2x_1-x_2}{4},\quad \mathcal{W}\langle v_2\rangle=\frac{x_2}{2},$$
$$\mathcal{W}\langle v_0\ v_1\rangle=\frac{2-x_2}{4}dx_1+\frac{x_1-1}{4}dx_2,\quad \mathcal{W}\langle v_1\ v_2\rangle=\frac{-x_2}{4}dx_1+\frac{x_1}{4}dx_2,$$
$$\mathcal{W}\langle v_2\ v_0\rangle=\frac{-x_2}{4}dx_1+\frac{x_1-2}{4}dx_2,$$
$$\mathcal{W}\langle v_0\ v_1\ v_2\rangle=\frac{1}{2}dx_1\wedge dx_2$$

である．

Whitney 写像については, $\hat{\omega}^k\in\Omega_d^k(K)$ に対して,

$$\mathcal{W}d\hat{\omega}^k=d\mathcal{W}\hat{\omega}^k,\quad \mathcal{R}\mathcal{W}\hat{\omega}^k=\hat{\omega}^k$$

が成り立つ．さらに, Dodziuk-Patodi[4] により次が示された: 定数 $C>0$ と整数 $m>0$ が存在し, 任意の $\omega^k\in\Omega^k(M)$ に対して,

$$\left\|\omega^k-\mathcal{W}\mathcal{R}\omega^k\right\|\leq C\left\|(id+\Delta)^m\omega\right\|\eta \tag{1}$$

が成り立つ．ただし, $\|\cdot\|$ は $\Omega^k(M)$ 上の内積から定まるノルム, $id$ は $\Omega^k(M)$ 上の恒等作用素, $\Delta$ はラプラシアン, $\eta>0$ は $K$ に含まれる 1 次元単体の長さの最大値である．ここでラプラシアン $\Delta$ は余微分 $\delta=(-1)^{n(k+1)+1}\star d\star$ を用いて $\Delta=d\delta+\delta d$ と定義されるものである．

Whitney 写像は有限要素法と関係している． このことについて簡単に述べておく． $f\in\Omega^0(M)$ とし, Poisson 方程式の Dirichlet 境界値問題

$$\begin{cases}\Delta\omega^0=f\\ \omega^0=0\quad(\partial M\text{ 上})\end{cases}$$

の解 $\omega^0\in\Omega_0^0(M)$ を考える．ただし, $\Omega_0^0(M)=\left\{\omega^0\in\Omega^0(M)\mid\omega^0=0\ (\partial M\text{ 上})\right\}$ である． Poisson 方程式について $\psi\in\Omega_0^0(M)$ との内積を取ると弱形式

$$(d\omega^0,d\psi)=(f,\psi)$$

に書きかえることができる． この弱形式では $\omega^0,\psi\in\Omega_0^0(M)$ を考えているが, これを $\mathcal{W}\hat{\omega}^0,\mathcal{W}\hat{\psi}\in\mathcal{W}\Omega_{d,0}^0(K)$ で考えた

$$(d\mathcal{W}\hat{\omega}^0,d\mathcal{W}\hat{\psi})=(f,\mathcal{W}\hat{\psi})$$

を解き, もとの問題の解 $\omega^0$ の近似解 $\mathcal{W}\hat{\omega}^0$ を求める手法が Poisson 方程式の Dirichlet 境界値問題に対する有限要素法である. ただし, $\Omega^0_{d,0}(K)$ は $\hat{\omega}^0 \in \Omega^0_d(K)$ であって $M$ の境界に含まれる $K$ の任意の頂点 $v_i$ に対して $\langle \hat{\omega}^0, \langle v_i \rangle \rangle = 0$ となるもの全体の集合である.

以上で述べた Whitney 写像を用いることにより, $L^2\Omega^k(M)$ の演算を用いて $\Omega^k_d(K)$ に演算を構成することができる. 例えば, $\Omega^k_d(K)$ 上に内積を

$$(\hat{\omega}^k_1, \hat{\omega}^k_2)^{\mathcal{W}}_d = (\mathcal{W}\hat{\omega}^k_1, \mathcal{W}\hat{\omega}^k_2)$$

で定めることができる. この Whitney 写像を一般化したものが次の再構成写像である.

**定義 2.4.** 写像 $\mathcal{I} : \Omega^k_d(K) \to L^2\Omega^k(M)$ を再構成写像という. さらに, $\mathcal{I}$ が有界線形作用素であり,

- $\mathcal{R}\mathcal{I} = id$,
- $s > 0$ が存在し, $\mathcal{I}\mathcal{R} = id + \mathcal{O}(\eta^s)$

を満たすとき, $L^2$*mimetic* 再構成写像という.

Whitney 写像 $\mathcal{W}$ は, 評価 (1) より $s = 1$ とした $L^2$mimetic 再構成写像と考えられる.

$k = 0$ の場合の再構成写像は, $K$ の各頂点で指定された値を補間し, $M$ 上の函数を構成することを意味している. 先ほど述べたように, 再構成写像を用いることにより $L^2\Omega^k(M)$ の演算を用いて $\Omega^k_d(K)$ に演算を構成することができる. 例えば内積は

$$(\hat{\omega}^k_1, \hat{\omega}^k_2)^{\mathcal{I}}_d = (\mathcal{I}\hat{\omega}^k_1, \mathcal{I}\hat{\omega}^k_2)$$

である. このことは $L^2\Omega^k(M)$ の演算を離散化していると考えられる. この離散化の枠組みは Bochev-Hyman[2] で議論されており, mimetic 離散化と呼ばれている.

## 3 離散外積解析とその mimetic 離散化としての実現

以下では任意の単体 $\sigma \in K$ の外心 $c(\sigma)$ は $\sigma$ の内部に含まれていると仮定する. また, 単体 $\tau, \sigma$ に対して, $\tau \prec \sigma$ は $\tau$ が $\sigma$ のフェイスであることを表す. ここで $M$ は向き付けられていたことに注意する. これより $K$ の $n$ 次元単体の向きが $M$ と同じか異なるかを考えることができる.

離散微分形式の集合 $\Omega^k_d(K)$ に演算を構成することは, 再構成写像を用いた方法とは異なる方法で離散外積解析 [5, 3] でも行われている. 離散外積解析では, $K$ の双対 $*K$ が重要な役割を果たす. この双対 $*K$ は, 重心細分を用いて得られる双対胞体 (例えば [8]) についての議論において, 重心ではなく外心を用いたものである.

**定義 3.1.** $k$ 次元単体 $\sigma^k \in K$ に対して, $*\sigma^k$ を

$$*\sigma^k = \sum_{\sigma^k \prec \sigma^{k+1} \prec \cdots \prec \sigma^n} \varepsilon_{\sigma^k, \sigma^{k+1}, \ldots, \sigma^n} \langle c(\sigma^k)\ c(\sigma^{k+1}) \ldots c(\sigma^n) \rangle$$

と定める．ただし, $\varepsilon_{\sigma^k, \sigma^{k+1}, \ldots, \sigma^n}$ は, $\sigma^k = \langle v_0\ v_1 \ldots v_k \rangle$ に対して $\sigma^i = \langle v_0\ v_1 \ldots v_i \rangle$ $(0 \leq i \leq k-1)$ と定め, これらから得られる単体

$$\langle c(\sigma^0)\ c(\sigma^1) \ldots c(\sigma^{k-1})\ c(\sigma^k)\ c(\sigma^{k+1}) \ldots c(\sigma^n) \rangle$$

が $M$ の向きと同じ場合は $+1$, そうでない場合は $-1$ とする．これを用いて $K$ の双対 $*K$ を

$$*K = \{ *\sigma \mid \sigma \in K \}$$

で定める．

**例 3.1.** 単体複体 $K = \{ \langle v_0 \rangle, \langle v_1 \rangle, \langle v_2 \rangle, \langle v_0\ v_1 \rangle, \langle v_1\ v_2 \rangle, \langle v_2\ v_0 \rangle, \langle v_0\ v_1\ v_2 \rangle \}$ を考える．ここで $K$ の幾何的実現 $M$ の向きは $\langle v_0\ v_1\ v_2 \rangle$ と同じであるとする．$\langle v_0 \rangle$ に対する $*\langle v_0 \rangle$ を考える．

$$\langle v_0 \rangle \prec \langle v_0\ v_1 \rangle \prec \langle v_0\ v_1\ v_2 \rangle, \quad \langle v_0 \rangle \prec \langle v_0\ v_2 \rangle \prec \langle v_0\ v_2\ v_1 \rangle$$

であり,

$$\langle c(\langle v_0 \rangle)\ c(\langle v_0\ v_1 \rangle)\ c(\langle v_0\ v_1\ v_2 \rangle) \rangle$$

は $M$ の向きと同じであるので $\varepsilon_{\langle v_0 \rangle, \langle v_0\ v_1 \rangle, \langle v_0\ v_1\ v_2 \rangle} = +1$ となり,

$$\langle c(\langle v_0 \rangle)\ c(\langle v_0\ v_2 \rangle)\ c(\langle v_0\ v_2\ v_1 \rangle) \rangle$$

は $M$ の向きと異なるので $\varepsilon_{\langle v_0 \rangle, \langle v_0\ v_2 \rangle, \langle v_0\ v_2\ v_1 \rangle} = -1$ となる．これより $*\langle v_0 \rangle$ は

$$\begin{aligned}
*\langle v_0 \rangle =& \varepsilon_{\langle v_0 \rangle, \langle v_0\ v_1 \rangle, \langle v_0\ v_1\ v_2 \rangle} \langle c(\langle v_0 \rangle)\ c(\langle v_0\ v_1 \rangle)\ c(\langle v_0\ v_1\ v_2 \rangle) \rangle \\
&+ \varepsilon_{\langle v_0 \rangle, \langle v_0\ v_2 \rangle, \langle v_0\ v_2\ v_1 \rangle} \langle c(\langle v_0 \rangle)\ c(\langle v_0\ v_2 \rangle)\ c(\langle v_0\ v_2\ v_1 \rangle) \rangle \\
=& \langle c(\langle v_0 \rangle)\ c(\langle v_0\ v_1 \rangle)\ c(\langle v_0\ v_1\ v_2 \rangle) \rangle \\
&- \langle c(\langle v_0 \rangle)\ c(\langle v_0\ v_2 \rangle)\ c(\langle v_0\ v_2\ v_1 \rangle) \rangle
\end{aligned}$$

である．同様にして, $*\langle v_1 \rangle, *\langle v_2 \rangle$ は

$$\begin{aligned}
*\langle v_1 \rangle =& \langle c(\langle v_1 \rangle)\ c(\langle v_1\ v_2 \rangle)\ c(\langle v_1\ v_2\ v_0 \rangle) \rangle \\
&- \langle c(\langle v_1 \rangle)\ c(\langle v_1\ v_0 \rangle)\ c(\langle v_1\ v_0\ v_2 \rangle) \rangle, \\
*\langle v_2 \rangle =& \langle c(\langle v_2 \rangle)\ c(\langle v_2\ v_0 \rangle)\ c(\langle v_2\ v_0\ v_1 \rangle) \rangle \\
&- \langle c(\langle v_2 \rangle)\ c(\langle v_2\ v_1 \rangle)\ c(\langle v_2\ v_1\ v_0 \rangle) \rangle
\end{aligned}$$

であることがわかる．次に $\langle v_0\ v_1 \rangle$ に対する $*\langle v_0\ v_1 \rangle$ を考える．

$$\langle v_0\ v_1 \rangle \prec \langle v_0\ v_1\ v_2 \rangle$$

であり,

$$\langle c(\langle v_0\rangle)\; c(\langle v_0\; v_1\rangle)\; c(\langle v_0\; v_1\; v_2\rangle)\rangle$$

は $M$ の向きと同じであるので $\varepsilon_{\langle v_0\; v_1\rangle,\langle v_0\; v_1\; v_2\rangle}=+1$ となる．これより $*\langle v_0\; v_1\rangle$ は

$$\begin{aligned}*\langle v_0\; v_1\rangle =&\varepsilon_{\langle v_0\; v_1\rangle,\langle v_0\; v_1\; v_2\rangle}\langle c(\langle v_0\; v_1\rangle)\; c(\langle v_0\; v_1\; v_2\rangle)\rangle\\ =&\langle c(\langle v_0\; v_1\rangle)\; c(\langle v_0\; v_1\; v_2\rangle)\rangle\end{aligned}$$

である．同様にして, $*\langle v_1\; v_2\rangle, *\langle v_2\; v_0\rangle$ は

$$*\langle v_1\; v_2\rangle=\langle c(\langle v_1\; v_2\rangle)\; c(\langle v_1\; v_2\; v_0\rangle)\rangle,\quad *\langle v_2\; v_0\rangle=\langle c(\langle v_2\; v_0\rangle)\; c(\langle v_2\; v_0\; v_1\rangle)\rangle$$

であることがわかる．最後に $\langle v_0\; v_1\; v_2\rangle$ に対する $*\langle v_0\; v_1\; v_2\rangle$ を考える．

$$\langle c(\langle v_0\rangle)\; c(\langle v_0\; v_1\rangle)\; c(\langle v_0\; v_1\; v_2\rangle)\rangle$$

は $M$ の向きと同じであるので $\varepsilon_{\langle v_0\; v_1\; v_2\rangle}=+1$ となる．これより $*\langle v_0\; v_1\; v_2\rangle$ は

$$\begin{aligned}*\langle v_0\; v_1\; v_2\rangle =&\varepsilon_{\langle v_0\; v_1\; v_2\rangle}\langle c(\langle v_0\; v_1\; v_2\rangle)\rangle\\ =&\langle c(\langle v_0\; v_1\; v_2\rangle)\rangle\end{aligned}$$

である．

**定義 3.2.** $C_k(*K)$ を $n-k$ 次元単体 $\sigma^{n-k}\in K$ に対する $*\sigma^{n-k}$ が生成する実係数のベクトル空間とする．境界作用素 $\partial: C_k(*K)\to C_{k-1}(*K)$ を $*\sigma^{n-k}$ に対しては

$$\partial*\sigma^{n-k}=(-1)^{n-k+1}\sum_{\sigma^{n-k}\prec\sigma^{n-k+1}}\varepsilon'_{\sigma^{n-k},\sigma^{n-k+1}}*\sigma^{n-k+1}$$

と定め, 一般の $C_k(*K)$ の要素に対しては, これを線形に拡張することによって定める．ただし, $\varepsilon'_{\sigma^{n-k},\sigma^{n-k+1}}$ は $\partial\sigma^{n-k+1}$ に現れる $\sigma^{n-k}$ の係数, つまり

$$\partial\sigma^{n-k+1}=\sum_{\sigma^{n-k}}\varepsilon'_{\sigma^{n-k},\sigma^{n-k+1}}\sigma^{n-k}$$

である．

**例 3.2.** 例 3.1 の単体複体 $K$ を考える．$*\langle v_0\rangle$ に対する $\partial*\langle v_0\rangle$ を考える．

$$\langle v_0\rangle\prec\langle v_0\; v_1\rangle,\quad \langle v_0\rangle\prec\langle v_2\; v_0\rangle$$

であり,

$$\partial\langle v_0\; v_1\rangle=\langle v_1\rangle-\langle v_0\rangle,\quad \partial\langle v_2\; v_0\rangle=\langle v_0\rangle-\langle v_2\rangle$$

であるので $\varepsilon'_{\langle v_0\rangle,\langle v_0\; v_1\rangle}=-1, \varepsilon'_{\langle v_0\rangle,\langle v_2\; v_0\rangle}=+1$ となる．これより $\partial*\langle v_0\rangle$ は

$$\partial*\langle v_0\rangle=(-1)^{0+1}(\varepsilon'_{\langle v_0\rangle,\langle v_0\; v_1\rangle}*\langle v_0\; v_1\rangle+\varepsilon'_{\langle v_0\rangle,\langle v_2\; v_0\rangle}*\langle v_2\; v_0\rangle)$$

$$
\begin{aligned}
&= - \left( -\langle c(\langle v_0\ v_1 \rangle)\ c(\langle v_0\ v_1\ v_2 \rangle) \rangle + \langle c(\langle v_2\ v_0 \rangle)\ c(\langle v_2\ v_0\ v_1 \rangle) \rangle \right) \\
&= \langle c(\langle v_0\ v_1 \rangle)\ c(\langle v_0\ v_1\ v_2 \rangle) \rangle + \langle c(\langle v_2\ v_0\ v_1 \rangle)\ c(\langle v_2\ v_0 \rangle) \rangle
\end{aligned}
$$

である．これは $*\langle v_0 \rangle$ の境界とは異なることに注意する．実際, $*\langle v_0 \rangle$ の境界は

$$
\begin{aligned}
&\langle c(\langle v_0 \rangle)\ c(\langle v_0\ v_1 \rangle) \rangle + \langle c(\langle v_0\ v_1 \rangle)\ c(\langle v_0\ v_1\ v_2 \rangle) \rangle \\
&\qquad + \langle c(\langle v_2\ v_0\ v_1 \rangle)\ c(\langle v_2\ v_0 \rangle) \rangle + \langle c(\langle v_2\ v_0 \rangle)\ c(\langle v_0 \rangle) \rangle
\end{aligned}
$$

である．同様にして, $\partial * \langle v_1 \rangle, \partial * \langle v_2 \rangle$ は

$$
\begin{aligned}
\partial * \langle v_1 \rangle &= \langle c(\langle v_1\ v_2 \rangle)\ c(\langle v_1\ v_2\ v_0 \rangle) \rangle + \langle c(\langle v_0\ v_1\ v_2 \rangle)\ c(\langle v_0\ v_1 \rangle) \rangle, \\
\partial * \langle v_2 \rangle &= \langle c(\langle v_2\ v_0 \rangle)\ c(\langle v_2\ v_0\ v_1 \rangle) \rangle + \langle c(\langle v_1\ v_2\ v_0 \rangle)\ c(\langle v_1\ v_2 \rangle) \rangle
\end{aligned}
$$

であることがわかる．次に $*\langle v_0\ v_1 \rangle$ に対する $\partial * \langle v_0\ v_1 \rangle$ を考える．

$$
\langle v_0\ v_1 \rangle \prec \langle v_0\ v_1\ v_2 \rangle
$$

であり,

$$
\partial \langle v_0\ v_1\ v_2 \rangle = \langle v_1\ v_2 \rangle - \langle v_0\ v_2 \rangle + \langle v_0\ v_1 \rangle
$$

であるので $\varepsilon'_{\langle v_0\ v_1 \rangle, \langle v_0\ v_1\ v_2 \rangle} = +1$ となる．これより $\partial * \langle v_0\ v_1 \rangle$ は

$$
\begin{aligned}
\partial * \langle v_0\ v_1 \rangle &= (-1)^{1+1} \varepsilon'_{\langle v_0\ v_1 \rangle, \langle v_0\ v_1\ v_2 \rangle} * \langle v_0\ v_1\ v_2 \rangle \\
&= \langle c(\langle v_0\ v_1\ v_2 \rangle) \rangle
\end{aligned}
$$

である．同様にして, $\partial * \langle v_1\ v_2 \rangle, \partial * \langle v_2\ v_0 \rangle$ は

$$
\partial * \langle v_0\ v_1 \rangle = \langle c(\langle v_1\ v_2\ v_0 \rangle) \rangle, \quad \partial * \langle v_0\ v_1 \rangle = \langle c(\langle v_2\ v_0\ v_1 \rangle) \rangle,
$$

であることがわかる．

$C_k(K), \partial$ から $\Omega_d^k(K), d$ を定めたのと同様にして, $C_k(*K), \partial$ から $\Omega_d^k(*K), d$ を定めることができる．

**定義 3.3.** $\Omega_d^k(K)$ 上に内積を

$$
(\hat{\omega}_1^k, \hat{\omega}_2^k)_d = \sum_{\sigma^k} \langle \omega_1^k, \sigma^k \rangle \langle \star \omega_2^k, *\sigma^k \rangle
$$

で定める．ここで $\star$ は離散 *Hodge star* 作用素であり, $\hat{\omega}^k \in \Omega_d^k(K)$ と $k$ 次元単体 $\sigma^k \in K$ に対して

$$
\langle \star \hat{\omega}^k, *\sigma^k \rangle = \frac{|*\sigma^k|}{|\sigma^k|} \langle \hat{\omega}^k, \sigma^k \rangle
$$

で定める．ただし, $|\sigma^k|, |*\sigma^k|$ はそれぞれ $\sigma^k, *\sigma^k$ の体積であり, 0 次元単体の体積は 1 とする．

離散 Hodge star 作用素の定義より, この内積は

$$(\hat{\omega}_1^k, \hat{\omega}_2^k)_d = \sum_{\sigma^k} \frac{|*\sigma^k|}{|\sigma^k|} \langle \hat{\omega}_1^k, \sigma^k \rangle \langle \hat{\omega}_2^k, \sigma^k \rangle$$

と表すことができる.

離散外積解析における他の演算としては, 離散余微分 $\delta$ が

$$\delta = (-1)^{n(k+1)+1} \star d \star$$

と定義されている. ここで $\star$ が 2 回用いられているが, これは $\hat{\omega}^k \in \Omega_d^k(K)$ に対して $\star\star\hat{\omega}^k = (-1)^{n(k-n)}\hat{\omega}^k$ と計算する. この離散余微分については, [7] で議論されているように

$$(d\hat{\omega}_1^k, \hat{\omega}_2^k)_d = (\hat{\omega}_1^k, \delta\hat{\omega}_2^k)_d$$

が成り立つ. つまり, $M$ についての適切な仮定のもとで $\Omega^k(M)$ の余微分に成り立つ性質が離散余微分についても成り立つ. このように, 離散外積解析では微分形式について成り立つ性質の類似が離散微分形式についても成り立つかが重視されている.

以上で述べた離散外積解析における $\Omega_d^k(K)$ 上の内積は mimetic 離散化, つまり再構成写像を用いたものとは異なる構成方法であるが, 実は次が成り立つ.

**定理 3.1.** $\mathbb{R}^2$ の 2 次元単体複体 $K = \{\langle v_0 \rangle, \langle v_1 \rangle, \langle v_2 \rangle, \langle v_0\ v_1 \rangle, \langle v_1\ v_2 \rangle, \langle v_2\ v_0 \rangle, \langle v_0\ v_1\ v_2 \rangle\}$ に対して, $\mathcal{I} : \Omega_d^k(K) \to \Omega^k(M)$ を次で定める:

- $\hat{\omega}^0 \in \Omega_d^0(K)$ に対する $\mathcal{I}\hat{\omega}^0$ は, $V_{\langle v_i \rangle}$ $(i = 0, 1, 2)$ 上で

  $$\mathcal{I}\hat{\omega}^0 = \langle \hat{\omega}^0, \langle v_i \rangle \rangle$$

  とし, $\left(V_{\langle v_0 \rangle} \cap V_{\langle v_1 \rangle}\right) \cup \left(V_{\langle v_1 \rangle} \cap V_{\langle v_2 \rangle}\right) \cup \left(V_{\langle v_2 \rangle} \cap V_{\langle v_0 \rangle}\right)$ 上で 0 とする.
- $\hat{\omega}^1 \in \Omega_d^1(K)$ に対する $\mathcal{I}\hat{\omega}^1$ は, $V_{\langle v_i, v_{i+1} \rangle}$ $(i = 0, 1, 2)$ 上で

  $$\mathcal{I}\hat{\omega}^1 = \frac{\langle \hat{\omega}^1, \langle v_i, v_{i+1} \rangle \rangle}{|\langle v_i, v_{i+1} \rangle|^2} \left\{ (v_{i+1} - v_i) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx_1 & dx_2 \end{pmatrix} \right\}$$

  とし, $\left(V_{\langle v_0\ v_1 \rangle} \cap V_{\langle v_1\ v_2 \rangle}\right) \cup \left(V_{\langle v_1\ v_2 \rangle} \cap V_{\langle v_2\ v_0 \rangle}\right) \cup \left(V_{\langle v_2\ v_0 \rangle} \cap V_{\langle v_0\ v_1 \rangle}\right)$ 上で 0 とする. ただし, $\cdot$ は $\mathbb{R}^2$ の標準内積である. また, $\langle v_2, v_3 \rangle$ は $\langle v_2, v_0 \rangle$ と考える.
- $\hat{\omega}^2 \in \Omega_d^2(K)$ に対する $\mathcal{I}\hat{\omega}^2$ は, $V_{\langle v_0\ v_1\ v_2 \rangle}$ 上で

  $$\mathcal{I}\hat{\omega}^2 = \frac{\langle \hat{\omega}^2, \langle v_0\ v_1\ v_2 \rangle \rangle}{|\langle v_0\ v_1\ v_2 \rangle|} dx_1 \wedge dx_2$$

  とする.

ここで単体 $\sigma \in K$ に対し, そのサポートボリューム $V_\sigma$ を

$$V_\sigma = \mathrm{convexhull}(\sigma, *\sigma) \cap M$$

で定める. このとき,

- $\mathcal{RI}\hat{\omega}^k = \hat{\omega}^k$
- $(\hat{\omega}_1^k, \hat{\omega}_2^k)_d = (\hat{\omega}_1^k, \hat{\omega}_2^k)_d^{\mathcal{I}}$,

が成り立つ.

この定理より, 一般の 2 次元単体複体 $K$ に対する $\Omega_d^k(K)$ の離散外積解析における内積は再構成写像を用いて構成できる.

## 参考文献


[1] D. N. Arnold, Finite element exterior calculus, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, 93 (2018).

[2] P. B. Bochev and J. M. Hyman, Principles of mimetic discretizations of differential operators, in *Compatible spatial discretizations*, IMA Vol. Math. Appl. 142, 89–119 (2006).

[3] M. Desbrun, A. N. Hirani, M. Leok and J. E. Marsden, Discrete exterior calculus, Preprint, arXiv:math/0508341 (2005).

[4] J. Dodziuk and V. K. Patodi, Riemannian structures and triangulations of manifolds, J. Indian Math. Soc., New Ser. 40, 1–52 (1976).

[5] A. N. Hirani, Discrete exterior calculus, PhD thesis, California Institute of Technology (2003).

[6] T. Satoh and T. Yaguchi, On the equivalence of the norms of the discrete differential forms in discrete exterior calculus, Japan J. Ind. Appl. Math. 36, 3–24 (2019).

[7] E. Schulz and G. Tsogtgerel, Convergence of discrete exterior calculus approximations for Poisson problems, Discrete Comput. Geom. 63, 346–376 (2020).

[8] 坪井俊, 幾何学 III 微分形式, 東京大学出版 (2008).

[9] H. Whitney, Geometric integration theory, Princeton Univ. Press (1957).

[10] S. O. Wilson, Cochain algebra on manifolds and convergence under refinement, Topology Appl. 154, 1898–1920 (2007).