離散 Kirchhoff 弾性棒の分類について
(On the classification of discrete Kirchhoff elastic rods)

兵庫県立大学大学院理学研究科　川久保 哲
Satoshi Kawakubo
Graduate School of Science, University of Hyogo

福岡大学理学部　松浦 望
Nozomu Matsuura
Faculty of Science, Fukuoka University

1　序

ピアノ線のような一次元弾性体の数理モデルについては, 17 世紀末以来, 膨大な研究がなされており ([1], [20], etc.), 代表的なものとして, Euler の弾性曲線 ([9]) や Kirchhoff 弾性棒 ([16]) がある．Euler の弾性曲線は曲げの効果のみを考えたもので, 最も簡単なモデルである．一方, Kirchhoff 弾性棒はもう少し複雑で, 曲げと捩れの両方の効果を考慮したものであり, これら 2 つの効果を組み合わせたエネルギーが臨界になるような枠付き曲線として定義される．

Kirchhoff は [16] において, 今日, Kirchhoff 弾性棒と呼ばれているモデルと Lagrange のコマの運動との等価性を発見した．この等価性は Kirchhoff の運動学的類似と呼ばれており, 弾性棒の弧長パラメータがコマの運動の時間パラメータに対応する．一方, Lagrange のコマの運動方程式は可積分系の代表的な例としてよく知られている (cf. [2], etc.)．このことから, Kirchhoff 弾性棒の方程式も何等かの意味で “解ける方程式” であることが期待され, 様々な観点から多くの研究がなされてきた．例えば, Langer-Singer([18]) は Kirchhoff 弾性棒の変分問題を Hamilton 系として定式化し, その Liouville 可積分性を示している．また, Tsuru([25]), Shi-Hearst([23]), Langer-Singer([19]) は Kirchhoff 弾性棒の中心線を Jacobi の楕円関数, 楕円積分によって明示的に表した．

本稿では $\mathbf{R}^3$ 内の Kirchhoff 弾性棒の離散化について考える．一般論として, 微分方程式を単純に離散化しても, 保存量を持つ (さらに明示的な解を持つ) といった良い性質は保たれない．そのため, そのような良い性質を持つ差分方程式を得るためには (即ち “可

積分離散化”を行うためには) 個々の方程式毎に工夫が必要である．Bobenko-Suris([5]) は Lagrange のコマの運動方程式を可積分離散化し, Kirchhoff の運動学的類似を通して, Kirchhoff 弾性棒の可積分離散化を行った．一方, [5] では特殊関数による明示的な解の構成や解の分類などは行われていない．本稿では, Bobenko-Suris によって定義された離散 Kirchhoff 弾性棒の離散曲率と捩れ角を Jacobi の楕円関数で明示的に表し, その表示式を用いて解の分類を行う (定理 28).

本稿の以下の構成は次の通りである．第 2 節では滑らかな Kirchhoff 弾性棒について述べる．第 3 節ではまず離散曲線, 離散曲率などの定義を復習した後, 枠付き離散曲線, 法平行移動, ツイスト角などを導入し, 離散 Kirchhoff 弾性棒の定義を述べる．第 4 節では離散 Frenet 枠, 及びその欠点を補うためのものとして, それを少し変形したものを 2 種類定義する．まず 4.1 では離散 Frenet 枠, 捩れ角を定義する．次に 4.2 では拡張離散 Frenet 枠, 拡張捩れ角を定義する．最後に 4.3 では, 定捩れ角の離散曲線を定義し, それに対して一般化離散 Frenet 枠及び符号付き離散曲率を定義する．第 5 節では離散 Kirchhoff 弾性棒の分類定理 (定理 28) を述べる．

2　Kirchhoff 弾性棒

この節では通常の Kirchhoff 弾性棒 (即ち離散ではなく滑らかなもの) について復習する．本稿では, 弾性棒が入っている空間としては $\mathbf{R}^3$ のみを考える．$\mathbf{R}^3$ の標準的な内積を $\langle *, * \rangle$, ノルムを $|*|$, 外積を $\times$ で表す．特に断りがない限り, 曲線, ベクトル場等はすべて C^∞ 級であると仮定しておく．

まず “捩れ”という言葉に関する注意を述べておく．空間内の曲線に対して, その捩率 (torsion) の概念は非常に良く知られているが ([24], etc.), これは “平面曲線からのずれの度合”を表す概念である．一方, 一次元弾性体 (即ちピアノ線のような曲線状の弾性体．なお自然な状態は直線状であると仮定する．) を考え, その “物質的な捩れの度合”を考えると, これは捩率とは別の概念であることが分かる．実際, 直線の状態の一次元弾性体を持ち, 両端の位置は固定したままで, 両端に力を加えて捩ると, “中心軸は直線だが, 物質的には捩れている一次元弾性体” ができる．このことからも “捩率 (平面曲線からのずれの度合)” と “物質的な捩れの度合” は全く別の概念と考えなければいけない．(もっとも, 捩れをどんどん加えていくとある時点で弾性体は不安定となり, 数学的にはともかく実際には直線の状態を保っていられなくなって, 捩率が発生してしまうことになる．その意味では “物質的な捩れ” が “捩率”の原因となり得るわけだが, 両者は概念としてはあくまで別のものである, ということである．)

以下で述べるように, 曲線と枠の組を考えることによって両者の概念を数学的に明確に区別することは容易にできるが, “捩れ” という言葉に関しては, これらのどちらの概念に対しても使われてしまうことが多く, しばしば混乱の元になる．そこで以下では言葉使いを厳密にするため, “捩れ” (torsion) という言葉は前者 (即ち平面曲線からのずれの方) に対してのみ使うこととし, 後者 (即ち物質的な方) に対しては “ツイスト” (twist) という言葉を用いることにする．

Kirchhoff 弾性棒を定義しよう．$\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}^3$, $s \mapsto \gamma(s)$ を区間 $[\alpha, \beta]$ で定義された弧長径数曲線とする．$T(s) = \gamma'(s)$ (ここで $'$ は s による微分) で点 $\gamma(s)$ における γ の単位接ベクトルを表す．ツイストの度合を表すため, 次のようなものを導入する．

$$M : [\alpha, \beta] \to SO(3), \quad s \mapsto M(s) = (T(s), M^1(s), M^2(s))$$

を γ に適合した正規直交枠場とする．ここで “γ に適合した” の意味は 3 次行列 $M(s)$ の第 1 列が γ の単位接ベクトル $T(s)$ に一致している, ということである．本稿では, このような γ と M の組 (γ, M) を**枠付き曲線**とよぶことにする．枠付き曲線 (γ, M) に対して, γ を (γ, M) の**中心線**という．(γ, M) で一次元弾性体の一つの状態を表す．

枠付き曲線 (γ, M) に対して, その曲げとツイストの両方の効果を考えたエネルギーを定義したい．$\kappa(s) = |\gamma''(s)|$ で中心線 γ の曲率を表す．これが曲げの度合を表すものである．

次にツイストの度合を表すものとしてツイスト率を定義する．まず γ に適合した正規直交枠場

$$P : [\alpha, \beta] \to SO(3), \quad s \mapsto P(s) = (T(s), P^1(s), P^2(s))$$

で $\nabla_s^{\perp} P^1 = 0$, $\nabla_s^{\perp} P^2 = 0$ を満たすものを一つとる．ここで $\nabla^{\perp}$ は曲線 γ に沿う法束の法接続を表す．即ち $\nabla_s^{\perp} P^j = (P^j)' - \langle (P^j)', T \rangle T$ である．γ に対してこのような P は必ず存在し, γ の**自然枠**, あるいは **Bishop 枠**とよばれる ([4], etc.)．すると $M(s)$ はある関数 $\theta(s)$ を用いて

$$M(s) = P(s) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta(s) & -\sin\theta(s) \\ 0 & \sin\theta(s) & \cos\theta(s) \end{pmatrix}$$

と表せる．関数 $a(s)$ を $a(s) = \theta'(s)$ により定義する．(なお $a(s)$ は自然枠 $P(s)$ の選び方に依らずに定まる．) この関数 $a(s)$ を枠付き曲線 (γ, M) の**ツイスト率**という．

$\nu > 0$ を定数とする．これは考えている一次元弾性体の材質により決まるもので, 本稿では完全に固定して考える．枠付き曲線 (γ, M) に対して, その曲げとツイストの両方の

効果を考えたエネルギー $\mathfrak{T}$ を次で定義する.

$$\mathfrak{T}\big((\gamma, M)\big) = \int_\alpha^\beta \kappa(s)^2 ds + 2\nu \int_\alpha^\beta a(s)^2 ds. \tag{1}$$

右辺第一項が曲げのエネルギー, 右辺第二項がツイストのエネルギーを表しており, エネルギー $\mathfrak{T}$ はそれらを組み合わせたエネルギーとなっている. なお, 右辺第一項は γ のみによって決まり, γ の弾性エネルギーともよばれる.

γ の両端点及び両端点での枠 (T, M_1, M_2) を固定した変分に関して $\mathfrak{T}$ の第一変分公式を計算し, Euler-Lagrange 方程式を導くと次のようになる ([13], etc.).

$$\Big(2\gamma''' + \big(3|\gamma''|^2 - \mu + 2\nu a^2\big)\gamma' - 4\nu a \gamma' \times \gamma''\Big)' = 0, \tag{2}$$

$$a(s) = a. \tag{3}$$

ここで μ, a は定数である. なお (3) は, エネルギーが臨界ならばツイストが弾性体の一部に集中することはなく, 全体に一様に分布することを示している.

定義 1. ある定数 μ, a が存在して, (2) と (3) が成り立つとき, 枠付き曲線 (γ, M) を **Kirchhoff 弾性棒**という. 定数 a は一意的に定まるが, この a を Kirchhoff 弾性棒 (γ, M) の**ツイスト率**という.

本稿では定義 1 のように, Kirchhoff 弾性棒を 4 階常微分方程式の解として定義するが, 次のような言い換えが可能である. なお, 証明には様々な方法がある. 例えば局所誘導階層の再帰作用素 ([17], [14], etc.) を用いれば見通しよくできるが, ここでは詳細は省略する.

命題 2. 枠付き曲線 (γ, M) が Kirchhoff 弾性棒であるための必要十分条件はある $a \in \mathbf{R}$ 及び I, $W \in \mathbf{R}^3$ が存在して次の (i), (ii) が成り立つことである.

(i) $T \times T' + 2\nu a T = \gamma \times I + W$,
(ii) $a(s) = a$.

この時, 定数 a を Kirchhoff 弾性棒 (γ, M) のツイスト率という.

なお, Kirchhoff 弾性棒の "良い離散化", いわゆる可積分離散化は微分方程式 (2) の単純な離散化によっては実現できそうにない. 次の章で Bobenko-Suris ([5]) による離散 Kirchhoff 弾性棒の定義を述べるが, これは命題 2 による特徴付けを離散化したものとみなせる.

3 離散 Kirchhoff 弾性棒

この節ではまず離散曲線の基本的事項について復習する (cf. [10], etc.). その後, 枠付き離散曲線, 法平行移動, ツイスト角, ツイスト率などを導入し, 離散 Kirchhoff 弾性棒を定義する ([5]).

以下, $l > 0$ とし, 本稿では固定する. l はセグメント長 (離散曲線の隣接頂点間の距離) を表すものである.

定義 3 ([10], etc.)**.** 写像 $\gamma : \mathbf{Z} \to \mathbf{R}^3$, $n \mapsto \gamma_n$ を $|\gamma_{n+1} - \gamma_n| = l$ ($^\forall n \in \mathbf{Z}$) を満たすものとし, $T_n = (\gamma_{n+1} - \gamma_n)/l$ とおく. 任意の $n \in \mathbf{Z}$ に対して $T_n \neq -T_{n-1}$ が成り立つ時, γ を**離散曲線**という.

次に離散曲線の曲がり方を表す量を定義する.

定義 4 ([10], etc.)**.** $\gamma : \mathbf{Z} \to \mathbf{R}^3$ を離散曲線とする. T_n と T_{n-1} のなす角を $\phi_n (\in [0, \pi))$ とおき, 離散曲線 γ の点 γ_n における**曲がり角 (curvature angle)** とよぶ. また $\kappa_n = \dfrac{2}{l} \tan \dfrac{\phi_n}{2}$ とおく. $\kappa_n (\geqslant 0)$ を, 離散曲線 γ の点 γ_n における**離散曲率 (discrete curvature)** という.

注 5. 曲がり角 ϕ_n に対して離散曲率 κ_n をどのように定義するかについては, 上の定義以外にも様々な流儀があり (cf. [7], [10]), 例えば $\kappa_n = \dfrac{\phi_n}{l}$ ([8], [12]), $\kappa_n = \dfrac{2}{l} \sin \dfrac{\phi_n}{2}$ ([21]) などがある. $\kappa_n = \dfrac{2}{l} \sin \dfrac{\phi_n}{2}$ は 3 頂点 $\gamma_{n-1}, \gamma_n, \gamma_{n+1}$ を通る円の半径の逆数を表し ([10], etc.), ある意味で最も素朴な曲率の離散化とも言えるが, この定義では κ_n に上限値 $l/2$ が存在し, 滑らかな曲線の曲率とは大きく性質が異なることになる. 一方, 定義 4 のように定義すると, $\phi_n \to \pi$ の時, $\kappa_n \to \infty$ となり, このような上限は存在しない.

注 6. 定義 4 の κ_n もある円の半径の逆数と考えることができる. 実際, 3 頂点 $\gamma_{n-1}, \gamma_n, \gamma_{n+1}$ を通る平面内にある円で, 線分 $\gamma_{n-1}\gamma_n$ にその中点で接し, かつ線分 $\gamma_n\gamma_{n+1}$ にその中点で接するような円を考えればよい ([10], etc.).

次に, 法接続に関する平行移動の離散版として, 離散曲線に沿った法平行移動を定義する (定義 7). これは [3] の "discrete parallel transport" と基本的に同じものであるが, [3] の定義では離散曲率が正の点と零点で場合分けをしなければならない. 一方, 滑らかな曲線の法接続に関する平行移動の概念は曲率の零点には全く無関係だから, 離散の場合にも

離散曲率の零点に無関係な定義にするのが自然である．そこで次のように定義する．以下, ベクトル $W(\neq 0) \in \mathbf{R}^3$ に対して, $\mathcal{S}_W : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ で平面 $(\mathrm{Span}\{W\})^\perp$ に関する鏡映変換を表す．即ち, $Y \in \mathbf{R}^3$ に対して

$$\mathcal{S}_W(Y) = Y - 2\left\langle Y, \frac{W}{|W|}\right\rangle \frac{W}{|W|}$$

と定義する．

定義 7. $\gamma : \mathbf{Z} \to \mathbf{R}^3$ を離散曲線とする．写像 $\Pi_n : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ を $\Pi_n(Y) = \mathcal{S}_{U_n}(\mathcal{S}_{T_{n-1}}(Y))$, $Y \in \mathbf{R}^3$ で定義し, 離散曲線 γ に沿った点 γ_n での**法平行移動**という．ただし

$$U_n = \frac{T_{n-1} + T_n}{|T_{n-1} + T_n|}$$

とおいた (即ち U_n は T_{n-1} と T_n の二等分線方向の単位ベクトルである).

Y が点 γ_{n-1} での法ベクトル (即ち $\langle Y, T_{n-1}\rangle = 0$ となるベクトル) ならば, $\Pi_n(Y)$ は点 γ_n での法ベクトルとなることが容易に確かめられる．イメージ的には Π_n は点 γ_{n-1} での法ベクトルを点 γ_n での法ベクトルに (滑ることなく) “接続” させる写像であり, 滑らかな曲線の時の法接続 $\nabla^\perp$ に関する平行移動の離散化と考えられる．

なお, 写像 Π_n は, $\kappa_n > 0$ なる点では $T_{n-1} \times T_n$ 方向を軸とするような角 ϕ_n の回転となり, $\kappa_n = 0$ なる点では恒等写像となることが確かめられる．

次に枠付き曲線の離散化として, 枠付き離散曲線を定義する．離散化する際の注意点としては, 滑らかな場合とは異なり, 正規直交枠に “正則性条件”をつけなければならないという所である．以下, 次の記号を用いる．

$$\begin{aligned}\widehat{SO(3)} &= \{R \in SO(3)\,;\, \mathrm{tr}\, R \neq -1\}\\ &= \{R \in SO(3)\,;\, \det(R+E) \neq 0\}.\end{aligned}$$

定義 8. $\gamma\colon \mathbf{Z} \to \mathbf{R}^3$ を $|\gamma_{n+1} - \gamma_n| = l$ ($^\forall n \in \mathbf{Z}$) を満たす写像とし, 写像 $M\colon \mathbf{Z} \to SO(3), n \mapsto M_n$ を γ に適合した正規直交枠場 (即ち M_n の第 1 列が T_n に一致するような正規直交枠場) とする．任意の $n \in \mathbf{Z}$ に対して $(M_{n-1})^{-1}M_n \in \widehat{SO(3)}$ が成り立つ時, 組 (γ, M) を**枠付き離散曲線**という．この時, γ を (γ, M) の**中心線**という．

注 9. もし (γ, M) が枠付き離散曲線ならば, 正則性条件 $(M_{n-1})^{-1}M_n \in \widehat{SO(3)}$ から $T_n \neq -T_{n-1}$ が成り立つことが確かめられ, 従って写像 γ は定義 3 の意味で離散曲線になる．

次に枠付き離散曲線 (γ, M) のツイスト角及びツイスト率を定義する．M_n の第 2 列を M_n^1, 第 3 列を M_n^2 とおく．$M_n = (T_n, M_n^1, M_n^2)$ 及び $(\Pi_n(T_{n-1}), \Pi_n(M_{n-1}^1), \Pi_n(M_{n-1}^2))$ は正の正規直交基であり, $\Pi_n(T_{n-1}) = T_n$ であるから, ある $\psi_n \in [-\pi, \pi)$ が一意的に存在して

$$M_n = (\Pi_n(T_{n-1}), \Pi_n(M_{n-1}^1), \Pi_n(M_{n-1}^2)) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi_n & -\sin\psi_n \\ 0 & \sin\psi_n & \cos\psi_n \end{pmatrix}$$

が成り立つ．ここで正則性条件 $(M_{n-1})^{-1}M_n \in \widehat{SO(3)}$ を用いると, $\psi_n \neq -\pi$ が成り立つことが確かめられる．そこで次のように定義する．

定義 10. 枠付き離散曲線 (γ, M) に対して, 角 $\psi_n \in (-\pi, \pi)$ を点 γ_n における (γ, M) の**ツイスト角**という．また $a_n = \dfrac{2}{l}\tan\dfrac{\psi_n}{2}$ と定義し, 点 γ_n における (γ, M) の**ツイスト率**という．

注 11. ツイスト率 a_n はツイスト角 ψ_n を用いずに表すこともできる．実際, Cayley 変換 $g : \widehat{SO(3)} \to \mathfrak{o}(3)$,

$$g(R) := (E - R)(E + R)^{-1}, \qquad R \in \widehat{SO(3)},$$

を用いると

$$a_n = \frac{2}{l} g\Big((M_{n-1})^{-1}M_n\Big) \text{ の } (2,3) \text{ 成分}$$

と表せる．なお, [15] ではこの方法でツイスト率を定義している．

注 12. ツイスト率 a_n は点 γ_n において枠 M がどの程度 γ の周りにツイストしているかを表す量と解釈できる．なお, $\psi_n \to \pm\pi$ の時, $a_n \to \pm\infty$ であることに注意する．このことより, 固定した離散曲線 γ に対して, M をうまく取り付ければ, ツイストの量がいくらでも大きい枠付き離散曲線 (γ, M) を作れることが分かる．

次にエネルギーを定義する．滑らかな枠付き曲線に対して, 曲げと捩れの効果を考えたエネルギー $\mathfrak{T}$ を (1) を定義したが, これを離散化したエネルギー $\mathfrak{E}$ を次のように定義する ([5])．即ち, 枠付き離散曲線 (γ, M) に対して

$$\mathfrak{E}\big((\gamma, M)\big) = \frac{2}{l}\sum_n \log\left(\frac{l^2}{4}\kappa_n^2 + 1\right) + 2\nu\frac{2}{l}\sum_n \log\left(\frac{l^2}{4}a_n^2 + 1\right),$$

と定義する．なお [5] では, 離散的な Lagrange のコマの運動の Lagrangian において, 離散的時間変数を弾性棒の離散変数 n とみなすことによって得られるエネルギーとして $\mathfrak{E}$

を導出しており, 本稿で述べたような法平行移動やツイスト角などの概念は用いられていない.

エネルギー $\mathfrak{E}$ の第一変分公式を計算し, Euler-Lagrange 方程式を導出すると

$$\frac{2}{l}\frac{T_{n-1}\times T_n}{1+\langle T_{n-1},T_n\rangle}+2\nu a\frac{T_{n-1}+T_n}{1+\langle T_{n-1},T_n\rangle}=\gamma_n\times I+W, \tag{4}$$

$$a_n=a, \tag{5}$$

となる. ここで $a\in\mathbf{R}$, $I,W\in\mathbf{R}^3$ である. そこで離散 Kirchhoff 弾性棒を次のように定義する.

定義 13 ([5]). (γ,M) を枠付き離散曲線とする. ある $a\in\mathbf{R}$ 及び $I,W\in\mathbf{R}^3$ が存在して, 任意の $n\in\mathbf{Z}$ に対して (4), (5) が成り立つ時, (γ,M) を**離散 Kirchhoff 弾性棒**という. γ を離散 Kirchhoff 弾性棒 (γ,M) の**中心線**, M を**物質枠**という. 定数 a は一意的に定まるが, これを離散 Kirchhoff 弾性棒 (γ,M) の**ツイスト率**という.

(4) の前進差分を計算することにより次が分かる. 枠付き離散曲線 (γ,M) が離散 Kirchhoff 弾性棒であるための必要十分条件は, ある $a\in\mathbf{R}$ 及び $I\in\mathbf{R}^3$ が存在して, 任意の $n\in\mathbf{Z}$ に対して

$$\begin{aligned}\frac{2}{l}T_n\times\left(\frac{T_{n+1}}{1+\langle T_n,T_{n+1}\rangle}+\frac{T_{n-1}}{1+\langle T_{n-1},T_n\rangle}\right)&\\ +2\nu a\left(\frac{T_n+T_{n+1}}{1+\langle T_n,T_{n+1}\rangle}-\frac{T_{n-1}+T_n}{1+\langle T_{n-1},T_n\rangle}\right)&=lT_n\times I,\end{aligned} \tag{6}$$

及び (5) が成り立つことである. なお, γ が離散直線ではない時は, a ばかりでなく I も一意的に定まることが容易に確かめられる.

さて, もし離散曲線 $\gamma:\mathbf{Z}\to\mathbf{R}^3$ と $a\in\mathbf{R}$ の組で, ある $I\in\mathbf{R}^3$ に対して (6) を満たすものが見つかったとすると, ツイスト率が定数 a になるように枠 M を取り付けることにより, 離散 Kirchhoff 弾性棒 (γ,M) が得られる. 正確に述べると, 次の命題が成り立つ.

命題 14. $\gamma:\mathbf{Z}\to\mathbf{R}^3$ を離散曲線とし, $a\in\mathbf{R}$ とする. もしある $I\in\mathbf{R}^3$ が存在して, 任意の $n\in\mathbf{Z}$ に対して (6) が成り立つとする. $M:\mathbf{Z}\to SO(3)$, $n\mapsto M_n$ を以下のように定める. まず, $M_0\in SO(3)$ を第 1 列が T_0 に一致するようなものとし, M_0 の第 2 列, 第 3 列を M_0^1, M_0^2 とおく. $M_n=(T_n,M_n^1,M_n^2)\in SO(3)$, $n\in\mathbf{Z}$ を次の関係式によって帰納的に定義する.

$$M_n=(\Pi_n(T_{n-1}),\ \Pi_n(M_{n-1}^1),\ \Pi_n(M_{n-1}^2))\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\psi&-\sin\psi\\0&\sin\psi&\cos\psi\end{pmatrix}. \tag{7}$$

ただし $\psi = 2\,\mathrm{Arctan}\,\dfrac{la}{2}(\in(-\pi,\pi))$ である．このように M を定めると, (γ, M) はツイスト率 a の離散 Kirchhoff 弾性棒になる.

従って全ての離散 Kirchhoff 弾性棒を求めるには, 離散曲線 γ と実数 a の組で, ある $I \in \mathbf{R}^3$ に対して (6) を満たすものを求めれば良い, ということになる.

4　離散 Frenet 枠, 拡張離散 Frenet 枠, 一般化離散 Frenet 枠

この節では, 滑らかな曲線の Frenet 枠及び捩率の離散化について述べる．4.1 では, 離散曲率が至る所正である離散曲線に対して, 離散 Frenet 枠及び捩れ角を定義する．4.2 と 4.3 では離散 Frenet 枠の欠点を補うためのものとして, これを少し変形したものを定義する.

4.1　離散 Frenet 枠

この小節では, 離散曲率が至る所正である離散曲線に対して, 離散 Frenet 枠及び捩れ角を定義する.

定義 15 ([11], etc.)**.** $\gamma : \mathbf{Z} \to \mathbf{R}^3$ を離散曲線で, 任意の $n \in \mathbf{Z}$ に対して $\kappa_n > 0$ を満たすものとする.

$$B_n = \frac{T_{n-1} \times T_n}{|T_{n-1} \times T_n|}, \qquad N_n = B_n \times T_n$$

と定義し, B_n を点 γ_n における γ の**離散陪法線ベクトル**, N_n を**離散主法線ベクトル**という．また, 正の正規直交枠 $F_n := (T_n, N_n, B_n)\,(\in SO(3))$ を点 γ_n における**離散 Frenet 枠**という.

γ の捩れ方を表す量として, 捩れ角を定義する．$A_n = B_n \times T_{n-1}$ とおくと, $(T_{n-1},\ A_n,\ B_n)$ は正の正規直交枠であるから, ある $\mu_n \in [-\pi, \pi)$ が一意的に存在して

$$(T_{n-1}, A_n, B_n) = (T_{n-1}, N_{n-1}, B_{n-1}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\mu_n & -\sin\mu_n \\ 0 & \sin\mu_n & \cos\mu_n \end{pmatrix} \tag{8}$$

が成り立つ.

定義 16 ([11], etc.)**.** $\gamma : \mathbf{Z} \to \mathbf{R}^3$ を離散曲線で, 任意の $n \in \mathbf{Z}$ に対して $\kappa_n > 0$ を満たすものとする．上で定義された $\mu_n \in [-\pi, \pi)$ を離散曲線 γ の点 γ_n における**捩れ角 (torsion angle)** という.

注 **17.** 離散曲率と同様に "離散捩率" を定義することも可能ではあるが, 本稿では, 捩れ角さえあれば特に議論に支障はないため, 離散捩率は定義しないことにする．本稿では離散曲率を $\kappa_n = \dfrac{2}{l}\tan\dfrac{\phi_n}{2}$, ツイスト率を $a_n = \dfrac{2}{l}\tan\dfrac{\psi_n}{2}$ と定義したので, 離散捩率を $\dfrac{2}{l}\tan\dfrac{\mu_n}{2}$ と定義したくなる．しかし, 捩れ角が $-\pi$ となる離散曲線は自然に現れるため, これが排除されてしまうような定義は適切とは思われない．例えば "ジグザグ型" の平面離散曲線 (曲がり角が一定だが, T_n の回る向きが時計回りと反時計回りを交互に繰り返すもの) がそのような例となっている．もし敢えて離散捩率を定義するならば $\dfrac{\mu_n}{l}$ が妥当かもしれない．

$T_n = \cos\phi_n T_{n-1} + \sin\phi_n A_n$ であるから

$$F_n = (T_{n-1}, A_n, B_n)\begin{pmatrix}\cos\phi_n & -\sin\phi_n & 0\\ \sin\phi_n & \cos\phi_n & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

が成り立つ．よって F_n と F_{n-1} は次の関係式を満たす．

$$F_n = F_{n-1}\begin{pmatrix}\cos\phi_n & -\sin\phi_n & 0\\ \sin\phi_n\cos\mu_n & \cos\phi_n\cos\mu_n & -\sin\mu_n\\ \sin\phi_n\sin\mu_n & \cos\phi_n\sin\mu_n & \cos\mu_n\end{pmatrix}. \tag{9}$$

関係式 (9) は**離散 Frenet 公式**とよばれる．

なお, 滑らかな曲線の場合の曲線論の基本定理に相当するものが離散の場合にも成立するが, これについては次の小節で少し拡張した形で述べる．

4.2 拡張離散 Frenet 枠

この小節では離散曲率が零点を持ちうる場合を考える．4.1 で定義した離散 Frenet 枠や捩れ角は離散曲率の零点上では定義できず, 計算を行う上で大変不便なので, これらの定義域を $\mathbf{Z}$ 全体に拡張することを考える．具体的には, 離散直線ではない任意の離散曲線に対して, 拡張離散 Frenet 枠, 拡張捩れ角とよぶものを定義する．これらの定義は非常に便宜的なものではあるが, $\mathbf{Z}$ 全体の上で一意的に定まり, 離散曲率の零点を気にすることなく計算が行えるので, 離散 Kirchhoff 弾性棒の計算においても有効に使われる．

以下, 次の記号を用いる．

$$\mathcal{C} = \{\gamma : \mathbf{Z} \to \mathbf{R}^3\,;\, \gamma \text{ は離散曲線 }\},\quad \mathcal{C}^s = \{\gamma \in \mathcal{C}\,;\, \gamma \text{ は離散直線 }\}.$$

また, 連続した整数の集合を表すため, 添え字集合 Λ を

$$\Lambda = \{(p,q);\ p \in \{-\infty\}\cup\mathbf{Z},\ q \in \mathbf{Z}\cup\{\infty\},\ (p,q) \neq (-\infty,\infty),\ q-p \geqslant 2\}$$

と定義し, $(p,q)\in\Lambda$ に対して $Z_{(p,q)}(\subset\mathbf{Z})$ を

$$Z_{(p,q)}=\mathbf{Z}\cap(p,q)$$

によって定義する．なお, 右辺の (p,q) は Λ の元ではなく, 開区間 $(p,q)\subset\mathbf{R}$ を表している．(同じ記号 (p,q) に 2 つの意味を持たせるが, 混乱は起こらないであろう．) すると, 任意の $X(\subsetneq\mathbf{Z})$ に対して, Λ のある部分集合 Ω が一意的に存在して次の (10), (11) が成り立つことが分かる．

$$X=\bigcup_{(p,q)\in\Omega}Z_{(p,q)}, \tag{10}$$

$$(p_1,q_1),\,(p_2,q_2)\in\Omega,\ (p_1,q_1)\neq(p_2,q_2)\ \text{ならば}\ (p_1,q_1)\cap(p_2,q_2)=\emptyset. \tag{11}$$

なお, 条件 (11) により (10) の右辺の和は非交和である．

$\gamma\in\mathcal{C}\setminus\mathcal{C}^s$ とする．$\kappa_n>0$ なる n に対しては定義 15 と同様にして離散 Frenet 枠 $F_n=(T_n,N_n,B_n)$ が定義できる．また $\kappa_n>0$ かつ $\kappa_{n-1}>0$ なる n に対しては, 定義 16 と同様に捩れ角 μ_n が定義でき, 離散 Frenet 公式 (9) も成立する．以下, F_n, μ_n を任意の $n\in\mathbf{Z}$ に対して拡張し, (9) も任意の $n\in\mathbf{Z}$ で成り立つようにしたい．

X_κ を離散曲率 $\kappa:\mathbf{Z}\to\mathbf{R}$ の零点集合, 即ち

$$X_\kappa=\{n\in\mathbf{Z}\,;\,\kappa_n=0\}$$

とする．$X=X_\kappa$ に対して (10), (11) を満たす $\Omega(\subset\Lambda)$ が定まるが, これを Ω_κ と書くことにする．

X_κ 上で F_n を定義するには, 各 $(p,q)\in\Omega_\kappa$ に対して $Z_{(p,q)}$ 上で F_n を定義すればよい．p, q の値によって 3 つに場合分けをする．

Case 1. $p,\ q\in\mathbf{Z}$ の時

この時は $Z_{(p,q)}=\{p+1,\dots,q-1\}$ である．$\kappa_p>0$, $\kappa_q>0$ であるから, B_p, B_q は既に定義されており, B_p と B_q は共に $T_p(=T_{p+1}=\cdots=T_{q-1})$ に垂直である．よってある $-\pi\leqslant\varphi<\pi$ が一意的に存在して $B_q=-\sin\varphi N_p+\cos\varphi B_p$ が成り立つ．ここで角 φ を $q-p$ 等分することにより $B_{p+1},\dots,B_{q-1}$ を定義する．即ち

$$B_n=-\sin\frac{(n-p)\varphi}{q-p}N_p+\cos\frac{(n-p)\varphi}{q-p}B_p,\quad n\in Z_{(p,q)}$$

と定義する．

Case 2. $p\in\mathbf{Z}$, $q=\infty$ の時

$Z_{(p,\infty)} = \{n \in \mathbf{Z}\,;\, n \geqslant p+1\}$ であり, $\kappa_p > 0$ である．この時は

$$B_n = B_p, \quad n \in Z_{(p,\infty)}$$

と定義する．

Case 3. $p = -\infty$, $q \in \mathbf{Z}$ の時

$Z_{(-\infty,q)} = \{n \in \mathbf{Z}\,;\, n \leqslant q-1\}$ であり, $\kappa_q > 0$ である．この時は

$$B_n = B_q, \quad n \in Z_{(-\infty,q)}$$

と定義する．

Case 1, Case 2, Case 3 の全ての場合について, $N_n = B_n \times T_n$, $F_n = (T_n, N_n, B_n)$ と定義する．以上により X_κ 上で F_n が定義され, 従って任意の $n \in \mathbf{Z}$ に対して F_n が定義された．

次に μ_n を任意の $n \in \mathbf{Z}$ に拡張する．“$\kappa_n > 0$ かつ $\kappa_{n-1} > 0$” を満たす n に対しては既に μ_n は定義されているので, この条件を満たさないような n について考える．次の 3 つに場合分けできる．

(i) $n \in Z_{(p,q)} \cup \{q\}$ の時．ただし $p, q \in \mathbf{Z}$, $(p,q) \in \Omega$.
(ii) $n \in Z_{(p,\infty)}$ の時．ただし $p \in \mathbf{Z}$, $(p,\infty) \in \Omega$.
(iii) $n \in Z_{(-\infty,q)} \cup \{q\}$ の時．ただし $q \in \mathbf{Z}$, $(-\infty,q) \in \Omega$.

(i), (ii), (iii) の何れの場合も $B_n \in \mathrm{Span}\{N_{n-1}, B_{n-1}\}$ が成り立つから, $A_n = B_n \times T_{n-1}$ と定義すれば, (8) を満たす $\mu_n \in [-\pi, \pi)$ が一意的に存在することが分かる．具体的には,

$$\text{(i) の時は } \mu_n = \frac{\varphi}{q-p}, \quad \text{(ii) の時は } \mu_n = 0, \quad \text{(iii) の時は } \mu_n = 0,$$

となる．以上により, 任意の $n \in \mathbf{Z}$ に対して μ_n が定義できた．

定義 18. $\gamma \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}^s$ とする．上のように定義された $F_n = (T_n, N_n, B_n) \in SO(3)$, $n \in \mathbf{Z}$ を離散曲線 γ の点 γ_n における**拡張離散 Frenet 枠** と言う．また上のように定義された $\mu_n \in [-\pi, \pi)$, $n \in \mathbf{Z}$ を離散曲線 γ の点 γ_n における**拡張捩れ角** と言う．なお, $\kappa_n > 0$ なる n に対しては F_n は通常の離散 Frenet 枠と一致し, $\kappa_n > 0$ かつ $\kappa_{n-1} > 0$ を満たす n に対しては μ_n は通常の捩れ角と一致する．

$\gamma \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}^s$ とし, F_n, ϕ_n, μ_n を γ の点 γ_n における拡張 Frenet 枠, 曲がり角, 拡張捩れ

角とすると, 任意の $n \in \mathbf{Z}$ に対して離散 Frenet 公式 (9) が成り立つことが容易に確かめられる.

次に, $\mathcal{C}\setminus\mathcal{C}^s$ 内の離散曲線に対する “基本定理” について述べる (命題 19). 離散曲線の同値関係の定義についてはいくつかの選択肢があるが, 滑らかな曲線の時と同様に, $\mathbf{R}^3$ の向きを保つ運動で写りあえるものを同値と定める. 即ち次のように定義する. $\gamma, \widehat{\gamma} \in \mathcal{C}\setminus\mathcal{C}^s$ とする. ある $S \in SO(3)$, $\boldsymbol{b} = {}^t(b_1, b_2, b_3) \in \mathbf{R}^3$ が存在して $\widehat{\gamma}_n = S\gamma_n + \boldsymbol{b}$, ${}^\forall n \in \mathbf{Z}$ が成り立つ時, $\gamma \sim_+ \widehat{\gamma}$ と書き, γ と $\widehat{\gamma}$ は $E^+(3)$ 同値であるという. $\sim_+$ は $\mathcal{C}\setminus\mathcal{C}^s$ 上の同値関係となり, γ を含む同値類を $[\gamma]_+$ と書く.

商集合 $(\mathcal{C}\setminus\mathcal{C}^s)/{\sim_+}$ に対応する “離散曲線の形を表すデータの集合” を定義しよう. 集合 $\mathcal{M} \subset \mathrm{Map}(\mathbf{Z}, [0,\infty)) \times \mathrm{Map}(\mathbf{Z}, [-\pi,\pi))$ を

$\mathcal{M} = \{(\kappa,\mu)\,;\, \kappa : \mathbf{Z} \to [0,\infty)$ は恒等的に零でない関数, また $\mu : \mathbf{Z} \to [-\pi,\pi)$ は次の
(i), (ii), (iii) を満たす関数.
(i) $(p,q) \in \Omega_\kappa$ $(p,\, q \in \mathbf{Z})$ ならば, $Z_{(p,q)} \cup \{q\}$ 上で関数 μ は一定 $(\geqslant 0)$.
(ii) $(p,\infty) \in \Omega_\kappa$ $(p \in \mathbf{Z})$ ならば, $Z_{(p,\infty)}$ 上で関数 μ は恒等的に 0.
(iii) $(-\infty,q) \in \Omega_\kappa$ $(q \in \mathbf{Z})$ ならば, $Z_{(-\infty,q)} \cup \{q\}$ 上で関数 μ は恒等的に 0. $\}$

と定義する. $\gamma \in \mathcal{C}\setminus\mathcal{C}^s$ に対して, γ の離散曲率 $\kappa : \mathbf{Z} \to [0,\infty)$ と拡張捩れ角 $\mu : \mathbf{Z} \to [-\pi,\pi)$ の組 (κ,μ) は $\mathcal{M}$ の元となる. $\gamma \in \mathcal{C}\setminus\mathcal{C}^s$ に $(\kappa,\mu) \in \mathcal{M}$ を対応させる写像を

$$\mathcal{G} : \mathcal{C}\setminus\mathcal{C}^s \to \mathcal{M}$$

とおく. このとき, 次の命題 (曲線論の基本定理の離散版) が成り立つ.

命題 19. $\gamma,\ \widehat{\gamma} \in \mathcal{C}\setminus\mathcal{C}^s$ とする. もし $\gamma \sim_+ \widehat{\gamma}$ ならば, $\mathcal{G}(\gamma) = \mathcal{G}(\widehat{\gamma})$ が成り立つ. 従って, 写像 $\overline{\mathcal{G}} : (\mathcal{C}\setminus\mathcal{C}^s)/{\sim_+} \to \mathcal{M}$, $\overline{\mathcal{G}}([\gamma]_+) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathcal{G}(\gamma)$ が誘導される. さらに, 写像 $\overline{\mathcal{G}} : (\mathcal{C}\setminus\mathcal{C}^s)/{\sim_+} \to \mathcal{M}$ は全単射である.

4.3 一般化離散 Frenet 枠, 符号付き離散曲率

あるクラスの滑らかな曲線, 例えば “捩れ方が一定” な曲線 (平面曲線を含む) を扱う場合, 通常の曲率と Frenet 枠よりも符号付き曲率及びこれに付随する一般化 Frenet 枠 (generalized Frenet frame (cf. [6], [13], etc.)) を使った方が便利である. ここでは, これらの離散化として符号付き離散曲率及び一般化離散 Frenet 枠を定義する. なお, これらの概念は以下で述べるよりも一般の状況で定義することが可能であるが, ここでは

離散 Kirchhoff 弾性棒の議論に必要な“捩れ方が一定”の場合に限定した定義を述べる．より一般な定義については, [12] (第 3 節の “a modified version of the ordinary Frenet frame”) を参照せよ．

以下, T_n を軸とする角 $\psi\,(\in \mathbf{R})$ の回転を

$$\mathcal{R}_n(\psi) : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$$

と表すことにする．

定義 20. $\gamma : \mathbf{Z} \to \mathbf{R}^3$ を離散曲線とし, $\mu \in [-\pi, \pi)$ を定数とする．もし, ある $\widetilde{B} : \mathbf{Z} \to S^2(= \{X \in \mathbf{R}^3; |X| = 1\})$, $n \mapsto \widetilde{B}_n$ で, 次の (i), (ii) を満たすものが存在する時, γ を**定捩れ角 μ の離散曲線**という．

(i) $\langle T_{n-1}, \widetilde{B}_n\rangle = \langle T_n, \widetilde{B}_n\rangle = 0$, ${}^\forall n \in \mathbf{Z}$,

(ii) $\widetilde{B}_n = \mathcal{R}_{n-1}(\mu)(\widetilde{B}_{n-1})$, ${}^\forall n \in \mathbf{Z}$.

注 21. “定捩れ角 μ の離散曲線” と “拡張捩れ角 μ_n が $\mu_n = \mu$ (${}^\forall n \in \mathbf{Z}$) を満たす離散曲線” とは全く別の概念である．

$\gamma : \mathbf{Z} \to \mathbf{R}^3$ を定捩れ角 μ の離散曲線とする．$\kappa_n > 0$ であるような n に対しては, 通常の離散陪法線ベクトル B_n が定義されているが, B_n と $\widetilde{B}_n$ は関係式 $\widetilde{B}_n = \pm B_n$ を満たすことが (i) より容易に分かる．ただし, 複号が $+$ になるか $-$ になるかは n に依存する．

$\gamma : \mathbf{Z} \to \mathbf{R}^3$ を定捩れ角 μ の離散曲線とする時, (i), (ii) を満たす写像 $\widetilde{B} : \mathbf{Z} \to S^2$ が存在するが, これは一意的ではない．具体的には次が成り立つ．γ が離散直線の場合, (i), (ii) を満たす写像 $\widetilde{B}$ は無限個存在する．γ が離散直線ではない場合, (i), (ii) を満たす写像 $\widetilde{B}$ はちょうど 2 つ存在し, その内の一つはもう片方の -1 倍となる．

定捩れ角 μ の離散曲線 $\gamma : \mathbf{Z} \to \mathbf{R}^3$ に対して, 一般化離散 Frenet 枠, 符号付き曲がり角, 符号付き離散曲率を定義しよう．まず (i), (ii) を満たす $\widetilde{B}$ を一つとる．

$$\widetilde{N}_n = \widetilde{B}_n \times T_n, \quad \widetilde{A}_n = \widetilde{B}_n \times T_{n-1},$$

とおくと, (ii) により

$$(T_{n-1}, \widetilde{A}_n, \widetilde{B}_n) = (T_{n-1}, \widetilde{N}_{n-1}, \widetilde{B}_{n-1}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\mu & -\sin\mu \\ 0 & \sin\mu & \cos\mu \end{pmatrix} \tag{12}$$

が成り立つ．また, ある $\widetilde{\phi}_n \in (-\pi, \pi)$ で

$$(T_n, \widetilde{N}_n, \widetilde{B}_n) = (T_{n-1}, \widetilde{A}_n, \widetilde{B}_n) \begin{pmatrix} \cos\widetilde{\phi}_n & -\sin\widetilde{\phi}_n & 0 \\ \sin\widetilde{\phi}_n & \cos\widetilde{\phi}_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

を満たすものがただ一つ存在することが分かる．注意すべきことは, 必ずしも $\widetilde{\phi}_n \in [0, \pi)$ は成り立たないということである．一方, 通常の曲がり角 ϕ_n は $\phi_n \in [0, \pi)$ を満たす．

定義 22. $\gamma : \mathbf{Z} \to \mathbf{R}^3$ を定捩れ角 $\mu\,(\in [-\pi, \pi))$ の離散曲線とし, $\widetilde{B} : \mathbf{Z} \to S^2$ を定義 20 の (i), (ii) を満たすものとする．$\widetilde{N}_n = \widetilde{B}_n \times T_n$, $\widetilde{F}_n = (T_n, \widetilde{N}_n, \widetilde{B}_n)$ とおく．写像 $\widetilde{F} : \mathbf{Z} \to SO(3)$, $n \mapsto \widetilde{F}_n$ を γ の ($\widetilde{B}$ に付随する) **一般化離散 Frenet 枠**という．また, (13) によって定義される写像 $\widetilde{\phi} : \mathbf{Z} \to (-\pi, \pi)$, $n \mapsto \widetilde{\phi}_n$ を γ の ($\widetilde{B}$ に関する) **符号付き曲がり角**という．また, $\widetilde{\kappa}_n = \dfrac{2}{l} \tan \dfrac{\widetilde{\phi}_n}{2}$ と定義し, 写像 $\widetilde{\kappa} : \mathbf{Z} \to \mathbf{R}$, $n \mapsto \widetilde{\kappa}_n$ を γ の ($\widetilde{B}$ に関する) **符号付き離散曲率**という．

注 23. 上の定義において, $-\widetilde{B} : \mathbf{Z} \to S^2$, $n \mapsto -\widetilde{B}_n$ も定義 20 の (i), (ii) を満たすことに注意する．γ の $-\widetilde{B}$ に付随する一般化離散 Frenet 枠は $n \mapsto (T_n, -\widetilde{N}_n, -\widetilde{B}_n)$, γ の $-\widetilde{B}$ に関する符号付き曲がり角は $n \mapsto -\widetilde{\phi}_n$, γ の $-\widetilde{B}$ に関する符号付き離散曲率は $n \mapsto -\widetilde{\kappa}_n$ となる．

(12), (13) により次を得る (定捩れ角 μ の離散曲線に対する離散 Frenet 公式).

$$\widetilde{F}_n = \widetilde{F}_{n-1} \begin{pmatrix} \cos\widetilde{\phi}_n & -\sin\widetilde{\phi}_n & 0 \\ \sin\widetilde{\phi}_n \cos\mu & \cos\widetilde{\phi}_n \cos\mu & -\sin\mu \\ \sin\widetilde{\phi}_n \sin\mu & \cos\widetilde{\phi}_n \sin\mu & \cos\mu \end{pmatrix}. \tag{14}$$

次に定捩れ角 μ の離散曲線に対する “基本定理” を述べる (命題 19)．命題を明確に述べるため, 次の集合上で考える．$\mu \in [-\pi, \pi)$, $m \in \mathbf{Z}$ に対して

$$\mathcal{C}_{\mu,m} := \{\gamma : \mathbf{Z} \to \mathbf{R}^3\,;\, \gamma \text{ は定捩れ角 } \mu \text{ の離散曲線で } \kappa_m \neq 0 \text{ を満たす }\}$$

と定義する．$\gamma \in \mathcal{C}_{\mu,m}$ に対して, その符号付き離散曲率 $\widetilde{\kappa} : \mathbf{Z} \to \mathbf{R}$ は一意的には定まらず, ± 1 倍だけの自由度があるので, それら 2 つを区別するため, 次の用語を使うことにする．$\widetilde{\kappa}_m > 0$ (resp. $\widetilde{\kappa}_m < 0$) の時, $\widetilde{\kappa}$ は m で**整合的** (resp. **反整合的**) であるという．

商集合 $\mathcal{C}_{\mu,m}/\sim_+$ に対応する “データの集合” を次のように定義する．

$$\mathrm{Map}(\mathbf{Z}, \mathbf{R})_m := \{\widetilde{\kappa} : \mathbf{Z} \to \mathbf{R}\,;\, \widetilde{\kappa}_m > 0\}.$$

$\gamma \in \mathcal{C}_{\mu,m}$ に対して, m で整合的な γ の符号付き離散曲率を $\widetilde{\kappa}$ とおくと, $\widetilde{\kappa} \in \mathrm{Map}(\mathbf{Z},\mathbf{R})_m$ が成り立つ．$\gamma \in \mathcal{C}_{\mu,m}$ に $\widetilde{\kappa} \in \mathrm{Map}(\mathbf{Z},\mathbf{R})_m$ を対応させる写像を

$$\mathcal{H} : \mathcal{C}_{\mu,m} \to \mathrm{Map}(\mathbf{Z},\mathbf{R})_m$$

とおく．すると, 次の命題 (曲線論の基本定理の定振れ角離散曲線版) が成り立つ.

命題 24. $\gamma,\ \gamma^* \in \mathcal{C}_{\mu,m}$ とする．もし $\gamma \sim_+ \gamma^*$ ならば, $\mathcal{H}(\gamma) = \mathcal{H}(\gamma^*)$ が成り立つ．従って写像 $\overline{\mathcal{H}} : \mathcal{C}_{\mu,m}/{\sim_+} \to \mathrm{Map}(\mathbf{Z},\mathbf{R})_m,\ \overline{\mathcal{H}}([\gamma]_+) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathcal{H}(\gamma)$ が誘導される．さらに, 写像 $\overline{\mathcal{H}} : \mathcal{C}_{\mu,m}/{\sim_+} \to \mathrm{Map}(\mathbf{Z},\mathbf{R})_m$ は全単射である.

5 主結果

この節では離散 Kirchhoff 弾性棒の分類定理 (定理 28) について述べる.

以下, $K = K(p)$ を楕円母数 $0 \leqslant p \leqslant 1$ に対する第一種完全楕円積分, $F = F(\phi, p)$ を第一種不完全楕円積分, 即ち

$$K(p) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - p^2 \sin^2 \phi}}, \qquad F(\phi,p) = \int_0^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - p^2 \sin^2 \phi}},$$

とする．以降, 単に K と書けば常に $K(p)$ を意味するものとする．また $\mathrm{sn}(u,p)$, $\mathrm{cn}(u,p)$ をそれぞれ Jacobi の sn, cn 関数, 即ち $\mathrm{sn}(u,p) = \sin(\mathrm{am}(u,p))$, $\mathrm{cn}(u,p) = \cos(\mathrm{am}(u,p))$ とする．ここで $\mathrm{am}(u,p)$ は振幅関数, 即ち関数 $\phi \mapsto u = F(\phi,p)$ の逆関数である．また, 次の記号を用いる.

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L} = \{(\gamma, M)\,;\, (\gamma, M) \text{ は枠付き離散曲線 }\},\\
&\mathcal{K} = \{(\gamma, M) \in \mathcal{L}\,;\, (\gamma, M) \text{ は離散 Kirchhoff 弾性棒 }\},\\
&\mathcal{K}^s = \{(\gamma, M) \in \mathcal{K}\,;\, \gamma \text{ は離散直線 }\} = \{(\gamma, M) \in \mathcal{K}\,;\, \kappa_n = 0, {}^{\forall} n \in \mathbf{Z}\}.
\end{aligned}$$

2 つの枠付き離散曲線が合同であることを以下のように定義する.

定義 25. $(\gamma, M), (\widehat{\gamma}, \widehat{M}) \in \mathcal{L}$ とする．ここで $M_n = (T_n, M_n^1, M_n^2)$, $\widehat{M}_n = (\widehat{T}_n, \widehat{M}_n^1, \widehat{M}_n^2)$ である．ある $S \in O(3)$, $\boldsymbol{b} = {}^t(b_1, b_2, b_3) \in \mathbf{R}^3$, $\varphi \in [-\pi, \pi)$ が存在して

$$\begin{aligned}
&\widehat{\gamma}_n = S\gamma_n + \boldsymbol{b},\\
&(\widehat{M}_n^1, \widehat{M}_n^2) = (SM_n^1, (\det S) SM_n^2) \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad {}^{\forall} n \in \mathbf{Z}
\end{aligned} \tag{15}$$

が成り立つ時, $(\gamma, M) \sim (\widehat{\gamma}, \widehat{M})$ と書き, (γ, M) と $(\widehat{\gamma}, \widehat{M})$ は合同であるという．$\sim$ は $\mathcal{L}$ 上の同値関係となる．(γ, M) を含む同値類を $[(\gamma, M)]$ と書く.

さて, $(\gamma, M) \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{K}^s$ とし, (γ, M) のツイスト率を a とする．するとある $I \in \mathbf{R}^3$ が一意的に存在して方程式 (6) が成り立つ．γ の拡張離散 Frenet 枠を (T_n, N_n, B_n), 離散曲率を κ_n, 拡張振れ角を μ_n とし, (6) を T_n, N_n, B_n で表して計算することにより, 次の補題が示せる．以下, 式を簡単に表すため次のようにおく．

$$\mathscr{A}_n = \cos\mu_n + \nu a l \sin\mu_n, \quad \mathscr{B}_n = \sin\mu_n - \nu a l \cos\mu_n.$$

補題 26. ある $h \in \mathbf{R}$ が一意的に存在して, 任意の $n \in \mathbf{Z}$ に対して

$$\begin{aligned} I = &\left(\frac{\kappa_n \kappa_{n+1} \mathscr{A}_{n+1}}{2} - \frac{h\sqrt{1+\nu^2 a^2 l^2} - 2}{l^2} \right) T_n \\ &+ \frac{\kappa_{n+1}\mathscr{A}_{n+1} - \kappa_n}{l} N_n + \frac{\kappa_{n+1}\mathscr{B}_{n+1} - \nu a l \kappa_n}{l} B_n \end{aligned} \tag{16}$$

が成り立つ．さらに κ, μ は方程式

$$\kappa_n \mathscr{A}_{n+1} + \kappa_{n+2} \mathscr{A}_{n+2} = \frac{h\sqrt{1+\nu^2 a^2 l^2}\, \kappa_{n+1}}{1 + \frac{l^2}{4}\kappa_{n+1}^2}, \tag{17}$$

$$\kappa_n \mathscr{B}_{n+1} - \kappa_{n+2} \mathscr{B}_{n+2} = 0, \tag{18}$$

を満たす．

パラメータ h が零か否かで議論が大きく異なるので場合分けをする．

$$\mathcal{K}^g = \{(\gamma, M) \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{K}^s \,;\, h \neq 0\}, \quad \mathcal{K}^e = \{(\gamma, M) \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{K}^s \,;\, h = 0\},$$

とおく．$\mathcal{K} = \mathcal{K}^g \cup \mathcal{K}^e \cup \mathcal{K}^s$(非交和) が成り立つことに注意する．$\mathcal{K}^e$ 及び $\mathcal{K}^s$ の元の分類は比較的容易にできるが, これらは例外的な対象なので, 簡単のため, 本稿では $\mathcal{K}^g$ の元の分類のみを述べることにする．

$\mathcal{K}^g$ の合同類全体のなす集合 $\mathcal{K}^g/\!\sim$ に対応するパラメータ空間を定義しよう．集合 $\mathcal{D}^g \subset \mathbf{R}^5$ を次で定義する．

$$\mathcal{D}^g = \{(\eta, d_1, h, d_3, s) \in \mathbf{R}^5 \,;\, \text{次の (i), (ii), (iii), (iv) を満たす}\,\} \tag{19}$$

(i) (d_1, h) は次を満たす．

“$0 < |h| \leqslant 2$ and $d_1 > h^2 + 2$” or “$|h| > 2$ and $d_1 \geqslant \dfrac{h^2}{2} + 2|h|$”.

(ii) d_3 は次を満たす．

$$\xi(\lambda_2) \leqslant d_3 \leqslant \xi(1)\,(\leqslant \xi(\lambda_1)).$$

ただし, $d_2=-h^2$ とおき, 関数 $f(x)$, $g(x)$, $\xi(x)$ を

$$f(x)=-8x^3+2d_1x+d_2, \tag{20}$$

$$g(x)=-2x^3+d_1x+d_2, \tag{21}$$

$$\xi(x)=-\frac{4d_2x^3+(d_1x+d_2)^2}{4x^2}, \tag{22}$$

と定義する．また，3 次方程式 $g(x)=0$ の解を $\lambda_0<0<\lambda_1<\lambda_2$ とおく．(条件 (i) により $g(x)=0$ がこのような解を必ず持つことが示せる．) なお, λ_0, λ_1, λ_2 は次のように表せる．

$$\lambda_0=-2\sqrt{\frac{d_1}{6}}\cos\left(\frac{1}{3}\operatorname{Arccos}\sqrt{\frac{27d_2^2}{2d_1^3}}\right),$$

$$\lambda_1=-2\sqrt{\frac{d_1}{6}}\cos\left(\frac{1}{3}\operatorname{Arccos}\sqrt{\frac{27d_2^2}{2d_1^3}}-\frac{2\pi}{3}\right),$$

$$\lambda_2=-2\sqrt{\frac{d_1}{6}}\cos\left(\frac{1}{3}\operatorname{Arccos}\sqrt{\frac{27d_2^2}{2d_1^3}}+\frac{2\pi}{3}\right).$$

(iii) s は次を満たす．

$\xi(\lambda_2)<d_3<\xi(\lambda_1)$ の時, $s\in\left[0,\frac{1}{2q}\right)$,

$d_3=\xi(\lambda_1)$ の時, $s\in\mathbf{R}$,

$d_3=\xi(\lambda_2)$ の時, $s=0$.

ただし q は以下のように定義する．まず条件 (i), (ii) より,

$$\xi(B)=d_3,\quad \lambda_1\leqslant B\leqslant\lambda_2$$

を満たす実数 B がただ一つ存在することが分かる．(B の表示式については下の注 27 を見よ．) G, D, p, q を

$$G=\frac{2d_1B+d_2-\sqrt{16d_2B^3+(2d_1B+d_2)^2}}{8B^2}, \tag{23}$$

$$D=\frac{2d_1B+d_2+\sqrt{16d_2B^3+(2d_1B+d_2)^2}}{8B^2}, \tag{24}$$

$$p=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{f(B)}{2\sqrt{f(B)^2+32B^3g(B)}}}=\sqrt{\frac{D-B}{D-G}}, \tag{25}$$

$$q=\frac{1}{4K}F\left(\operatorname{Arccos}\left(-\sqrt{1-\frac{G}{B}}\right),p\right)-\frac{1}{4}, \tag{26}$$

と定義する．(なお, G, B, D は $0 < G \leqslant B \leqslant D$ を満たす方程式 $\xi(x) = d_3$ の解であり, また $0 \leqslant p \leqslant 1$ が成立する．)

(iv) η は次を満たす.

$d_3 < \xi(1)$ の時, $\eta \in \mathbf{R}$,

$d_3 = \xi(1)$ の時, $\eta \geqslant 0$.

注 27. B は d_1, d_2, d_3 を用いて次のように表せる．まず, $d_3 = \xi(\lambda_1)$ の時, $B = \lambda_1$ であり, $d_3 = \xi(\lambda_2)$ の時, $B = \lambda_2$ である．また, $\xi(\lambda_2) < d_3 < \xi(\lambda_1)$ の時,

$$B = -2\sqrt{\alpha}\cos\left(\frac{1}{3}\operatorname{Arccos}\frac{\beta}{\alpha^{3/2}} - \frac{2\pi}{3}\right) - \frac{d_1^2 + 4d_3}{12d_2}$$

である．ただし

$$\alpha = \frac{1}{9}\left(\frac{d_1^2 + 4d_3}{4d_2}\right)^2 - \frac{d_1}{6},$$
$$\beta = \frac{1}{27}\left(\frac{d_1^2 + 4d_3}{4d_2}\right)^2 - \frac{d_1}{12}\frac{d_1^2 + 4d_3}{4d_2} + \frac{d_2}{8},$$

とおいた.

この時, 次の定理が成り立つ．定理の中に出てくる複号は全て同順である．(なお, 複合の上側から作られる離散 Kirchhoff 弾性棒を (15) の変換 (ただし S は向きを変える直交行列) で写すと複合の下側から作られる離散 Kirchhoff 弾性棒となり, これら 2 つは合同である．)

定理 28. 任意の $(\eta, d_1, h, d_3, s) \in \mathcal{D}^g$ をとる．定数 a, 及び数列 κ_n, $n \in \mathbf{Z}$ を

$$a = \pm\frac{\eta}{l}, \quad \kappa_n = \frac{2}{l}\sqrt{v_n - 1},$$

と定義する．ただし v_n は以下の通りである.

Case 1. $\xi(\lambda_2) < d_3 < \xi(\lambda_1)$ の時

$$v_n = (D - B)\operatorname{cn}^2(r(n - s), p) + B,$$

ここで $r = 4Kq$ である.

Case 2. $d_3 = \xi(\lambda_1)$ の時 (“孤立波型”)

$$v_n = \frac{d_1 - 6\lambda_1^2}{4\lambda_1}\operatorname{sech}^2(r(n - s)) + B,$$

ここで $r = \dfrac{1}{2}\log \dfrac{d_1 - 4\lambda_1^2 + \sqrt{(d_1 - 6\lambda_1^2)(d_1 - 2\lambda_1^2)}}{2\lambda_1^2}$ である.

Case 3. $d_3 = \xi(\lambda_2)$ の時 ("常螺旋型")

$$v_n = B.$$

さて, 枠付き離散曲線 (γ, M) を以下の (i), (ii) により定義する.

(i) "Case. 1 かつ $B > 1$" または Case. 2 または Case. 3 の時 (なお, この時は $\kappa_n > 0, {}^\forall n \in \mathbf{Z}$ となる.)

数列 $\mu_n (\in [-\pi, \pi))$ を以下によって定義する.

$$\begin{pmatrix} \cos \mu_{n+1} \\ \sin \mu_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\kappa_n \kappa_{n+1}(1 + \nu^2 a^2 l^2)} \begin{pmatrix} 1 & -\nu a l \\ \nu a l & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathscr{P}_n \\ lb \end{pmatrix},$$

ただし

$$\mathscr{P}_n = \frac{4\sqrt{1 + \nu^2 \eta^2}}{l^2 h} \left(v_n v_{n+1} - \frac{d_1 - h^2}{2} \right),$$
$$b = \pm \frac{4\sqrt{1 + \nu^2 \eta^2}}{l^3 h} \sqrt{\xi(1) - d_3},$$

である. $\gamma : \mathbf{Z} \to \mathbf{R}^3$ を離散曲率が κ_n, 拡張捩れ角が μ_n であるような離散曲線とし, (γ, M) を枠付き離散曲線でツイスト率が定数 a になるようなものとする.

(ii) "Case. 1 かつ $B = 1$"の時

数列 $\widetilde{\kappa}_n$, $n \in \mathbf{Z}$ を次で定義する.

$$\widetilde{\kappa}_n = \frac{2\sqrt{D - 1}}{l} \operatorname{cn}(r(n - s), p),$$

ここで $r = 4Kq$ である. また定数 $\varphi \in [-\pi, \pi)$ を次により定義する.

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1 + \nu^2 a^2 l^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \nu a l \end{pmatrix}, & \text{if } h > 0, \\ \dfrac{-1}{\sqrt{1 + \nu^2 a^2 l^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \nu a l \end{pmatrix}, & \text{if } h < 0. \end{cases}$$

$\gamma : \mathbf{Z} \to \mathbf{R}^3$ を定捩れ角 φ の離散曲線で, 符号付き離散曲率が $\widetilde{\kappa}_n$ であるようなものとし, (γ, M) を枠付き離散曲線でツイスト率が定数 a になるようなものとする.

この時, $(\gamma, M) \in \mathcal{K}^g$ が成立する. さらに, $(\eta, d_1, h, d_3, s) \in \mathcal{D}^g$ を (γ, M) の合同類 $[(\gamma, M)] \in \mathcal{K}^g/\!\sim$ に写す写像は $\mathcal{D}^g$ から $\mathcal{K}^g/\!\sim$ への全単射となる.

(明示公式の求め方の概略).

定理 28 の証明の詳細は省略するが, $(\gamma, M) \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{K}^s$ が与えられた時, κ_n, $\cos\mu_{n+1}$, $\sin\mu_{n+1}$ の明示公式をどのように求めるかについて, 概略を述べておく. ここでは簡単のため, $\kappa_n > 0$, ${}^\forall n \in \mathbf{Z}$ が成り立つと仮定する.

まず上で述べたように補題 26 が成り立つ. 以下,

$$\mathscr{P}_n = \kappa_n\kappa_{n+1}\mathscr{A}_{n+1}, \quad \mathscr{Q}_n = \kappa_n\kappa_{n+1}\mathscr{B}_{n+1},$$

とおく. 方程式 (18) の両辺に κ_{n+1} を掛けることにより, ある $b \in \mathbf{R}$ が存在して

$$\mathscr{Q}_n = lb, \quad {}^\forall n \in \mathbf{Z} \tag{27}$$

が成り立つことが分かる.

また定数 ι を $\iota := |I|$ で定義する. ι^2 を (16) の右辺の長さの 2 乗を計算することによって求め, これに (27) を代入することにより

$$\begin{aligned}\mathscr{P}_n =& \frac{\sqrt{1+\nu^2a^2l^2}}{h}\left(\kappa_n^2 + \kappa_{n+1}^2 + \frac{l^2}{4}\kappa_n^2\kappa_{n+1}^2\right) \\ &+ \frac{l^2}{h\sqrt{1+\nu^2a^2l^2}}\left(\frac{\left(h\sqrt{1+\nu^2a^2l^2}-2\right)^2}{l^4} - \iota^2 - \frac{l^2b^2}{4} - 2\nu ab\right)\end{aligned} \tag{28}$$

を得る. 従って $\mathscr{P}_n$ は κ のみで (μ は用いずに) 表せた. 次に方程式 (17) の両辺に κ_{n+1} を掛けると

$$\mathscr{P}_n + \mathscr{P}_{n+1} = \frac{h\sqrt{1+\nu^2a^2l^2}\,\kappa_{n+1}^2}{1+\frac{l^2}{4}\kappa_{n+1}^2},$$

となるが, 左辺に (28) を代入することにより κ の差分方程式を得る. これを $v_n := \dfrac{l^2}{4}\kappa_n^2 + 1$ とおいて整理すると, v_n の差分方程式

$$v_{n+1} + v_{n-1} = \frac{d_1v_n + d_2}{v_n^2} \tag{29}$$

を得る. ただし d_1, d_2 は n に依らない定数である.

差分方程式 (29) は QRT 系 ([22], etc.) として知られている形をしており, 一般論を使って保存量を求めることができる. さらにこの保存量を用いて計算することにより, v_n を Jacobi の楕円関数で明示的に表せることが分かる. 従って κ_n も Jacobi の楕円関数で明示的に表せる. 次に, $\mathscr{P}_n$, $\mathscr{Q}_n$ の定義より

$$\begin{pmatrix}\cos\mu_{n+1}\\ \sin\mu_{n+1}\end{pmatrix} = \frac{1}{\kappa_n\kappa_{n+1}(1+\nu^2a^2l^2)}\begin{pmatrix}1 & -\nu al\\ \nu al & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathscr{P}_n\\ \mathscr{Q}_n\end{pmatrix},$$

であるが, (27), (28) を代入すれば, $\cos\mu_{n+1}$, $\sin\mu_{n+1}$ も Jacobi の楕円関数で明示的に表せることが分かる．以上により κ_n, $\cos\mu_{n+1}$, $\sin\mu_{n+1}$ の明示公式が得られた． □

参考文献

[1] S. S. Antman, *Nonlinear problems of elasticity*, Applied Mathematical Sciences, vol. 107, Springer-Verlag, New York, 1995. MR 1323857 (96c:73001)

[2] M. Audin, *Spinning tops*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 51, Cambridge University Press, Cambridge, 1996, A course on integrable systems. MR 1409362

[3] M. Bergou, M. Wardetzky, S. Robinson, B. Audoly, and E. Grinspun, *Discrete elastic rods*, ACM SIGGRAPH 2008 papers, 2008, pp. 1–12.

[4] R. L. Bishop, *There is more than one way to frame a curve*, Amer. Math. Monthly **82** (1975), 246–251. MR 0370377 (51 #6604)

[5] A. I. Bobenko and Y. B. Suris, *Discrete time Lagrangian mechanics on Lie groups, with an application to the Lagrange top*, Comm. Math. Phys. **204** (1999), no. 1, 147–188. MR 1705669

[6] A. Calini and T. Ivey, *Bäcklund transformations and knots of constant torsion*, J. Knot Theory Ramifications **7** (1998), no. 6, 719–746. MR 1643940

[7] D. Carroll, E. Hankins, E. Kose, and I. Sterling, *A survey of the differential geometry of discrete curves*, Math. Intelligencer **36** (2014), no. 4, 28–35. MR 3282660

[8] A. Doliwa and P. M. Santini, *Integrable dynamics of a discrete curve and the Ablowitz-Ladik hierarchy*, J. Math. Phys. **36** (1995), no. 3, 1259–1273. MR 1317439

[9] L. Euler, *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici lattisimo sensu accepti*, Bousquet, Lausannae et Genevae, 1744.

[10] T. Hoffmann, *Discrete differential geometry of curves and surfaces*, COE Lecture Note, vol. 18, Kyushu University, Faculty of Mathematics, Fukuoka, 2009, Math-for-Industry (MI) Lecture Note Series. MR 2934178

[11] J. Inoguchi, K. Kajiwara, N. Matsuura, and Y. Ohta, *Discrete mKdV and discrete sine-Gordon flows on discrete space curves*, J. Phys. A **47** (2014), no. 23, 235202,

26. MR 3216777

[12] S. Kaji, K. Kajiwara, and H. Park, *Linkage mechanisms governed by integrable deformations of discrete space curves*, Nonlinear systems and their remarkable mathematical structures. Vol. 2, CRC Press, Boca Raton, FL, [2020] ©2020, pp. 356–381. MR 4591210

[13] S. Kawakubo, *Kirchhoff elastic rods in the three-sphere*, Tohoku Math. J. (2) **56** (2004), no. 2, 205–235. MR 2053319 (2005a:74056)

[14] ———, *Congruence solutions to the localized induction hierarchy in three-dimensional space forms*, Osaka J. Math. **50** (2013), no. 4, 921–945. MR 3161421

[15] S. Kawakubo and N. Matsuura, *Explicit formula for discrete Kirchhoff elastic rods*, Various aspects of integrable systems, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, vol. B91, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2023, pp. 13–35. MR 4593669

[16] G. Kirchhoff, *Über das gleichgewicht und die bewegung eines unendlich dünnen elastischen stabes*, J. Reine Angew. Math. **56** (1859), 285–313.

[17] J. Langer, *Recursion in curve geometry*, New York J. Math. **5** (1999), 25–51 (electronic). MR 1701825 (2002a:37105)

[18] J. Langer and D. A. Singer, *Liouville integrability of geometric variational problems*, Comment. Math. Helv. **69** (1994), no. 2, 272–280. MR 1282371 (95f:58042)

[19] ———, *Lagrangian aspects of the Kirchhoff elastic rod*, SIAM Rev. **38** (1996), no. 4, 605–618. MR 1420839 (97h:73050)

[20] A. E. H. Love, *A treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Dover Publications, New York, 1944, Fourth Ed. MR 0010851 (6,79e)

[21] J. McCrae and K. Singh, *Sketching piecewise clothoid curves*, Computers & Graphics **33** (2009), no. 4, 452–461.

[22] G. R. W. Quispel, J. A. G. Roberts, and C. J. Thompson, *Integrable mappings and soliton equations. II*, Phys. D **34** (1989), no. 1-2, 183–192. MR 982386

[23] Y. Shi and J. Hearst, *The Kirchhoff elastic rod, the nonlinear Schrödinger equation, and DNA supercoiling*, J. Chem. Phys. **101** (1994), 5186–5200.

[24] D. J. Struik, *Lectures on classical differential geometry*, second ed., Dover Publications, Inc., New York, 1988. MR 939369

[25] H. Tsuru, *Equilibrium shapes and vibrations of thin elastic rod*, J. Phys. Soc. Japan **56** (1987), no. 7, 2309–2324. MR 912405 (88i:73045)